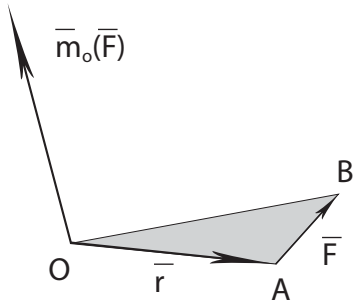


## Вектор-момент силы относительно точки



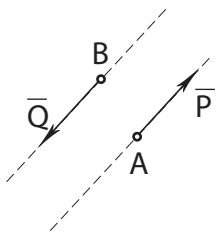
Вектор-моментом силы  $\vec{F}$  относительно точки  $O$  называется

$$\vec{m}_o(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}$$

Как известно, результат векторного произведения векторов перпендикулярен каждому из сомножителей, равен по величине площади параллелограмма, построенного на векторах сомножителях, и направлен в сторону, из которой поворот от первого сомножителя ко второму на наименьший угол виден совершающимся против хода часовой стрелки.

$$\vec{m}_o(\vec{F}) \perp \vec{r}, \vec{m}_o(\vec{F}) \perp \vec{F}, m_o(\vec{F}) = 2S_{\Delta OAB}$$

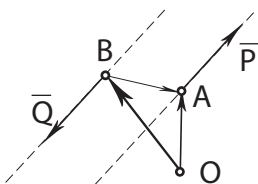
## Пара сил



Парой сил называется совокупность двух равных по модулю сил, действующих вдоль параллельных прямых в разные стороны.

Расстояние между линиями действия сил, составляющих пару называется плечом пары.

$$\vec{P} \parallel \vec{Q}, \vec{P} = -\vec{Q}$$



Теорема: Сумма моментов сил, составляющих пару, относительно произвольного центра не зависит от положения этого центра и называется вектор-моментом пары сил.

$$\vec{m}_o(\vec{P}) + \vec{m}_o(\vec{Q}) = \vec{OA} \times \vec{P} + \vec{OB} \times \vec{Q} =$$

$$\vec{OA} \times \vec{P} - \vec{OB} \times \vec{P} = (\vec{OA} - \vec{OB}) \times \vec{P} = \vec{BA} \times \vec{P} = \vec{m}(\vec{P}, \vec{Q})$$

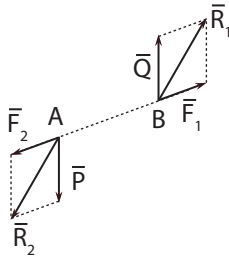
Последняя часть этого равенства не зависит от положения точки  $O$ , – теорема доказана.

## Теорема об эквивалентности пар

*Две пары эквивалентны, если их моменты равны.*

Докажем это утверждение в два этапа.

1. Не изменяя действия пары сил на твердое тело, ее можно перемещать в плоскости действия, поворачивать, менять модули сил, составляющих пару, и ее плечо, так чтобы момент пары не изменялся.



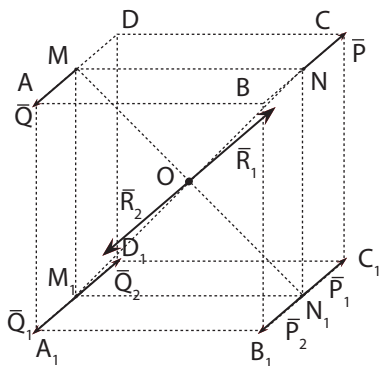
Пусть  $\{\bar{P}, \bar{Q}\}$  – пара сил. Добавим к этой системе уравновешенную систему сил  $\{\bar{F}_1, \bar{F}_2\}$ , как показано на рисунке выше.  $\bar{F}_1 = -\bar{F}_2$ . Силы  $\bar{Q}$  и  $\bar{F}_1$  приложены в одной точке и их можно заменить одной силой  $\bar{R}_1 = \bar{F}_1 + \bar{Q}$ . Аналогично силы  $\bar{P}$  и  $\bar{F}_2$  можно заменить силой  $\bar{R}_2 = \bar{F}_2 + \bar{P}$ . Рассмотрим  $\{\bar{R}_1, \bar{R}_2\}$ . По построению они равны по величине, параллельны и направлены в противоположные стороны, – т.е. образуют пару сил. Вычислим момент пары сил  $\{\bar{R}_1, \bar{R}_2\}$ .

$$\begin{aligned} \overline{m}(\bar{R}_1, \bar{R}_2) &= \overline{m}_A(\bar{R}_1) + \overline{m}_A(\bar{R}_2) = \overline{AB} \times \bar{R}_1 = \overline{AB} \times (\bar{F}_1 + \bar{Q}) = \\ &= \overline{AB} \times \bar{F}_1 + \overline{AB} \times \bar{Q} = \overline{AB} \times \bar{Q} = \overline{m}_A(\bar{Q}) = \overline{m}(\bar{P}, \bar{Q}). \end{aligned}$$

Здесь учтено, что  $\overline{m}_A(\bar{R}_2) = \bar{0}$ , и  $\overline{AB} \times \bar{F}_1 = \bar{0}$ .

Таким образом момент пары сил  $\{\bar{R}_1, \bar{R}_2\}$  равен моменту исходной пары сил  $\{\bar{P}, \bar{Q}\}$ . В тоже время модули сил, составляющих эти пары разные, так же как и плечи этих пар.

2. Не изменяя действия пары сил на твердое тело, ее можно перемещать в другую плоскость, параллельную исходной плоскости действия.



Пусть  $\{\bar{P}, \bar{Q}\}$  – пара сил, расположенная в плоскости  $ABCD$ , силы  $\bar{P}$  и  $\bar{Q}$  приложены в точках  $N$  и  $M$ . Пусть плоскость  $A_1B_1C_1D_1$  параллельна плоскости  $ABCD$ . Пусть  $M_1$  и  $N_1$  – проекции точек  $M$  и  $N$  на плоскость  $A_1B_1C_1D_1$ . Приложим в точке  $N_1$  уравновешенную систему сил  $\{\bar{P}_1, \bar{P}_2\}$ .  $\bar{P}_1 = -\bar{P}_2$  и  $P_1 = P_2 = P$ ,  $\bar{P}_1 \parallel \bar{P}$ . В точке  $M_1$  приложим уравновешенную систему сил  $\{\bar{Q}_1, \bar{Q}_2\}$ .  $\bar{Q}_1 = -\bar{Q}_2$  и  $Q_1 = Q_2 = Q$ ,  $\bar{Q}_1 \parallel \bar{Q}$ .

Рассмотрим силы  $\bar{P}_2$  и  $\bar{Q}$ . Они равны по модулю, параллельны и направлены в одну сторону. Следовательно их можно заменить равнодействующей, приложенной в центре отрезка  $MN_1$ , и направленной параллельно им.  $R_2 = P_2 + Q = 2Q$ .

Аналогично рассмотрим силы  $\bar{Q}_2$  и  $\bar{P}$ . Они равны по модулю, параллельны и направлены в одну сторону. Следовательно их можно заменить равнодействующей, приложенной в центре отрезка  $M_1N$ , и направленной параллельно им.  $R_1 = Q_2 + P = 2Q$ .

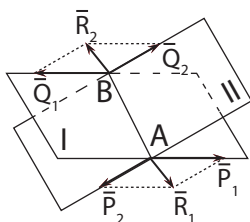
Силы  $\bar{R}_1$  и  $\bar{R}_2$  равны по модулю и действуют вдоль одной прямой в разные стороны, следовательно они образуют уравновешенную систему и их можно отбросить. Аналитически данные рассуждения можно записать так:

$$\{\bar{P}, \bar{Q}\} \approx \{\bar{P}, \bar{Q}, \bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{Q}_1, \bar{Q}_2\} \approx \{\bar{P}_1, \bar{Q}_1, \bar{R}_1, \bar{R}_2\} \approx \{\bar{P}_1, \bar{Q}_1\}.$$

Здесь  $\approx$  – знак эквивалентности систем сил.

Очевидно,  $\{\bar{P}_1, \bar{Q}_1\}$  есть пара сил. От исходной пары  $\{\bar{P}, \bar{Q}\}$  она отличается тем, что лежит в другой плоскости, параллельной плоскости действия исходной пары. Момент этой пары равен моменту исходной пары сил.

### Сложение пар сил



Пусть  $\{\bar{P}_1, \bar{Q}_1\}$  пара сил с моментом  $\bar{m}_1$ , расположенная в плоскости I, а  $\{\bar{P}_2, \bar{Q}_2\}$  – пара сил с моментом  $\bar{m}_2$ , расположенная в плоскости II. Эти плоскости пересекаются по прямой АВ. Так как пару можно перемещать в плоскости действия, то можно добиться того, чтобы силы, составляющие пары были приложены в точках А и В.

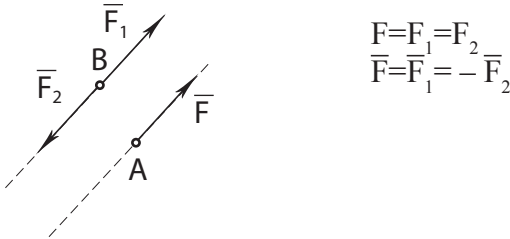
В точке А приложены силы  $\bar{P}_1$  и  $\bar{P}_2$ , их можно заменить равнодействующей  $\bar{R}_1$ . Силы  $\bar{Q}_1$  и  $\bar{Q}_2$ , приложенные в точке В, можно заменить равнодействующей  $\bar{R}_2$ . Силы  $\bar{R}_1$  и  $\bar{R}_2$  образуют пару, так как по построению они равны по модулю и действуют вдоль параллельных прямых в разные стороны. Вычислим момент этой пары.

$$\bar{m}(\bar{R}_1, \bar{R}_2) = \overline{AB} \times \bar{R}_2 = \overline{AB} \times (\bar{Q}_1 + \bar{Q}_2) = \overline{AB} \times \bar{Q}_1 = \overline{AB} \times \bar{Q}_2 = \bar{m}_1 + \bar{m}_2.$$

Таким образом при сложении двух пар сил получается пара, вектор момент которой равен сумме вектор моментов исходных пар.

## Приведение пространственной системы сил к простейшему виду

Докажем вначале теорему: *Не изменяя действия силы на твердое тело, ее можно перенести с линии действия, параллельно самой себе, добавляя при этом пару с моментом, равным моменту исходной силы относительно новой точки приложения силы.*



$$F = F_1 = F_2$$

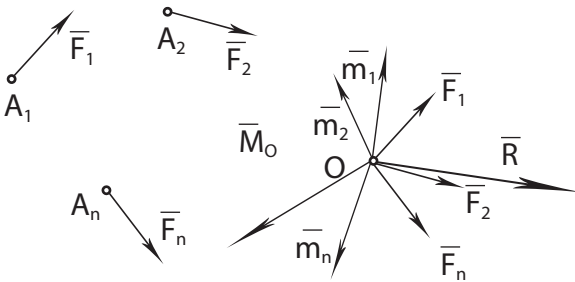
$$\vec{F} = \vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

Рассмотрим силу  $F$ , приложенную в точке  $A$ . Выберем произвольно точку  $B$ , в ней приложим две силы,  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ , так, что модули всех трех сил равны и они параллельны.

Очевидно силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  образуют уравновешенную систему, поэтому можно добавить их к системе. Силы  $\vec{F}$  и  $\vec{F}_2$  образуют пару сил, в итоге получаем силу  $\vec{F}_1$  и пару сил  $\{\vec{F}, \vec{F}_2\}$ .

$$\vec{F} \cup \{\vec{F}, \vec{F}_1, \vec{F}_2\} \cup \{\vec{F}_1, \vec{m}(\vec{F}, \vec{F}_2)\}$$

**Рассмотрим произвольную систему сил.**



Система состоит из сил  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ , приложенных в точках  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Выберем точку  $O$ , в дальнейшем будем называть ее *центром приведения* системы сил, и перенесем последовательно в эту точку все силы

системы, добавляя всякий раз пару с моментом, равным моменту исходной силы относительно новой точки приложения силы. После переноса силы в обозначение добавляем «'», чтобы отличать исходную силу от той же силы в новом положении, пару силы  $\bar{F}_i$  обозначаем  $\bar{m}_i$ . Силы, приложенные в точке  $O$ , можно сложить и получим силу  $\bar{R}$ , Вектор-моменты пар тоже можно сложить и получим одну пару, равную сумме моментов всех исходных сил относительно центра  $O$ .

$$\{\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n\} \rightsquigarrow \{\bar{F}'_1, \bar{F}'_2, \dots, \bar{F}'_n, \bar{m}_1, \bar{m}_2, \dots, \bar{m}_n\} \rightsquigarrow \{\bar{R}, \bar{M}_O\}$$

Здесь введены обозначения:

$\bar{R} = \Sigma \bar{F}_i$  – главный вектор системы сил;

$\bar{M}_O = \Sigma \bar{m}_{O_i}$  – главный момент системы сил относительно центра  $O$ .

Очевидно что главный вектор системы сил не зависит от положения центра приведения, главный момент системы очевидно меняется при изменении центра приведения. Заметим, что проекция главного момента на направление главного вектора системы тоже не зависит от положения центра приведения, но доказывать это не будем.

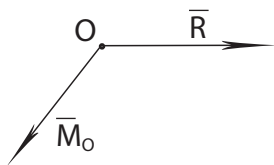
## Вывод

Система сил эквивалентна совокупности одной силы, – главного вектора системы и одной пары, – главного момента системы.

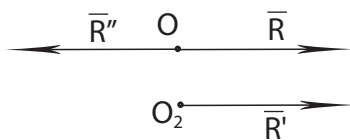
### Анализ возможных вариантов

1.  $\bar{R} = \bar{0}$ ;  $\bar{M}_O = \bar{0}$  – система уравновешена.
2.  $\bar{R} \neq \bar{0}$ ;  $\bar{M}_O = \bar{0}$  – система приводится к равнодействующей.
3.  $\bar{R} = \bar{0}$ ;  $\bar{M}_O \neq \bar{0}$  – система приводится к паре сил.
4.  $\bar{R} \neq \bar{0}$ ;  $\bar{M}_O \neq \bar{0}$  – здесь возможно несколько подслучаев.

a)  $\vec{R} \parallel \vec{M}_O$  – сила и пара направлены вдоль одной прямой, в этом случае говорят, что система сводится к динаме.



b)  $\vec{R} \perp \vec{M}_O$  – система приводится к равнодействующей, но линия действия равнодействующей не проходит через центр приведения. Докажем это.



Пара и сила перпендикулярны. Силы, составляющие пару, можно расположить так, как это показано на чертеже –  $\vec{R}'$  и  $\vec{R}''$  силы, составляющие пару. Модули всех трех сил можно сделать равными. Можно изменять направление сил, составляющих пару, их модули, расстояние между линиями действия так, чтобы не изменялся момент пары.

Можно изменять направление сил, составляющих пару, их модули, расстояние между линиями действия так, чтобы не изменялся момент пары.

$$\{\vec{R}, \vec{M}_O\} \sim \{\vec{R}, \vec{R}', \vec{R}''\} \sim \vec{R}'$$

с)  $\vec{R} \nparallel \vec{M}_O$  и  $\vec{R} \not\perp \vec{M}_O$  – в этом случае система сил приводится к динаме, но ось динами не проходит через точку приведения.

В этом случае мы можем представить вектор  $\vec{M}_O$  в виде суммы двух векторов, – одного перпендикулярного к  $\vec{R}$ , и другого, параллельного  $\vec{R}$ . Пара, перпендикулярная  $\vec{R}$ , и сила  $\vec{R}$  приводятся к одной силе (см. случай b), линия действия которой не проходит через точку O. В дополнение к этой силе остается пара, ей параллельная и вместе они образуют динаму.

### Условия равновесия

1. В случае произвольной пространственной системы сил из векторных условий

$$\vec{R} = \vec{0}; \vec{M}_O = \vec{0}$$

Вытекают 6 скалярных условий:

$$\Sigma F_{xi} = 0; \Sigma F_{yi} = 0; \Sigma F_{zi} = 0;$$

$$\Sigma m_{x_i} = 0; \Sigma m_{y_i} = 0; \Sigma m_{z_i} = 0.$$

2. Произвольная плоская система сил (все силы системы лежат в плоскости  $xOy$ ). В этом случае  $\bar{R}$  лежит в плоскости  $xOy$ , а  $\bar{M}_O$  параллельно оси  $z$ .

Тогда в скалярном виде уравнения равновесия примут вид:

$$\Sigma F_{x_i} = 0; \Sigma F_{y_i} = 0; \Sigma m_{A_i} = 0.$$

3. Система сходящихся сил. Линии действия всех сил пересекаются в одной точке. Если в качестве центра приведения выбрана точка пересечений линий действия сил системы, то  $\bar{M}_O = \bar{0}$  и остается три условия равновесия:

$$\Sigma F_{x_i} = 0; \Sigma F_{y_i} = 0; \Sigma F_{z_i} = 0.$$

В случае системы сходящихся сил на плоскости остается 2 скалярных уравнения равновесия:

$$\Sigma F_{x_i} = 0; \Sigma F_{y_i} = 0.$$