Министерство образования и науки РФ
Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«РОСТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Утверждено на заседании
кафедры теоретической механики
27 декабря 2005г

ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Методические указания для самоподготовки студентов

Ростов-на-Дону
2006

УДК 531.01

Плоскопараллельное движение твердого тела: Методические указания для самоподготовки студентов

- Ростов-на-Дону: РГСУ, 2006. 23с.

Предназначены для студентов, обучающихся на всех факультетах Ростовского государственного строительного университета. Цель - помочь студентам изучить теоретический материал по одному из основных разделов кинематики, подготовить их к выполнению индивидуальных расчетно-графических заданий.

Методические указания содержат разобранные типовые примеры.

Составители: к. ф-м. н. Е.Б. Русакова

к.ф.-м.н. М.Ю. Ремизов

Рецензент к. т. н. Д.А. Высоковский

ВВЕДЕНИЕ

Данные методические указания содержат краткую теорию и решение типовых примеров на исследование плоскопараллельного движения многозвенного механизма. Рекомендуется пользоваться следующей литературой:

1. Бутенин Н.В., Лунц Я.Л., Меркин Д.Р. Курс теоретической механики. Т.I.-М.: Наука , 1980.
2. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. –М.: Физматгиз, 1963 и последующие издания.
3. Добронравов В.В., Никитин Н.Н., Дворников А.Л. Курс теоретической механики. –М.: Высшая школа, 1966.
4. Лойцанский Л.Г., Лурье А.И. Курс теоретической механики. Ч.II.-М.: Наука, 1983.

1. ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Определение. Плоскопараллельным называется такое движение твердого тела, при котором расстояние от любой точки тела до некоторой неподвижной плоскости остается неизменным.

Примеры: I. Качение колеса по неподвижной поверхности (рис.I);

2. Движение шатуна AB кривошипно-шатунного механизма (рис.2).

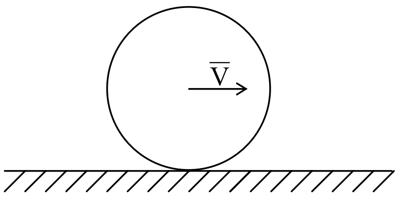

Рис. 1

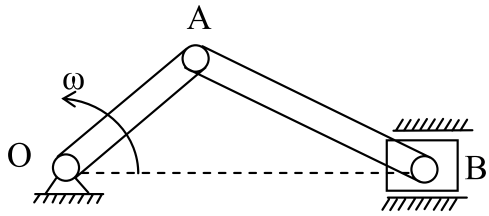

Рис. 2

Покажем, что при таком движении точки тела, расположенные в данный момент времени на одном и том же перпендикуляре к неподвижной плоскости, остаются и в любой момент движения на перпендикуляре к ней (рис.3).

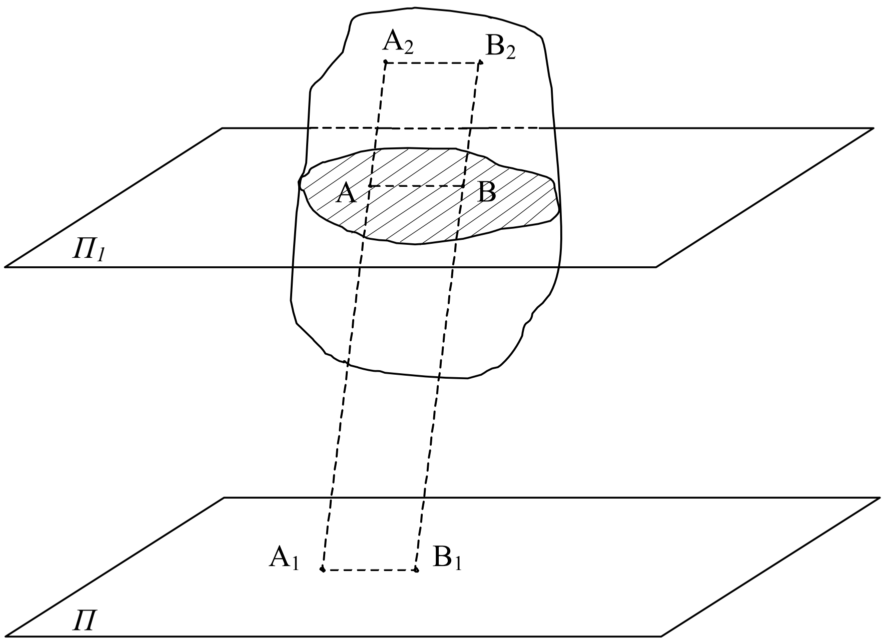

Рис.3

Пусть твердое тело совершает плоское движение, параллельное неподвижной плоскости П. Возьмём произвольную точку A_2 данного тела и опустим из не перпендикуляр на неподвижную плоскость П. A_1 – точка пересечения этого перпендикуляра с плоскостью П, то есть $A_2A_1 \perp$пл.П. Пусть через произвольный промежуток времени точка A_2 перейдет в новое положение B_2 точка A_1 в B_1. Надо показать, что $B_2B_1 \perp$пл.П. Из определения абсолютно твердого тела следует, что $A_2A_1 = B_2B_1$. Из определения плоского движения вытекает, что $A_2B_2 \perp A_2A_1$ и $A_1B_1 \perp A_2A_1$, а также, что $A_2B_2 \parallel$ пл.П и $A_1B_1 \parallel$ пл.П. Отсюда следует, что $A_2B_2 \parallel A_1B_1$, так как в противном случае $B_2B_1 > A_2A_1$. Поэтому полученная фигура $A_1A_2B_2B_1$ – прямоугольник и $B_2B_1 \perp$пл.П, что и требовалось показать.

Вывод. Любая прямая, перпендикулярная к этой неподвижной плоскости и жестко соединенная с движущимся телом, будет двигаться поступательно. Таким образом, для изучения движения точек, лежащих на рассматриваемой прямой, достаточно рассмотреть движение любой точки этой прямой, например точки А. Для изучения движения точек этого тела достаточно рассмотреть движение точек, лежащих в плоскости неподвижной плоскости, например пл.$П_1 \parallel$ пл.П, то есть точек, лежащих в сечении рассматриваемого тела плоскостью $П_1$ (рис.3). Таким образом, для изучения плоского движения твердого тела достаточно изучить движение сечения, параллельного неподвижной плоскости П.

2. УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА

Проведем сечение S тела (рис.4) и свяжем с телом подвижную систему координат x_1cy_1. Введем неподвижную систему координат xoy, относительно которой рассмотрим движение сечения S.

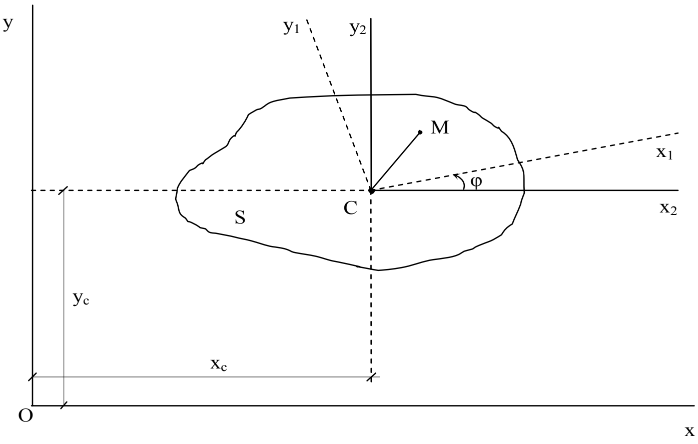

Рис.4

Для того чтобы в любой момент времени знать положение сечения *S*, достаточно показать положение любого отрезка *см*, проведенного в этом сечении. Положение отрезка *см* относительно системы координат *xoy* можно определить, задав координаты какой-либо точки этого отрезка и его направление. Например, для точки *C* нужно задать координаты x_c, y_c , а направление указать углом φ, между любой осью или отрезком *см* и осью *ox.*

Таким образом, уравнения движения плоской фигуры в ее плоскости, а следовательно, и плоского движения твердого тела относительно системы координат *xoy* имеют вид:

$$x_c = f_1(t);\quad y_c = f_2(t);\quad \varphi = f_3(t). \tag{1}$$

Рассмотрим частные случаи:

1. Из формул (1) следует, что если $\varphi = const$, то изменяются

$$x_c = f_1(t);\quad y_c = f_2(t). \tag{2}$$

(2) – уравнения поступательного движения.

2. Пусть $x_c=const$, $y_c=const$, то из уравнений (1) вытекает, что

$$\varphi = f_3(t). \tag{3}$$

(3) – уравнения вращательного движения вокруг оси, проходящей через точку *C*, называемую полюсом.

Вывод. Поступательное и вращательное движения есть частные случаи плоского движения. Плоское движение можно рассматривать как сумму этих движений.

3. ТЕОРЕМА ШАЛЯ

Всякое непоступательное перемещение плоской фигуры в плоскости можно осуществить одним поступательным перемещением вместе с произвольно выбранным полюсом и одним вращением вокруг оси, проходящей через этот полюс.

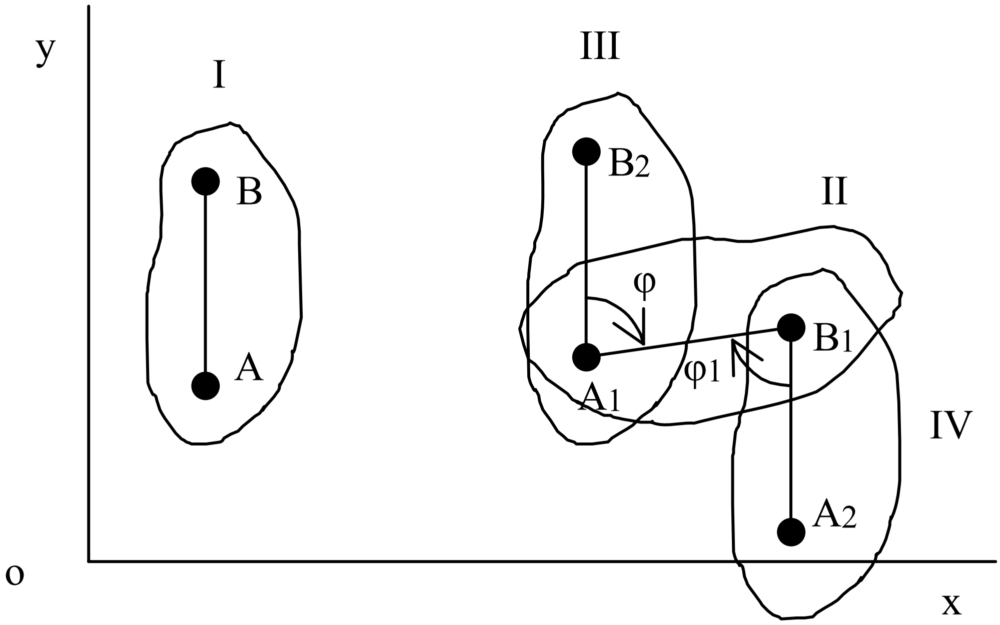

Рис.5

Рассмотрим движение фигуры в плоскости *xoy*. Пусть в начальный момент времени t она занимает положение I, определяемое отрезком AB (рис.5). В конечный момент фигура находится в положении II. Покажем, что из I во II положение её можно перевести двумя способами, выбирая за полюс либо точку B или точку A, при этом углы поворотов φ и φ_1 равны.

I способ: из положения I фигуру поступательно переместим в положение III, а затем вращением вокруг A_1 она займёт положение II.
2 способ: из положения I переместим фигуру поступательно в положение IУ и повернём вокруг точки B_1 по ходу вращения часовой стрелки в положение II.

Вывод. Поступательная часть плоского перемещения зависит от выбора полюса, а вращательная не зависит от него.

4. ОСНОВНЫЕ КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКОГО ДВИЖЕНИЯ

Кинематическими характеристиками движения плоской фигуры являются линейные скорости $\bar{V}_A$ и ускорение $\bar{\alpha}_A$ поступательно движущегося полюса A, угловая скорость ω и угловое ускорение ε вращения этого тела вокруг оси, проходящей через полюс, перпендикулярно плоскости фигуры. Остановимся подробнее на понятиях ω и ε. Если угол поворота вокруг подвижной оси обозначить φ, то

$$\omega = \varphi = \frac{d\varphi}{dt}; \qquad \varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi} = \frac{d^2\varphi}{dt^2};$$

причем ω, ε, на основании теоремы Шаля, не зависят от выбора полюса. При плоском движении тела угловую скорость и угловое ускорение можно считать векторами, направленными по подвижной оси, перпендикулярно к плоскости фигуры и проходящей через выбранный полюс. Вектор угловой скорости $\overline{\omega}$ при плоском движении фигуры направлен по подвижной оси так, чтобы с его конца видеть вращение фигуры против хода часовой стрелки.

Вектор $\bar{\varepsilon}$ при ускоренном вращении фигуры совпадает с направлением вектора угловой скорости $\overline{\omega}$ (рис.6), а при замедленном вращении эти векторы имеют противоположные направления. Так как $\overline{\omega}$ и $\bar{\varepsilon}$ не зависят от выбора полюса, то их можно приложить в любой точке фигуры, не изменяя величин и направлений этих векторов, то есть $\overline{\omega}$ и $\bar{\varepsilon}$ являются свободными векторами.

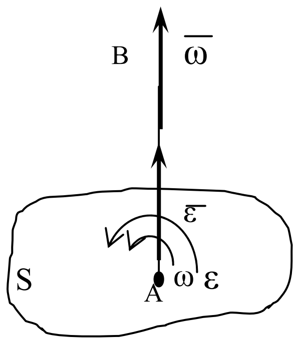

Рис.6

5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТИ ТОЧЕК ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ

Скорости точек плоской фигуры можно определить тремя способами.

5.1. Разложение плоского движения на переносное и относительное.

Рассмотрим плоское движение тела как сложное. Тогда абсолютную скорость любой его точки *B* по теореме о сложении скоростей можно представить в виде рис.7, где $\overline{V}_B$ - абсолютная скорость точки *B* плоской фигуры, относительно неподвижной системы координат *xoy,* по отношению к которой рассматривается движение фигуры;

$\overline{V}_B^{\ell}$ - скорость точки *B* от переносного поступательного движения фигуры;

$\overline{V}_B^{r}$- скорость точки *B* в относительном движении, которым является вращение плоской фигуры вокруг точки *A* с угловой скоростью ω .

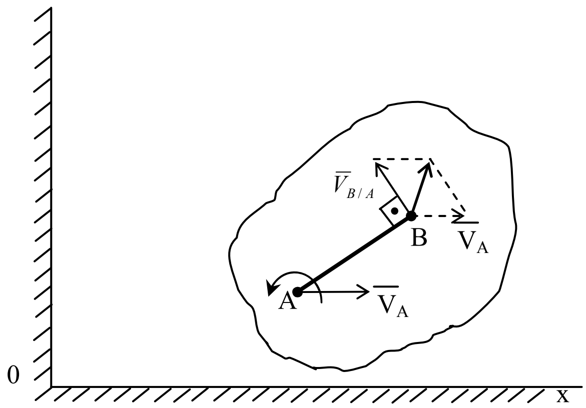

Рис.7

Учитывая, что

$\overline{V}_B^{\ell} = \overline{V}_A$ - по определению поступательного движения, а $\overline{V}_{b/r} = \omega AB$, где $\overline{\omega}$ направлен по подвижной оси вращения, проходящей через точку A и перпендикулярной к плоскости фигуры.

Обозначим

$$\overline{V}_B^{r} = \overline{V}_{b/A}. \tag{5}$$

Формула (5) показывает, что скорость относительного движения точки B получается от вращения плоской фигуры вокруг подвижной оси, проходящей через точку *A,* или просто вокруг точки *A.* Формулу (4) можно представить в виде:

$$\overline{V}_B = \overline{V}_A + \overline{V}_{b/A},$$

где

$$V_{B/A} = \omega AB. \tag{7}$$

Вывод. Скорость любой точки фигуры при её плоском движении равна векторной сумме скорости полюса и относительной скорости этой точки от вращения фигуры вокруг полюса.

Пример. Колесо радиуса R (рис.8) катится со скольжением по прямой линии с угловой скоростью ω, имея в рассматриваемый момент скорость центра $\overline{V}_0$. Найти в этот момент величины скоростей точек *M, К, N,* лежащих на концах вертикального и горизонтального диаметров.

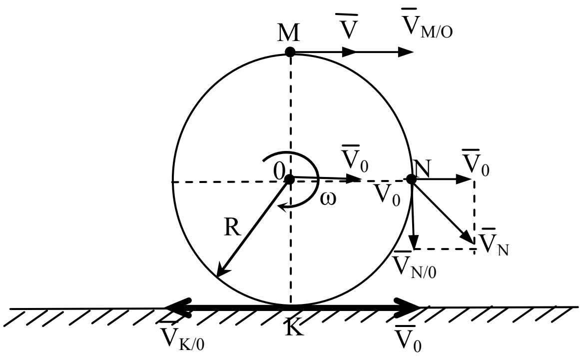

Рис.8

Решение. В качестве полюса выберем точку 0, в которой известны величина и направление скорости $\overline{V}_0$. Тогда для точки M по формулам (6),(7) имеем:

$$\overline{V}_M = \overline{V}_0 + \overline{V}_{M/0};$$

$$V_{M/0} = \omega\, OM = \omega R.$$

Так как $\overline{V}_0$, $V_{M/0}$ направлены по одной прямой в одну сторону, то

$$V_M = V_0 + V_{M/0}.$$

Для точки K скорости $\overline{V}_0$ и $\overline{V}_{K/0}$ противоположны по направлению

$$V_K = V_0 - V_{K/o},$$

где $$V_{K/o} = \omega R.$$

В точке N скорости $\overline{V}_0$ и $\overline{V}_{N/0}$ перпендикулярны, поэтому

$$V_N = \sqrt{V_0^2 + V_{N/0}^2},$$

где $$V_{N/0} = \omega ON = \omega R.$$

5.2. Нахождение скоростей точек плоской фигуры с помощью теоремы о проекциях скоростей

Теорема. Проекции скоростей двух точек плоской фигуры на прямую, соединяющую эти точки, равны.

Дано: $\overline{V}_A$, $\overline{V}_B$ - скорости точек $A, B;$

углы α, β.

Доказать, что $ПР_{AB}\ \overline{V}_A = ПР_{AB}\ \overline{V}_B$.

Доказательство. Примем одну из точек плоской фигуры (например точку A) за полюс (рис.9), тогда по формуле (6):

$$\overline{V}_B = \overline{V}_A + \overline{V}_{B/A} \tag{8}$$

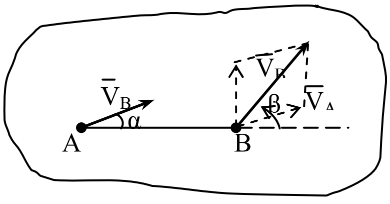

Рис.9

В равенстве (8):

$$\overline{V}_{B/A} = \omega AB;$$

$$\overline{V}_{B/A} \perp AB.$$

Спроецируем векторное равенство (8) на направление отрезка AB:

$$\textit{ПР}_{AB}\ \overline{V}_B = \textit{ПР}_{AB}\ \overline{V}_A + \textit{ПР}_{AB}\ \overline{V}_{B/A},$$

Так как

$$\overline{V}_{B/A} \perp AB, \text{ то } \textit{ПР}_{AB}\ \overline{V}_{B/A} = 0.$$

Тогда имеем:

$$\textit{ПР}_{AB}\ \overline{V}_B = \textit{ПР}_{AB}\ \overline{V}_A$$

или

$$V_B \cos\beta = V_A \cos\alpha. \tag{9}$$

В силу того, что точки A, B были взяты произвольно, равенство (9) справедливо для любых точек плоской фигуры, что и требовалось доказать.

5.3. Метод мгновенных центров скоростей

Определение. Мгновенным центром скоростей (М.Ц.С.) плоской фигуры называется неизменно связанная с ней точка, скорость которой в данный момент времени равна нулю.

Теорема. При непоступательном движении плоской фигуры всегда существует в плоскости ее движения М.Ц.С. и притом единственный.

Дано. Уравнения движения полюса A:

$$x_A = f_1(t),\ У_A = f_2(t),\ \varphi = f_3(t).$$

Доказать: 1. Существование точки, скорость которой равна нулю.

2. Единственность такой точки.

Доказательство. 1. По условию известно, что скорость полюса $V_A \neq 0$ и угловая скорость $\omega \neq 0$ (рис.10). На перпендикуляре к вектору V_A выберем точку P на расстоянии

$$AP = \left|\frac{V_A}{\omega}\right|. \tag{10}$$

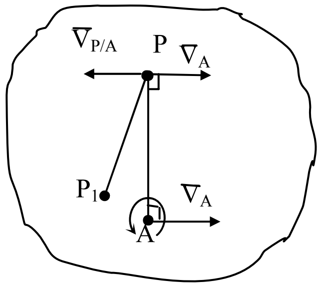

Рис.10

Тогда на основании формулы (6) можно записать, что:

$$\overline{V}_P = \overline{V}_A + \overline{V}_{P/A}.$$

Причем: $\overline{V}_{p/A} \perp AP$.

Из формулы (7) следует, что

$$\left|V_{p/A}\right| = \omega\ AP. \qquad (11)$$

Подставляя в (11) выражение (10), получим

$$\left|V_{p/A}\right| = \omega\ \left|\frac{V_A}{\omega}\right| = |V_A|,$$

следовательно,

$$\left|V_{p/A}\right| = \left|V_A\right|;$$

$$\overline{V}_{P/A} = -\overline{V}_A;$$

то есть абсолютная скорость точки *P* равна нулю: $V_P = 0$.

Таким образом, доказали первую часть теоремы, что всегда можно найти точку в плоскости движения фигуры, скорость которой в данный момент времени равна нулю, то есть *P* – М.Ц.С.

2. Для доказательства единственности М.Ц.С. предположим, что существует ещё точка P_1, абсолютная скорость которой $V_{P1} = 0$ (рис.10). Выберем в качестве полюса точку *P*, тогда на основании формулы (6) имеем:

$$\overline{V}_{P1} = \overline{V}_P + \overline{V}_{P1/P};$$

учитывая, что $\overline{V}_P = 0$, получим

$$V_{P1} = V_{P1/P} = \omega PP_1.$$

По предложению $V_{P1} = 0$, следовательно, $\omega\ PP_1 = 0$, так как $\omega \neq 0$, имеем $PP_1 = 0$, то есть точки P и P_1 совпали, что и требовалось доказать.

5.3.1. Свойства мгновенного центра скоростей

1. Скорость любой точки тела, лежащей в сечении S, равна ее вращательной скорости вокруг М.Ц.С. (рис.11).

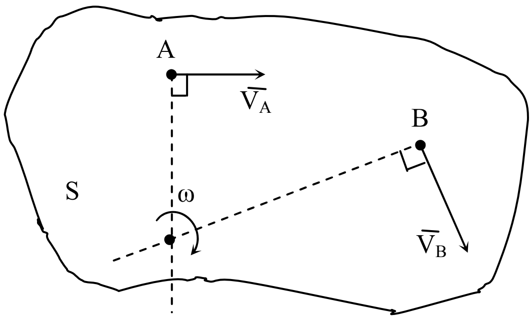

Рис.11

Действительно, если в качестве полюса выбрать точку P – М.Ц.С., то из формул (6), (7) следует, что скорость произвольной точки плоской фигуры можно определить по формуле:

$$\overline{V}_B = \overline{V}_{B/P}, \qquad V_B = \omega\ PB;$$

$$\overline{V}_A = \overline{V}_{A/P}, \quad V_A = \omega\ PA, \tag{12}$$

где PB и PA расстояния от М.Ц.С. P до точек B и A соответственно. Таким образом, скорости всех точек плоской фигуры будут такими, как если бы в данный момент фигура вращалась вокруг оси, проходящей через М.Ц.С.

2. Скорости точек тела пропорциональны их расстояниям до М.Ц.С.

Из равенств (12) следует, что

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{PA}{PB}. \tag{13}$$

3. Угловая скорость тела равна в каждый данный момент времени отношения скорости какой-нибудь точки плоской фигуры к ее расстоянию от М.Ц.С.

Это свойство следует из формул (12).

$$\omega = \frac{V_B}{PB}. \tag{14}$$

4. Для определения скорости любой точки тела надо знать модуль и правление скорости какой-нибудь одной точки A тела и направление скорости другой его точки B.

Из равенств (13) следует, что зная скорость V_A, можно определить скорость V_B. По направлению вектора $\overline{V}_A$ определим направление вращения ω плоской фигуры вокруг М.Ц.С. (рис.11). После этого, соединив точки B и P и восстановив перпендикуляр к прямой BP, определим направление скорости $\overline{V}_B$. Скорость любой другой точки фигуры можно определять далее по формуле (12).

5.3.2. Определение положения мгновенного центра скоростей

Существует два способа нахождения М.Ц.С.

1. М.Ц.С. находится из механических условий задачи, то есть сразу удается указать точку плоскости фигуры, скорость которой в рассматриваемый момент времени равна нулю.

Пример: Качение без скольжения одного тела по неподвижной поверхности другого. Точка касания таких двух тел и будет М.Ц.С. (рис.12).

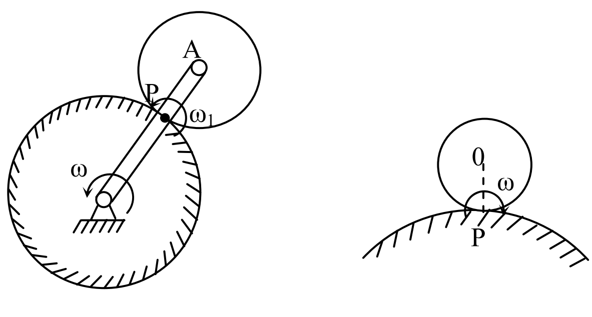

Рис.12

2. Для нахождения М.Ц.С. нужно знать только направления скоростей $\overline{V}_A$ и $\overline{V}_B$ каких-нибудь двух точек A и B плоской фигуры. М.Ц.С. находится в точке пересечения перпендикуляров, восстановленных из точек A и B в скоростях этих точек (рис.11). В 5.3. было доказано, что М.Ц.С. лежит на перпендикуляре к скорости. Восстановив перпендикуляры к двум заданным

скоростям $\overline{V}_A$, $\overline{V}_B$, получим единственную точку их пересечения – *P*, которая и будет М.Ц.С.

Пример. Колесо радиуса *R* катится без скольжения по горизонтальной неподвижной поверхности (рис.13). Скорость центра колеса $V_{0.}$ Найти скорости точек *A, B, D,* лежащих на концах вертикального и горизонтального диаметров.

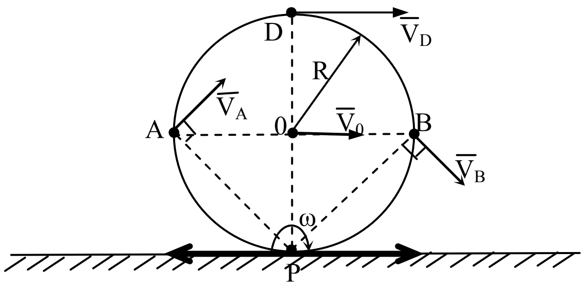

Рис.13

Дано. Скорость центра колеса V_0.

Найти. Скорости V_A, V_B, V_D.

Решение. Так как колесо движется без скольжения, то скорость точки касания с неподвижной поверхностью равна нулю, то есть точка *P* – М.Ц.С. Применяя формулу (12), получим:

$$\omega = \frac{V_0}{OP} = \frac{V_0}{R}.$$

Учитывая, что точка *P* – М.Ц.С. запишем для точек V_A, V_B, V_D соответственно:

$$V_A = \omega PA = \frac{V_0}{R} R\sqrt{2} = V_0\sqrt{2};$$

$$V_D = \omega PD = \frac{V_0}{R} 2R = 2V_0;$$

$$V_B = V_A = V_0\sqrt{2}.$$

5.3.3. Частные случаи определения мгновенного центра скоростей

1. Известно, что $\overline{V}_A \parallel \overline{V}_B$, $\alpha \neq \frac{\Pi}{2}$ (рис.14)

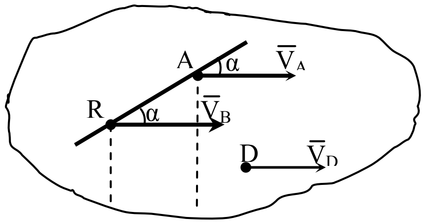

Рис.14

Из теоремы о проекциях скоростей следует, что

$$ПР_{AB}\,\overline{V}_A = ПР_{AB}\overline{V}_B;$$

$$V_A \cos\alpha = V_B \cos\alpha.$$

Так как $\cos\alpha \neq 0$, то

$$V_A = V_B \quad \overline{V}_A = \overline{V}_B. \tag{15}$$

Аналогичный результат получается для всех других точек тела. Примем за полюс точку A, тогда по формуле (6)

$$\overline{V}_B = \overline{V}_A + \overline{V}_{B/A}.$$

Учитывая равенство (15), получим, что $V_{B/A} = 0$, но $V_{B/A} = \omega AB = 0$, следовательно, $\omega = 0$.

Возьмём произвольную точку D. Принимая точку A за полюс, имеем:

$$\overline{V}_D = \overline{V}_A + \overline{V}_{D/A},$$

где $$V_{D/A} = \omega AD,$$

Учитывая, что $\omega = 0$, получим $V_{D/A} = 0$.

Таким образом,

$$\overline{V}_D = \overline{V}_A, \quad V_D = V_A.$$

Так как точка D была взята произвольно, следовательно, скорости любых точек плоской фигуры равны по величине и одинаково направлены. Движение плоской фигуры в этом случае называется мгновенно поступательным и М.Ц.С. находится в бесконечности (рис.15).

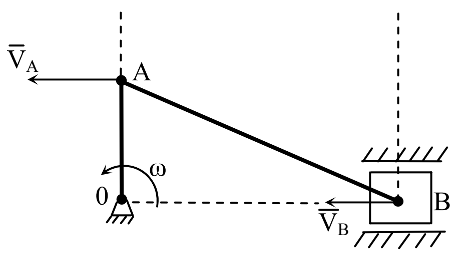

Рис.15

2. Скорости точек *A* и *B* тела параллельны друг другу и при этом линия *AB* перпендикулярна к $\overline{V}_A$ (рис.16).

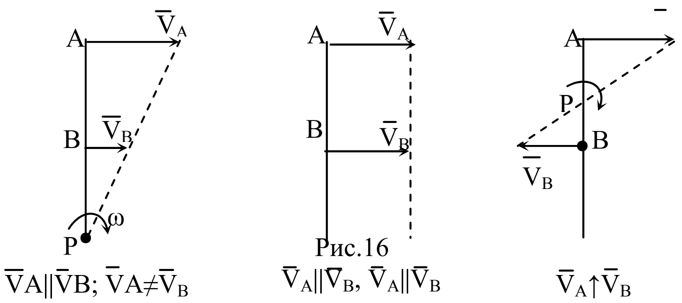

Рис.16

М.Ц.С. определяется построениями, показанными на рис.16.

Справедливость построений вытекает из формул (13).

Пример. В кривошипно-шатунном механизме кривошип *OA* длиной *r = 40см* вращается с угловой скоростью $\omega_0 = 6\hbar c^{-1}$. Определить скорости ползуна *B* и средней точки *C* шатуна *AB*, а также его угловую скорость ω в момент времени, когда *OA* и *AB* взаимно перпендикулярны и φ = 60^0 (рис.17).

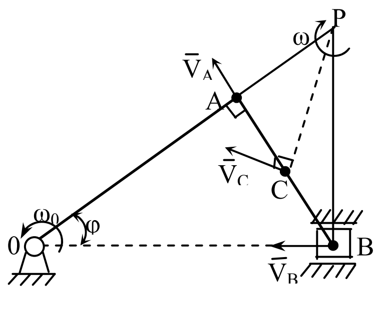

Рис.17

Дано: *OA =r = 40см;* $\omega_0 = 6\pi c^{-1}$;

$AC = CB;\ \varphi = 60^0;\ OA \perp AB.$

Найти: ω – угловую скорость шатуна *AB*.

V_B, V_c – скорости точек *B* и *C*.

Решение. Определим неизвестные величины с помощью М.Ц.С. Для нахождения М.Ц.С. шатуна *AB* изобразим на чертеже (рис.17) векторы скоростей двух точек *A* и *B*. Рассматривая эти точки принадлежащими другим звеньям механизма, а именно: кривошипу *OA,* вращающемуся вокруг оси, проходящей через точку *O*, и ползуну *B* находятся легко, а именно: $\overline{V}_A \perp OA$, $\overline{V}_B$ - направление вдоль *OB*. Восстанавливая перпендикуляры к векторам скоростей $\overline{V}_A$ и $\overline{V}_B$ в точках *A* и *B* и продолжая их до пересечения, получим М.Ц.С. – точку *P* шатуна *AB.*

Модуль скорости точки *A*, как точки кривошипа *OA,* равен

$$V_A = \omega_0 r.$$

С другой стороны, модуль скорости этой же точки как точки шатуна *AB* будет

$$V_A = \omega AP,$$

где ω – угловая скорость шатуна *AB*. Следовательно,

$$\omega = \frac{V_A}{AP} \tag{16}$$

или

$$\omega = \frac{\omega_0 r}{AP}. \tag{16а}$$

Скорости точек *B* и *C* соответственно

$$V_B = \omega BP,$$

$$V_c = \omega CP, \tag{17}$$

причем

$$\overline{V}_c \perp CP.$$

Рассматривая треугольники *OAB* и *OPB* найдём:

$$OB = \frac{r}{\cos\alpha},\ OP = \frac{OB}{\cos\alpha} = \frac{r}{\cos\alpha};$$

$$AP = OP - OA = \frac{r}{\cos^2\alpha} - r = r\frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = rtg^2\alpha,$$

$$AP = 40tg^2 60^0 = 120см;\quad BP = OP\sin\alpha = \frac{r\sin\alpha}{\cos^2\alpha};$$

$$BP = \frac{40\sin 60^0}{\cos^2 60^0} = 80\sqrt{3}см; \; CP = \sqrt{AP^2 + AC^2} = 20\sqrt{39}см; \; AC = \frac{AB}{2} = \frac{rtg\alpha}{2}.$$

Подставляя найденные значения в формулы (16), (17), получим:

$$\omega = \frac{6\hbar 40}{120} = 2\hbar c^{-2} \; V_B = 2\hbar 80\sqrt{3} = 160\sqrt{3}\hbar см/с, \; \overline{V}_C = 40\hbar\sqrt{39}см/с.$$

6. УСКОРЕНИЯ ТОЧЕК ПЛОСКОЙ ФИГУРЫ

Пусть фигура *S* участвует в плоском движении (рис.18).

Будем рассматривать плоское движение как сложное.

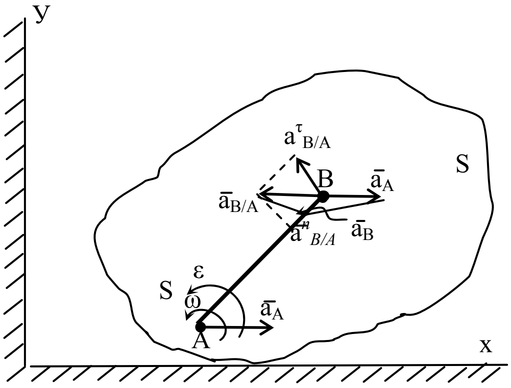

Рис.18

По теореме о сложении ускорений, абсолютное ускорение произвольной точки *B* можно представить в виде:

$$\overline{a}_B = \overline{a}_e + \overline{a}_r + \overline{a}_C. \tag{18}$$

Кориолисово ускорение $\overline{a}_C = 0$, так как тело движется поступательно относительно неподвижной системы координат *xoy*. Примем за полюс произвольную точку *A* плоской фигуры *S*. Так как переносное движение точки *B* – это поступательное движение плоской фигуры с ускорением полюса *A*, то $\overline{a}_e = \overline{a}_A$. Учитывая, что относительное движение точки *B* – есть вращение этой точки вместе с плоской фигурой *S* вокруг оси, проходящей через полюс *A* перпендикулярно к плоскости фигуры, получим:

$$\overline{a}_r = \overline{a}_{B/A} = \overline{a}^{ц}_{B/A} + \overline{a}^{ВР}_{B/A}. \tag{19}$$

Окончательно формула (18) принимает вид:

$$\overline{a}_B = \overline{a}_A = \overline{a}^{ц}_{B/A} + \overline{a}^{ВР}_{B/A}, \tag{20}$$

где $$a^{ц}_{B/A} = \omega^2 AB;$$

$$a^{ВР}_{B/A} = \varepsilon AB \tag{21}$$

Вывод. Ускорение произвольной точки плоской фигуры при плоском движении равно векторной сумме ускорения полюса и ускорения этой точки от вращательного движения плоской фигуры вокруг этого полюса.

Пример. Кривошип *OA* длины 20 см вращается равномерно с угловой скоростью $\omega_0 = 10^{-1} см$, приводит в движение шатун *AB* длины 100 см; ползун *B* движется по вертикали. Найти угловую скорость и угловое ускорение шатуна, а также ускорение ползуна *B* в момент, когда кривошип и шатун взаимно перпендикулярны и образуют с горизонтальной осью углы $\alpha = \beta = 45^0$ (рис.19)

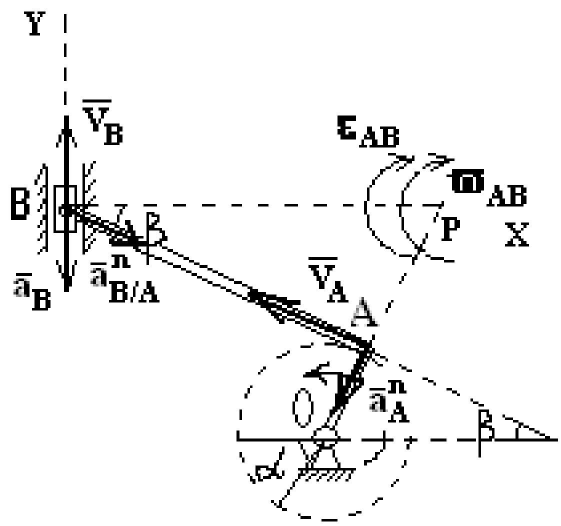

Рис.19

Дано: OA = 0,2 м; $\omega_0 = 10c^{-1}$; AB = 1 м; $\alpha = \beta = 45^0$.

Найти: ω_{AB} – угловую скорость шатуна *AB*;

ε_{AB} - угловое ускорение шатуна *AB*;

α_B – ускорение точки *B*.

Решение. Пусть точка A полюс, тогда рассматривая ее принадлежащей вращающемуся кривошипу OA, определим ее скорость $\overline{V}_\alpha$ и ускорение $\overline{\alpha}_A$ по формулам:

$$V_A = \omega_0 OA = 10 \cdot 0{,}2 = 2 \text{ м/с};$$

$$\overline{\alpha}_A = \alpha_A^ц + \alpha_A^{BP},$$

где
$$\alpha_A^ц = \omega_0^2 OA = 100 \cdot 0{,}2 = 20 м/с^2;$$

$$\alpha_A^{BP} = 0.$$

Так как $\varepsilon_0 = \omega_0 = 0$ $(\omega_0 = const)$.

Посмотрим М.Ц.С. для шатуна AB – точку P.

Угловая скорость шатуна AB

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP} = 2c^{-1}.$$

Ускорение точки B определим по формуле (20):

$$\overline{\alpha}_B = \overline{\alpha}_A + \overline{\alpha}_{B/A}^ц + \overline{\alpha}_{B/A}^{BP}; \tag{21}$$

причем

$$\alpha_{B/A}^ц = \omega_{AB}^2 AB; \quad \alpha_{B/A}^ц = 4 м/с^2;$$

$$\alpha_{B/A}^{вр} = \varepsilon_{AB} AB; \quad \alpha_{B/A}^{\ell p} = 0.$$

Спроецируем равенство (21) на оси x, y.

$$\sum x: \qquad 0 = -\alpha_A^ц \cos\alpha + \alpha_{B/A}^{вр} \cos\alpha + \alpha_{B/A}^ц \cos\alpha;$$

$$\sum y \qquad -\alpha_B = -\alpha_A^ц \sin\alpha + \alpha_{B/A}^{\ell p} \sin\alpha - \alpha_{B/A}^ц \sin\alpha.$$

Решая полученную систему, находим:

$$\alpha_{B/A}^{вр} = \alpha_A^ц - \alpha_{B/A}^ц; \quad \alpha_{B/A}^{\ell p} = 16 м/с^2;$$

$$\alpha_B = \sin\alpha(\alpha_A^ц - \alpha_{B/A}^{вр} + \alpha_{B/A}^ц);$$

$$\alpha_B = \frac{\sqrt{2}}{2}(20 - 16 + 4) = 4\sqrt{2} м/с^2;$$

$$\varepsilon_{AB} = \alpha_{B/A}^{вр}/_{AB}; \quad \varepsilon_{AB} = 16c^{-2}.$$

Ответ:

$$\omega_{AB} = 2c^{-1}; \quad \varepsilon_{AB} = 16c^{-2}; \quad \alpha_B = 4\sqrt{2} м/с^2.$$

Редактор Н.Е.Гладких

Темплан 2006г., поз.168

Подписано в печать 25.05.06 Формат 60х84/16.

Ризограф. Бумага писчая. Уч.-изд. л. 1,3.

Тираж 50 экз. Заказ

Редакционно-издательский центр Ростовского государственного строительного университета

344022, Ростов-на-Дону, ул. Социалистическая, 162