Министерство науки и образования Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Ростовский государственный строительный университет»

Утверждено на заседании
кафедры теоретической
механики 23 ноября 2005 г.

РАСЧЕТ ПЛОСКИХ ФЕРМ

Методические указания и контрольные задания
для студентов заочного отделения

Ростов – на – Дону
2006

УДК 531.01

Расчет плоских ферм: Методические указания и контрольные задания для студентов заочного отделения.- Ростов–на-Дону: Рост. гос. строит. ун -т, 2006 - 23 с.

Предназначены для студентов заочного отделения всех специальностей. Приводятся различные методы расчета плоских ферм и разбираются решения типовых примеров.

Составители: Т.В.Виленская
С.С.Савченкова

Рецензент: проф. И.Ф.Хрджиянц

Редактор Н.Е.Гладких
Темплан 2006 г., поз. 171
Подписано в печать 24.05.06. Формат 60х84/16.
Бумага писчая. Ризограф. Уч.-изд. л.. 1,4.
Тираж 100 экз. Заказ
Редакционно – издательский центр РГСУ
344022, Ростов н/Д, ул. Социалистическая, 162

ВВЕДЕНИЕ

При постройке мостов, подъемных кранов и других сооружений применяются конструкции, называемые фермами.

Фермой называется конструкция, состоящая из стержней, соединённых между собой на концах шарнирами и образующих геометрически неизменяемую систему.

Шарнирные соединения стержней фермы называют её узлами. Если оси всех стержней фермы лежат в одной плоскости, то ферма называется плоской.

Мы будем рассматривать только плоские фермы.

Предполагаем, что выполняются следующие условия:

1) все стержни фермы прямолинейные;

2) трение в шарнирах отсутствует;

3) все заданные силы приложены только в узлах фермы;

4) весом стержней можно пренебречь.

В этом случае каждый стержень фермы находится под действием только двух сил, которые будут вызывать его растяжение или сжатие.

Пусть ферма имеет «m» стержней и «n» узлов. Найдём зависимость между m и n, обеспечивающую жесткость конструкции (рис. 1).

Чтобы связать первые три узла, необходимо три стержня, для жесткого присоединения каждого из остальных (n-3) узлов нужно по 2 стержня, то есть

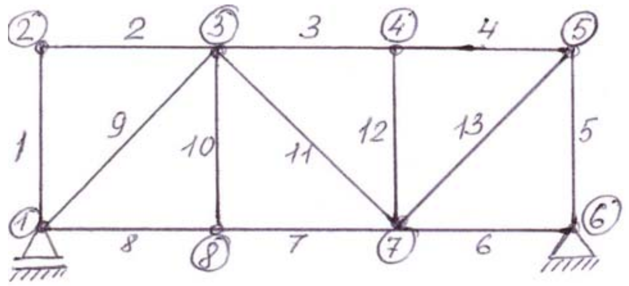
$m - 3 = 2\cdot(n-3)$

или $m = 2n-3$. (1)

Если $m < 2n - 3$, то конструкция не будет геометрически неизменяемой, если $m > 2n - 3$, ферма будет иметь «лишний» стержень.

Равенство (1) называется условием жесткости.

Ферма, изображенная на рис. 1 , является жесткой конструкцией



$n=8$
$m= 13$
$13=8 \cdot 2-3$

Рис. 1

Расчёт фермы сводится к определению опорных реакций и усилий в стержнях, то есть сил, действующих со стороны узлов на примыкающие к нему стержни.

Выясним, при каком соотношении между числом стержней и узлов ферма будет статически определимой. Если все неизвестные силы можно определить из уравнений равновесия, то есть количество независимых уравнений равно числу неизвестных, то конструкция статически определима.

Так как на каждый узел фермы действует плоская система сходящихся сил, то всегда можно составить 2n уравнений равновесия. Общее количество неизвестных - m + 3, (где m усилий в стержнях и 3 опорные реакции).

Условие статической определимости фермы

$$m + 3 = 2n$$

или

$$m = 2n - 3 \qquad (2)$$

Сравнивая (2) с (1), видим, что условие статической определимости совпадает с условием жесткости. Следовательно, жёсткая ферма без лишних стержней является статически определимой.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПОРНЫХ РЕАКЦИЙ

Для определения опорных реакций рассматриваем равновесие всей фермы в целом под действием произвольной плоской системы сил. Составляем три уравнения равновесия. После нахождения опорных реакций необходимо сделать проверку.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСИЛИЙ В СТЕРЖНЯХ ФЕРМЫ

Усилия в стернях фермы можно определить двумя способами: методом вырезания узлов и методом сечения (метод Риттера).

Метод вырезания узлов состоит в следующем:
последовательно рассматривается равновесие всех узлов фермы, находящихся под действием внешних сил и реакций перерезанных стержней. К каждому узлу приложена плоская система сходящихся сил, для которой можно составить два уравнения равновесия. Расчёт целесообразно начинать с того узла, где сходятся два стержня. При этом одно уравнение равновесия предпоследнего узла и два уравнения последнего узла являются проверочными.

Метод Риттера состоит в следующем:
ферма, к которой приложены внешние силы, включая реакции опор, рассекается на две части по трём стержням, если это возможно. В число перерезанных стержней должны входить те усилия, которые требуется определить.

Одна из частей фермы отбрасывается. Действие отброшенной части на оставшуюся заменяется неизвестными реакциями.

Рассматривается равновесие оставшейся части. Уравнения равновесия составляются так, чтобы в каждое из них входило только одно неизвестное. Это достигается специальным выбором уравнений: при составлении уравнения моментов моментная точка выбирается там, где пересекаются линии действия двух неизвестных усилий, которые в данный момент не определяются. При составлении уравнения проекций ось проекций выбирается перпендикулярно двум параллельным усилиям.

При составлении уравнений равновесия обоими методами предполагается, что все стержни растянуты. Если результат получается со знаком минус, стержень сжат.

Типовой пример: Определить опорные реакции и усилия в стержнях фермы, если F=20 kH, P=20 kH, α=60°, Q=30 kH.(рис. 2, 3).

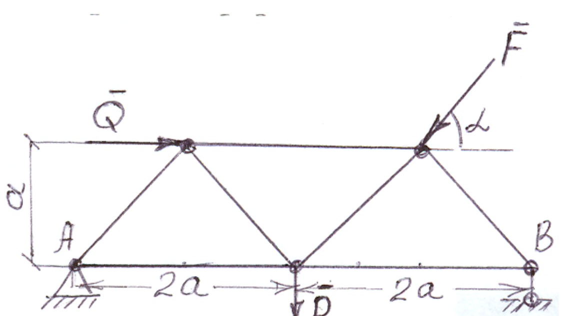


Рис.2

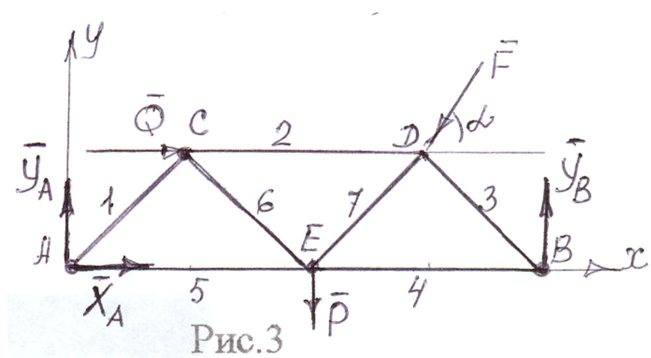


Рис.3

Определяем опорные реакции, рассматривая равновесие системы в целом (рис.3).

$\sum X = 0: X_A - F \cdot \cos\alpha + Q = 0;$

$\sum H = 0: Y_A + Y_B - P - F \cdot \sin\alpha = 0;$

$\sum M_A = 0: -Q \cdot a - P \cdot 2a - F \cdot \sin\alpha \cdot 3a + F \cdot \cos\alpha \cdot a + Y_B \cdot 4a = 0.$

Решая эти уравнения, находим:

$X_A = -20$ kH; $Y_A = 9.33$ kH; $Y_B = 28$ kH.

Проверим правильность полученных результатов. Для этого составим сумму моментов сил относительно точки С.

$\sum M_C = X_A \cdot a - Y_A \cdot a - P \cdot a - F \cdot \sin\alpha \cdot 2a + Y_B \cdot 3a =$

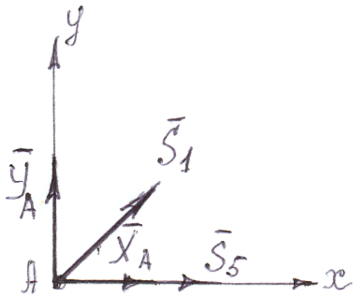
$= (-20 - 9.33 - 20 - 20 \cdot 1.73 + 28 \cdot 3) \cdot a = 0.$

Переходим к определению усилий в стержнях фермы.

Метод вырезания узлов.

Начинаем расчёт с узла А, где сходятся два стержня.

Следует изобразить тот узел, равновесие которого рассматривается (рис.4). Так как мы предполагаем, что все стержни растянуты, реакции стержней направляем от узла ($\bar{S}_1$ *и* $\bar{S}_5$). Тогда усилия в стержнях (реакции шарнира) будут направлены в противоположную сторону.



Для узла A составляем два уравнения равновесия:

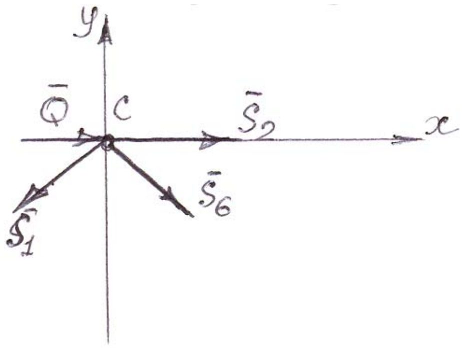
$\sum X = 0{:}+X_A + S_5 + S_1 \cdot \cos 45° = 0;$

$\sum Y = 0{:}Y_A + S_1 \cdot \cos 45° = 0.$

Получаем: $S_1 = -13.2kH;$ $S_5 = 29.32kH.$

Рис.4

Далее рассматриваем равновесие узла C (рис.5).



Уравнения равновесия:

$\sum X = 0{:}Q + S_2 + S_6 \cdot \cos 45° - S_1 \cdot \cos 45° = 0;$

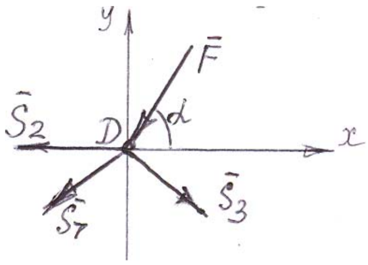
$\sum Y = 0{:}- S_1 \cdot \cos 45° - S_6 \cdot \cos 45° = 0.$

При подстановке значения S_1 учитываем, что усилие отрицательное.

Получаем: $S_6 = 13.2kH;$ $S_2 = -48.7kH.$

Рис.5

Аналогично рассчитываются остальные узлы (рис. 6,7).

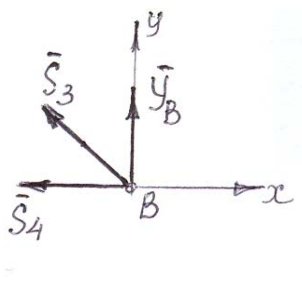


$\sum X = 0{:}- S_2 - S_7 \cdot \cos 45° - S_3 \cdot \cos 45° - F \cdot \cos \alpha = 0;$

$\sum Y = 0{:}- S_7 \cdot \cos 45° - S_3 \cdot \cos 45° - F \cdot \sin \alpha = 0.$

Отсюда: $S_3 = -39.6kH;$ $S_7 = 15.13kH.$

Рис.6



$\sum X = 0{:}- S_4 - S_3 \cdot \cos 45° = 0;$

Второе уравнение проверочное:

$\sum Y = +Y_B + S_3 \cdot \cos 45° = 28-39.6 \cdot 0.71 =0.$

$S_4 = 28.0kH.$

Рис.7

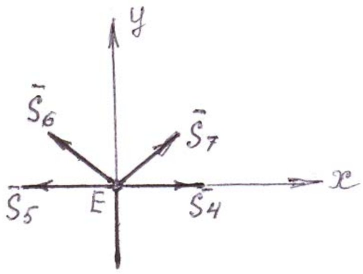


Рис.8

Для проверки рассмотрим равновесие узла Е.(Рис.8)

$\sum X = - S_5 + S_4 - S_6 \cdot \cos 45° + S_7 \cdot \cos 45° = 0;$

$\sum Y = S_6 \cdot \cos 45° + S_7 \cdot \cos 45° - P = 0.$

Так как уравнения обратились в тождества, то расчёт сделан верно.

<u>Метод сечения (метод Риттера).</u>

Метод Риттера удобно использовать, если требуется определить усилия не во всех стержнях, и как проверочный, так как он позволяет определить каждое усилие независимо от остальных.

Определим усилия в стержнях 2, 6, 5. Разрезаем ферму на две части по стержням 2, 6, 5. Отбрасываем правую часть и рассматриваем равновесие левой (рис. 9)..

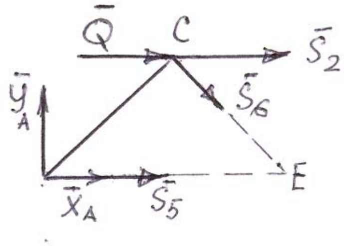


Рис.9

Для определения усилия S_5 составляем уравнение моментов относительно точки, где пересекаются силы S_2 и S_6 (точка С).

$\sum M_C = 0: X_A \cdot a - Y_A \cdot a + S_5 \cdot a = 0;.$

$S_5 = 29.32$ kH.

Для определения усилия S_2 составляем уравнение моментов относительно точки Е:

$\sum M_E = 0:- Q \cdot a - S_2 \cdot a - Y_A \cdot 2a =0;$

$S_2 = 48.64$kH.

Для определения усилия S_6 следует составить уравнение проекций на ось Y:

$\sum Y = 0:-S_6 \cdot \cos 45° + Y_A = 0;$

$S_6 = 13.2$kH.

Результаты следует занести в табл. 1.

Усилия в стержнях фермы, кН							
№ стержня, способ	1	2	3	4	5	6	7
Способ вырезания узлов	-13,2	-48,7	39,6	28,0	29,32	13,2	15,3
Способ Риттера		-48,64			29,32	13,2	

РАСЧЁТ ФЕРМЫ С ПОМОЩЬЮ ПРИНЦИПА ВОЗМОЖННЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

Принцип возможных перемещений является основным принципом аналитической механики. Он даёт самые общие методы решения задач статики и позволяет определять каждое неизвестное усилие независимо от всех остальных, составляя для него одно уравнение равновесия.

Принцип возможных перемещений (теорема Лагранжа-Остроградского):

Для равновесия механической системы, подчиненной идеальным, геометрическим и стационарным связям, необходимо и достаточно, чтобы сумма работ активных сил, действующих на систему, была равна нулю на любом возможном перемещении системы:

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k^{(a)} = 0 \,.$$

Стационарные связи - связи, явно не зависящие от времени.

Идеальные связи - связи, сумма работ реакций которых на любом возможном перемещении системы равна нулю.

Геометрические связи - связи, накладывающие ограничения только на координаты точек системы.

Активные силы - силы, действующие на систему, кроме реакций связи.

Возможные перемещения системы

Возможные перемещения механической системы - бесконечно малые перемещения системы, допускаемые наложенными на неё связями.

Величины возможных перемещений обозначаются символами, например - δ S, $\delta\varphi$, δX.

Приведём примеры возможных перемещений систем (ограничимся рассмотрением плоских систем):

1. Тело закреплено неподвижным шарниром, позволяющим телу вращаться вокруг оси, проходящей через точку О, перпендикулярно

плоскости чертежа (рис. 10).

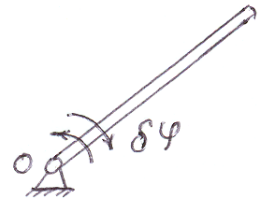


Рис.10

Возможное перемещение тела - поворот вокруг оси на угол δφ.

2. Тело закреплено двумя подвижными шарнирами (рис.11).

Рис. 11

Эти связи позволяют телу перемещаться поступательно параллельно плоскостям катков.

Возможное перемещение тела - δX.

3.Тело тоже закреплено двумя подвижными шарнирами (плоскости катков не параллельны).

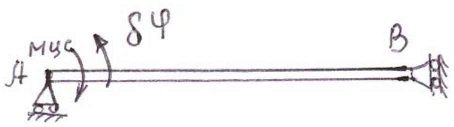


Рис. 12

Эти связи позволяют плоскому телу перемещаться только в плоскости чертежа. Возможное перемещение этого тела будет плоскопараллельным перемещением. А плоскопараллельное перемещение тела можно в данный момент рассматривать как вращательное движение вокруг оси, проходящей через мгновенный центр скоростей тела (м.ц.с.) перпендикулярно плоскости чертежа (рис. 12)..

Следовательно, чтобы увидеть возможное перемещение данного тела, надо знать, где находится м.ц.с. этого тела. Чтобы построить м.ц.с., нужно знать направления скоростей двух точек тела, провести перпендикуляры к скоростям в этих точках, точка пересечения перпендикуляров и будет м.ц.с. тела. В примере нам известны направления скоростей точек А и В (они параллельны плоскостям катков). Значит, возможное перемещение этого тела - поворот на угол δφ вокруг оси, проходящей через точку А перпендикулярно плоскости чертежа.

ВЫВОД: Так как в дальнейшем рассматриваются только плоские системы, то чтобы увидеть возможное перемещение системы, состоящей из плоских твёрдых тел, надо для каждого твёрдого тела увидеть или построить м.ц.с. Тогда возможным перемещением каждого твёрдого тела будет поворот вокруг своего м.ц.с., или тело будет двигаться поступательно, если м.ц.с. отсутствует. Возможные перемещения системы определяются только связями, наложенными на систему, и не зависят от сил, действующих на систему. В случае геометрических и стационарных связей направления возможных перемещений точек системы совпадают с направлениями скоростей этих точек при реальном движении.

Работа силы на возможном перемещении

В рассматриваемых задачах твёрдые тела будут иметь возможность либо двигаться поступательно, либо вращаться вокруг оси, перпендикулярной плоскости чертежа. Запишем формулы для нахождения возможной работы силы при таких перемещениях тел.

1.Тело движется поступательно.

Тогда каждая точка тела перемещается на $\delta \bar{r}$. Следовательно, точка приложения силы F перемещается на $\delta \bar{r}$. Тогда $\delta A = \bar{F} \bullet \delta \bar{r}$.

Частные случаи:

$\delta A = \bar{F} \bullet \delta \bar{r}$

$\delta A = -\bar{F} \bullet \delta \bar{r}$

$\delta A = 0.$

2. Тело вращается вокруг оси.

Работа силы $\bar{F}$ находится как элементарная работа силы, приложенной к вращающемуся телу. Тело поворачивается на угол $\delta\varphi$.

Тогда

$\delta A = M_z (\bar{F}) \cdot \delta\varphi$,

где $M_z (\bar{F})$ - момент силы $\bar{F}$ относительно оси вращения тела (в наших задачах ось z перпендикулярна плоскости чертежа и нахождение $M_z(\bar{F})$ сводится к нахождению момента силы $\bar{F}$ относительно точки пересечения оси с плоскостью).

$\delta A > 0$, если сила создаёт момент, направленный в сторону вращения тела;.

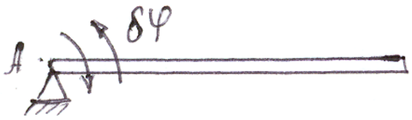
$\delta A < 0$, если сила создаёт момент, направленный в сторону, противоположную вращению тела.

Если к вращающемуся телу приложена пара сил с моментом m,
то δA=mδφ.

Применение принципа возможных перемещений для нахождения реакций связей в статически определимых системах.

Число независимых возможных перемещений системы называется числом степеней свободы системы.(рис. 13).

«0» степеней свободы (нет возможных перемещений



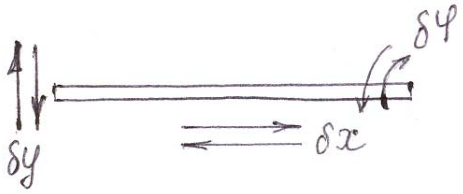
«1» степень свободы (одно независимое возможное перемещение)

«1» степень свободы (одно независимое возможное перемещение)

МТЦ нет

« 1» степень свободы (одно независимое возможное перемещение)

«2» степени свободы (два независимых возможных перемещения)

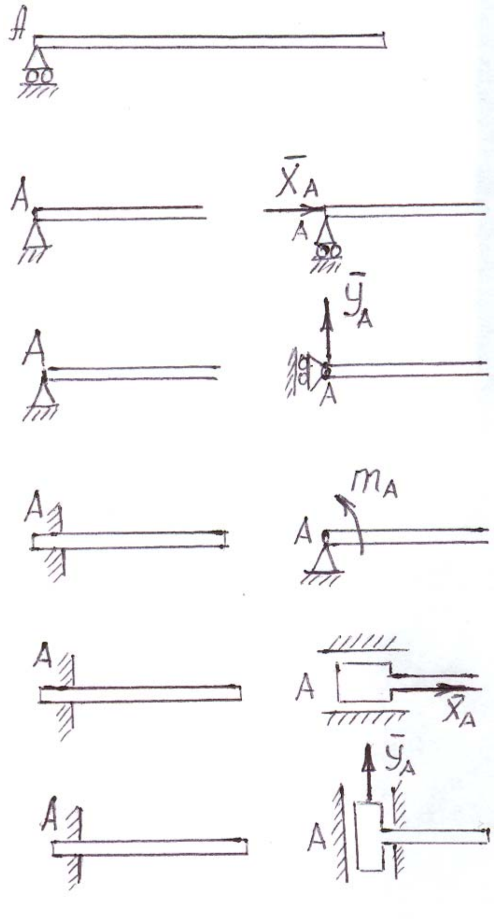


«3» степени свободы (три независимых возможных перемещения)

Рис. 13

Применение принципа возможных перемещений для нахождения реакций связей в статистически определимых механических системах основано на частичной замене связей реакциями.

Способы замены связей реакциями (рис.14)..



Неподвижный шарнир можно заменить подвижным и добавить одну силу реакции, направленную параллельно плоскости перемещения подвижного шарнира

Заделку можно заменить неподвижным шарниром и парой с моментом m_A;

Заделку можно заменить ползуном и силой, направленной вдоль направляющих ползуна (ползун – связь, допускающая только поступательное перемещение тела вдоль направляющих).

Рис.14

Смысл частичной замены связи реакцией состоит в том, чтобы полученная в результате такого действия система имела одну степень свободы.

Задачи на нахождение реакций связей с помощью принципа возможных перемещений рекомендуется решать по следующему плану:

1) перевести искомую реакцию в разряд активных сил, т.е. заменить связь или часть связи искомой реакцией;

2) выяснить, из каких твёрдых тел состоит система, пронумеровать их;

3) придать системе возможное перемещение. Для этого надо найти возможные перемещения двух точек каждого тела - точек, где наложены связи, или общих точек двух тел. Если возможны перемещения не

параллельны между собой, то по ним строим м.ц.с. Тогда возможное перемещение тела - поворот вокруг м.ц.с. Если же эти возможные перемещения параллельны и не перпендикулярны прямой, соединяющей точки, то возможное перемещение тела поступательное;

4) записать принцип возможных перемещений, т.е. составить уравнение:

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k^{(a)} = 0\,;$$

5) выразить все возможные перемещения, входящие в уравнение, написанное выше, через одно независимое. Для этого нужно воспользоваться равенством возможных перемещений общих точек (точек соприкосновения) твёрдых тел.;

6) приравнять нулю коэффициент при независимом возможном перемещении и из полученного уравнения найти искомую реакцию.

Примеры использования принципа возможных перемещений для расчёта ферм.

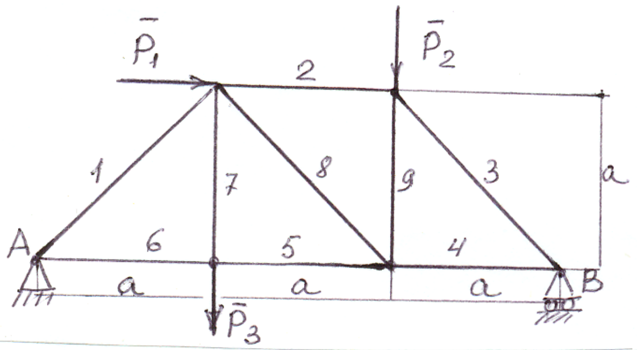


Рис.15

Дано: P_1; P_2; P_3.
Найти: реакции опор и усилия в некоторых стержнях фермы (рис. 15).

Найдём реакции опор фермы $X_A; Y_A; Y_B$. Для каждой реакции составим своё уравнение равновесия по плану:

1) для нахождения X_A заменим неподвижный шарнир A подвижным вдоль оси x и добавим силу X_A (рис. 16).;

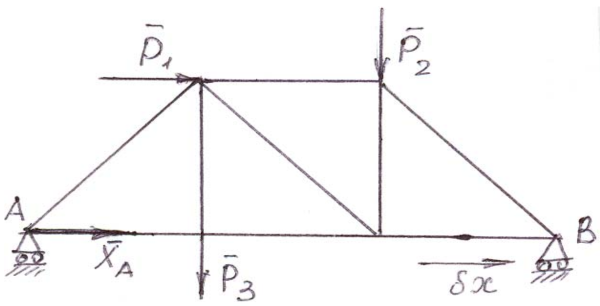


Рис.16

2) система представляет одно твёрдое тело.;

3)так как возможные перемещения точек А и В параллельны между собой и направлены вдоль оси x, то возможное перемещение тела – поступательное.

4)запишем уравнение

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k^{(a)} = 0 \quad X_A \cdot \delta x + P_1 \cdot \delta x = 0;$$

5) так как в полученном уравнении только одно возможное перемещение, то пункт 5) выполняется автоматически;

6) приравняем к нулю коэффициент при δx.

$X_A + P_1 = 0$.

Отсюда $X_A = - P_1$.

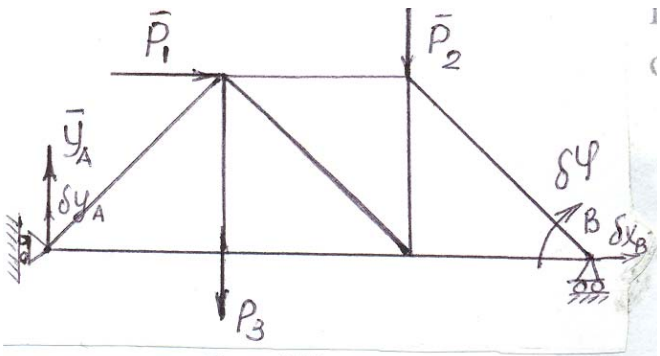


Рис.17

Для определения реакции Y_A, заменим неподвижный шарнир А подвижным вдоль оси y и добавим силу Y_A. Система представляет одно твердое тело. Укажем возможные перемещения точек А и В – δx_B; δy_{Aa} (рис. 17).

По этим возможным перемещениям строим м.ц.с. Он попадает в точку В. Поэтому возможное перемещение тела- поворот δφ вокруг точки В.

Запишем уравнение

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k^{(a)} = 0 \quad Y_A \cdot 3a \cdot \delta\varphi + P_1 \cdot a \cdot \delta\varphi - P_2 \cdot a \cdot \delta\varphi - P_3 \cdot 2a \cdot \delta\varphi = 0.$$

Приравнивая к нулю коэффициент при δφ, находим:

$$.\ 3Y_A + P_1 - P_2 - 2P_3 = 0.$$

$$Y_A = (P_2 + 2P_3 - P_1)\frac{1}{3}$$

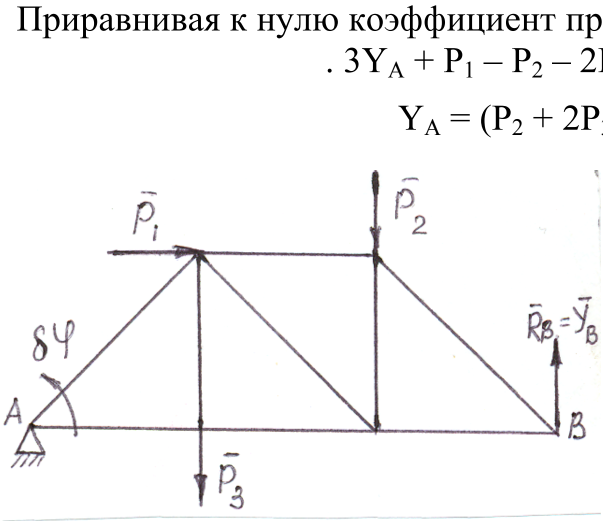


Рис.18

Для определения реакции Y_B уберём подвижный шарнир в точке В, заменив его реакцией $\bar{Y}_B$ (рис.18).

Система по-прежнему представляет собой одно твёрдое тело. Так как точка А – неподвижный шарнир, возможное перемещение тела – поворот вокруг точки А.

Уравнение принципа возможных перемещений имеет вид:

$$- P_1 \cdot a \cdot \delta\varphi - P_3 \cdot a \cdot \delta\varphi - P_2 \cdot 2a \cdot \delta\varphi + Y_B \cdot 3a \cdot \delta\varphi = 0.$$

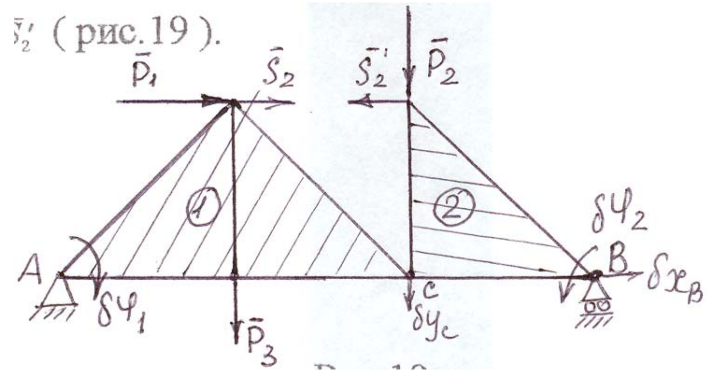
Приравниваем к нулю коэффициент при $\delta\varphi$:

$- P_1 - P_3 - 2P_2 + Y_B \cdot 3 = 0.$

Отсюда $Y_B = \dfrac{P_1 + P_3 + 2P_2}{3}$.

Рассмотрим нахождение усилий во внешних стержнях фермы (внешние стержни - это стержни, образующие внешний контур фермы).

Найдём S_2.



1) заменяем стержень 2 двумя реакциями $\bar{S}_2$ и $\bar{S}_2'$, причем $\bar{S}_2 = -\bar{S}_2'$ (рис 19);.

2) система состоит из двух твёрдых тел 1 и 2;.

3) придаём системе возможное перемещение. М.ц.с. тела 1 находится в точке А. Следовательно, возможное перемещение тела 1 - поворот на угол $\delta\varphi_1$ вокруг точки А. М.ц.с. тела 2 строим, зная направления возможных перемещений двух точек тела 2 (точек В и С).

Возможное перемещение точки В параллельно плоскости катков, а возможное перемещение точки С - перпендикулярно радиусу вращения АС и направлено в сторону вращения АС.. Проводим перпендикуляры к направлениям возможных перемещений в точках С и В . Получаем, что м.ц.с. тела 2 будет в точке В. Следовательно, возможное перемещение тела 2 - поворот вокруг точки В на угол $\delta\varphi_2$ в сторону движения точки С.

4) записываем принцип возможных перемещений, т.е. составляем уравнение

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k^{(a)} = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k^{(a)} = P_1 \cdot a\delta\varphi_1 + S_2 \cdot a\delta\varphi_1 + P_3 \cdot a\delta\varphi_1 + \bar{S}_2' \cdot a\delta\varphi_2 + P_2 \cdot a\delta\varphi_2 = 0.;$$

5) выразим $\delta\varphi_2$ через $\delta\varphi_1$. Для этого рассмотрим возможное перемещение точки С. Рассуждая, как в предыдущих примерах, получим:

:

AC· $\delta\varphi_1$ = CB; AC = 2a; CB = a.;

$2a\delta\varphi_1 = a\delta\varphi_2$; $\delta\varphi_2 = 2\delta\varphi_1$

6) окончательно получим:

$P_1 \cdot a\delta\varphi_1 + S_2 \cdot a\delta\varphi_1 + P_3 \cdot a\delta\varphi_1 + S_2 \cdot a \cdot 2\delta\varphi_1 + P_2 \cdot a \cdot 2\delta\varphi_1 = 0$;

$a\delta\varphi_1 \cdot (P_1 + 3S_2 + P_3 + 2P_2) = 0$;

$(P_1 + 3S_2 + P_3 + 2P_2) = 0$.

Так как $a \neq 0$; $\delta\varphi_1 \neq 0$; то $S_2 = -\dfrac{P_1 + 2P_2 + P_3}{3}$.

Найдём S_4.

1) заменяем стержень 4 двумя реакциями $\overline{S}_4$ и $\overline{S}'_4$, причём $\overline{S}_4 = -\overline{S}'_4$, (рис.20).

2) система состоит из двух твёрдых тел 1 и 2.

3) придаём системе возможное перемещение. М.Ц.С. тела 1 в точке А. Следовательно, возможное перемещение тела 1 поворот вокруг точки А на угол $\delta\varphi_1$. М.ц.с. тела 2 строим, зная направления возможных перемещений двух точек тела 2 (точек B и D).

Возможное перемещение точки B параллельно плоскости катков, возможное перемещение точки D перпендикулярно радиусу AD .

Проводим перпендикуляры к возможным перемещениям в точках D и B и получаем, что м.ц.с. тела 2 будет в точке К. Следовательно, возможное перемещение тела 2 - поворот вокруг точки К на угол $\delta\varphi_2$ в сторону перемещения точки D.

4) записываем принцип возможных перемещений, т.е. составляем уравнение:

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k^{(a)} = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k^{(a)} = - P_1 \cdot a\delta\varphi_1 - P_3 \cdot a\delta\varphi_1 - P_2 \cdot 2a\delta\varphi_1 + \overline{S}'_4 \cdot \frac{3}{2} \cdot a\delta\varphi_2 = 0.$$

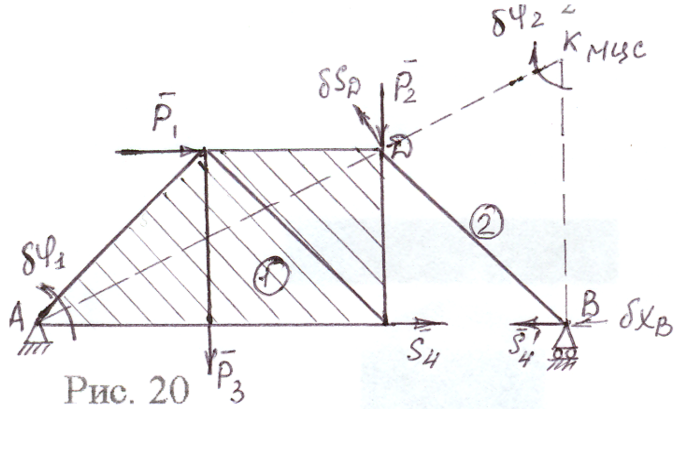


Рис. 20

При нахождении работы силы $\overline{P}_2$ мы отнесли эту силу к телу 1, её можно было бы отнести к телу 2.

5) выразим $\delta\varphi_2$ через $\delta\varphi_1$. Рассуждая, как в предыдущих примерах, получим

$AD\ \delta\varphi_1 = DK\ \delta\varphi_2$; $\qquad AD = 2DK$;

$2DK\ \delta\varphi_1 = DK\ \delta\varphi_2$; $\qquad \delta\varphi_2 = 2\ \delta\varphi_1$.

6) окончательно будем иметь

$$- P_1 \cdot a\delta\varphi_1 - P_3 \cdot a\delta\varphi_1 - P_2 \cdot 2a \cdot \delta\varphi_1 + S_4 \cdot \frac{3}{2} \cdot a\delta\varphi_2 = 0.$$

$$- P_1 - P_3 - 2P_2 + 3S_2 = 0$$

Так как $a \neq 0$; $\delta\varphi_1 \neq 0$; то $\qquad S_4 = \dfrac{P_1 + 2P_2 + P_3}{3}$.

Нахождение усилий во внутренних стержнях фермы

Внутренние стержни – стержни, расположенные внутри контура фермы.

Найдем S_6.

1) заменяем стержень 8 двумя реакциями $\overline{S}_8\ и\ \overline{S}'_8$, причём $\overline{S}_8 = -\overline{S}'_8$, (рис.21)

3) система состоит из четырех твердых тел 1,2,3,4.

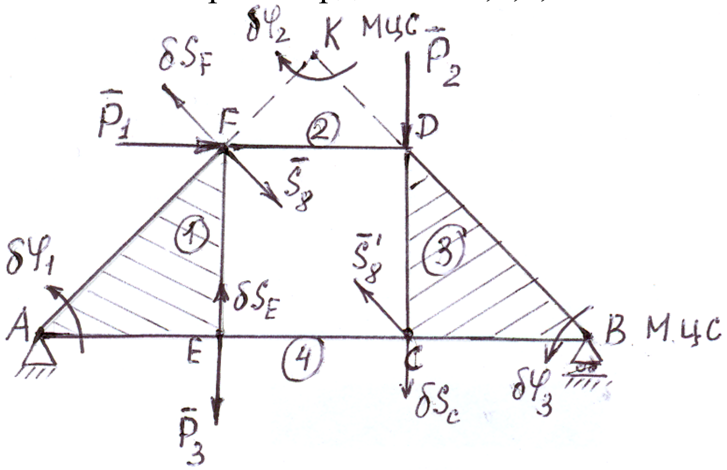


Рис.21

4)

3) Придаем системе возможное перемещение. М.ц.с. тела 1- точка А. Следовательно, возможное перемещение тела 1 - поворот вокруг точки А на угол $\delta\varphi_1$.Находим м.ц.с. других трех тел. Возможное перемещение точки Е направлено перпендикулярно АЕ. Тогда на основании теоремы о проекциях скоростей двух точек тела на прямую, их соединяющую, получаем.

$пр_{EC}\delta S_E = пр_{EC}\ \delta S_C \rightarrow \delta S_C \perp EC$

Это позволяет построить м.ц.с. тела 3.0н будет в точке В. Следовательно, возможное перемещение тела 3 - поворот вокруг точки В на угол $\delta\varphi_3$.(в какую сторону - определим ниже).Теперь строим м.ц.с. тела 2. Он попадает в точку К.

Следовательно, возможное перемещение тела 2 - поворот вокруг точки К на угол $\delta\varphi_2$ в сторону движения точки F. Точка D будет двигаться в сторону, куда будет вращаться тело 2. Так как точка D принадлежит и телу 3, то направление ее движения определяет направление вращения тела 3, т.е. направление $\delta\varphi_3$. М.ц.с. тела 4 можно не строить.

4) записываем принцип возможных перемещений, т .е. составляем уравнение

$$\sum_{k=1}^{n}\delta A_k^{(a)} = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n}\delta A_k^{(a)} = -P_1 \cdot a\delta\varphi_1 - S_8 \cdot a\sqrt{2}\cdot\delta\varphi_1 - P_3\cdot a\delta\varphi_1 + P_3\cdot a\delta\varphi_1 + P_2\cdot\frac{a}{2}\cdot\delta\varphi_2 - \bar{S}_8'\cdot\cos 45^\circ a\delta\varphi_3 = 0.$$

5) выразим $\delta\varphi_1$ и $\delta\varphi_3$ через $\delta\varphi_2$. Для этого рассматриваем возможные перемещения точек F и D.

Рассмотрим возможные перемещения точки Р. Эта точка – общая для тел 1 и 2, поэтому $\delta S_F = AF\cdot\delta\varphi_1$, когда точка F отнесена к телу 1, и $\delta S_F = KF\cdot\delta\varphi_2$, если точка F отнесена к телу 2. Отсюда:

$AF\cdot\delta\varphi_1 = KF\cdot\delta\varphi_2$

Рассматривая возможные перемещения точки D, находим:

$BD\cdot\delta\varphi_3 = KD\cdot\delta\varphi_2$

6) тогда

$$-P_1\cdot a\cdot\frac{1}{2}\delta\varphi_2 - S_8\cdot a\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\delta\varphi_2 - P_3\cdot a\cdot\frac{1}{2}\delta\varphi_2 + P_2\cdot\frac{a}{2}\delta\varphi_2 - S_8\cdot\frac{a\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\delta\varphi_2 = 0;$$

$$a\delta\varphi_2\cdot\left(-\frac{1}{2}P_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}S_8 - \frac{1}{2}P_3 + \frac{1}{2}P_2 - \frac{\sqrt{2}}{4}S_8\right) = 0.$$

Так как $a \neq 0$; $\delta\varphi_1 \neq 0$; то

$$-\frac{1}{2}P_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}S_8 - \frac{1}{2}P_3 + \frac{1}{2}P_2 - \frac{\sqrt{2}}{4}S_8 = 0.$$

Отсюда находим S_8.

Рассмотрим ещё один способ определения усилий во внутренних стержнях фермы.

Во всех предыдущих примерах система в результате замены одной связи имела одну степень свободы, т.е. имела одно независимое возможное перемещение

Теперь для определения усилия во внутреннем стержне заменим не только стержень (например, стержень 8) реакциями $\bar{S}_8\, u\, \bar{S}_8'$, но и заменим подвижный шарнир в точке В реакцией $\bar{Y}_B$. Тогда система приобретает две степени свободы, т.е. имеет два независимых возможных перемещения. Так как возможные перемещения независимы, то если мы наложим какое-то условие на одно из них, это не отразится на другом. Накладываемое условие: положим одно возможное перемещение равным нулю, т.е. наложим ограничение на возможное перемещение системы так, чтобы она имела одну степень свободы. Это можно сделать следующим образом: поставить подвижный шарнир на то твердое тело фермы, где уже есть неподвижный шарнир (в данном случае на тело 1). Тогда это тело не будет иметь возможности двигаться, а возможные перемещения других тел легко определятся.

В этом случае реакция $\overline{Y}_B$ должна быть предварительно найдена.

Итак, найдём $\overline{S}_8$ (рис.22)..

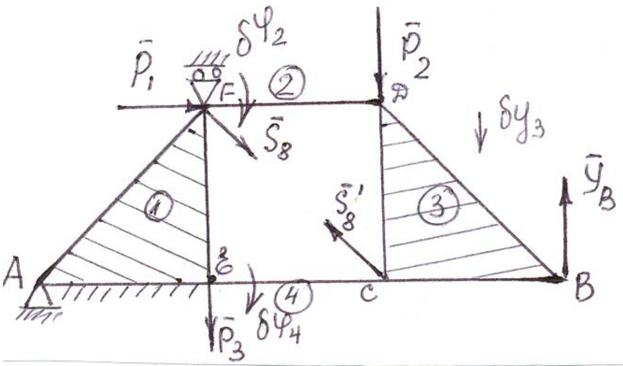


Рис.22

1) заменяем стержень 8 двумя реакциями $\overline{S}_8 \, u \, \overline{S}'_8$, причём $\overline{S}_8 = -\overline{S}'_8$; заменяем связь в точке В реакцией $\overline{Y}_B$.

При этом $\overline{Y}_B = \dfrac{P_1 + 2P_2 + P_3}{3}$.

2) система состоит из четырёх тел 1, 2, 3, 4.

3) система имеет две степени свободы.

Проводим рассуждения, приведённые выше, т.е. ставим подвижный шарнир на тело 1 (например, в точке F). Тогда тело 1 - неподвижно. Придаём остальной части системы возможное перемещение, т.е. находим м.ц.с тел 2, 3, 4. Тело 2 имеет м.ц.с. в точке F, так как эта точка неподвижна. Следовательно, возможное перемещение тела 2 - поворот вокруг точки F на угол $\delta\varphi_2$ (направление вращения выбираем произвольно). Тело 4 имеет м.ц.с в точке E. Следовательно, возможное перемещение тела 4 – поворот вокруг точки E (направление вращения определим ниже). М.ц.с.. тела 3 отсутствует, Т.к. возможные перемещения двух точек этого тела D и C параллельны, то. тело 3 движется поступательно в сторону перемещения точки D. Следовательно, возможное перемещение тела 3 – δy_3.и тело 4 поворачивается в ту же сторону, что и тело2.

4) записываем принцип возможных перемещений, т.е составляем уравнение

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k^{(a)} = 0.$$

$$\sum_{k=1}^{n} \delta A_k^{(a)} = P_2 \cdot \delta y_3 - \overline{S}'_8 \cdot \cos 45^\circ \, \delta y_3 - \overline{Y}_B \delta y_3 = 0.$$

Силы $\overline{P}_2, \overline{S}_S, \overline{Y}_B$ считаем приложенными к телу 3.

5) в уравнение входит одно возможное перемещение.

6) получим:

$\delta y_3 \cdot (P_2 - \overline{S}'_8 \cdot \cos 45^\circ - \overline{Y}_B) = 0.$

Т.к. $\delta y_3 \neq 0$, то

$P_2 - \overline{S}'_8 \cdot \cos 45^\circ - \overline{Y}_B = 0.$

$$P_2 - \overline{S}'_8 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{P_1 + 2P_2 + P_3}{3} = 0.$$

Отсюда $\bar{S}_8' = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot (P_2 - P_1 - P_3)$.

Этот способ нахождения усилий во внутренних стержнях фермы рекомендуется применять тогда, когда возникают затруднения в определении возможных перемещений твёрдых тел, из которых будет состоять ферма (после замены внутреннего стержня реакциями).

Расчётно-графические задания

Определение реакций опор и усилий в стержнях плоской фермы

Найти реакции опор фермы от заданной нагрузки, а также усилия во всех стержнях различными способами. Схемы ферм показаны на рис.23-25. Необходимые для расчёта данные приведены в таблице 2.

Номер варианта в табл.2 выбирается по последней цифре номера зачетки, номер рисунка - по последним двум цифрам номера зачетки.

Если две последние цифры больше числа 30,то из этого числа вычесть 30 один, два или три раза, чтобы осталось число, не большее 30. Например, если две последние цифры зачетки - 17,то номер рисунка 17;если две последние цифры - 57,то номер рисунка - 27 (57-30=27).

Таблица 2

№ варианта	P1 ,кН	P2,кН	P3,кН	a, м	h, м
1	50	60	100	2,4	3,0
2	60	80	]20	3,0	3,6
3	80	100	50	3,6	4,0
4	100	120	60	4,0	4,2
5	120	50	80	4,2	3,0
6	100	100	60	3,0	3,0
7	80	80	120	3,0	4,0
8	60	60	120	4,2	4,0
9	50	100	100	4,0	3,6
0	100	50	50	3,5	4,0

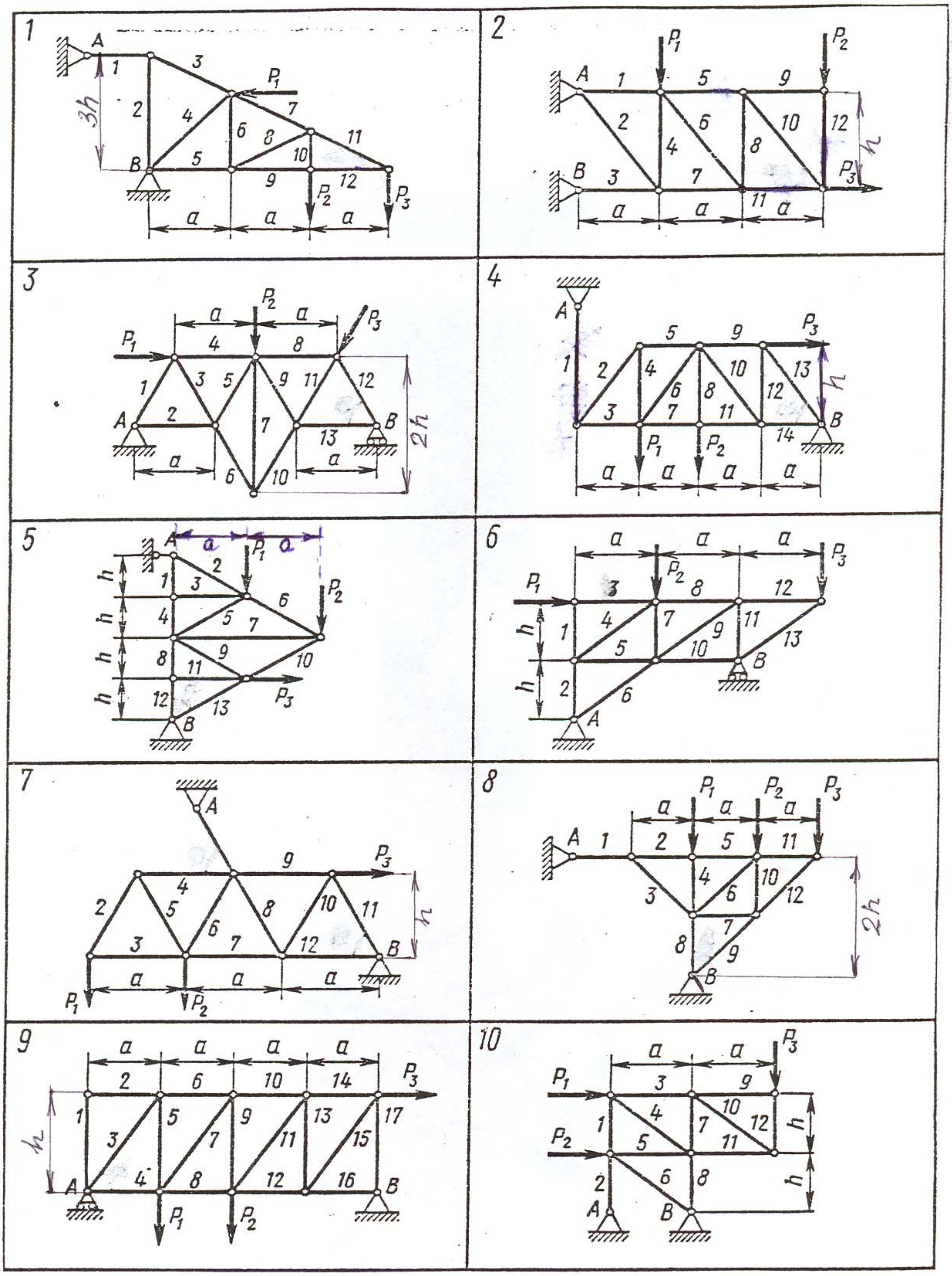

1
A
B
3h
P_1
P_2
P_3
a a a
2
A
B
P_1
P_2
P_3
h
a a a
3
A
B
P_1
P_2
P_3
2h
a a a a
4
A
B
P_1
P_2
P_3
h
a a a a
5
A
B
P_1
P_2
P_3
h h h h
a a
6
A
B
P_1
P_2
P_3
h h
a a a
7
A
B
P_1
P_2
P_3
h
a a a
8
A
B
P_1
P_2
P_3
2h
a a a
9
A
B
P_1
P_2
P_3
h
a a a a
10
A
B
P_1
P_2
P_3
h h
a a

Рис. 23

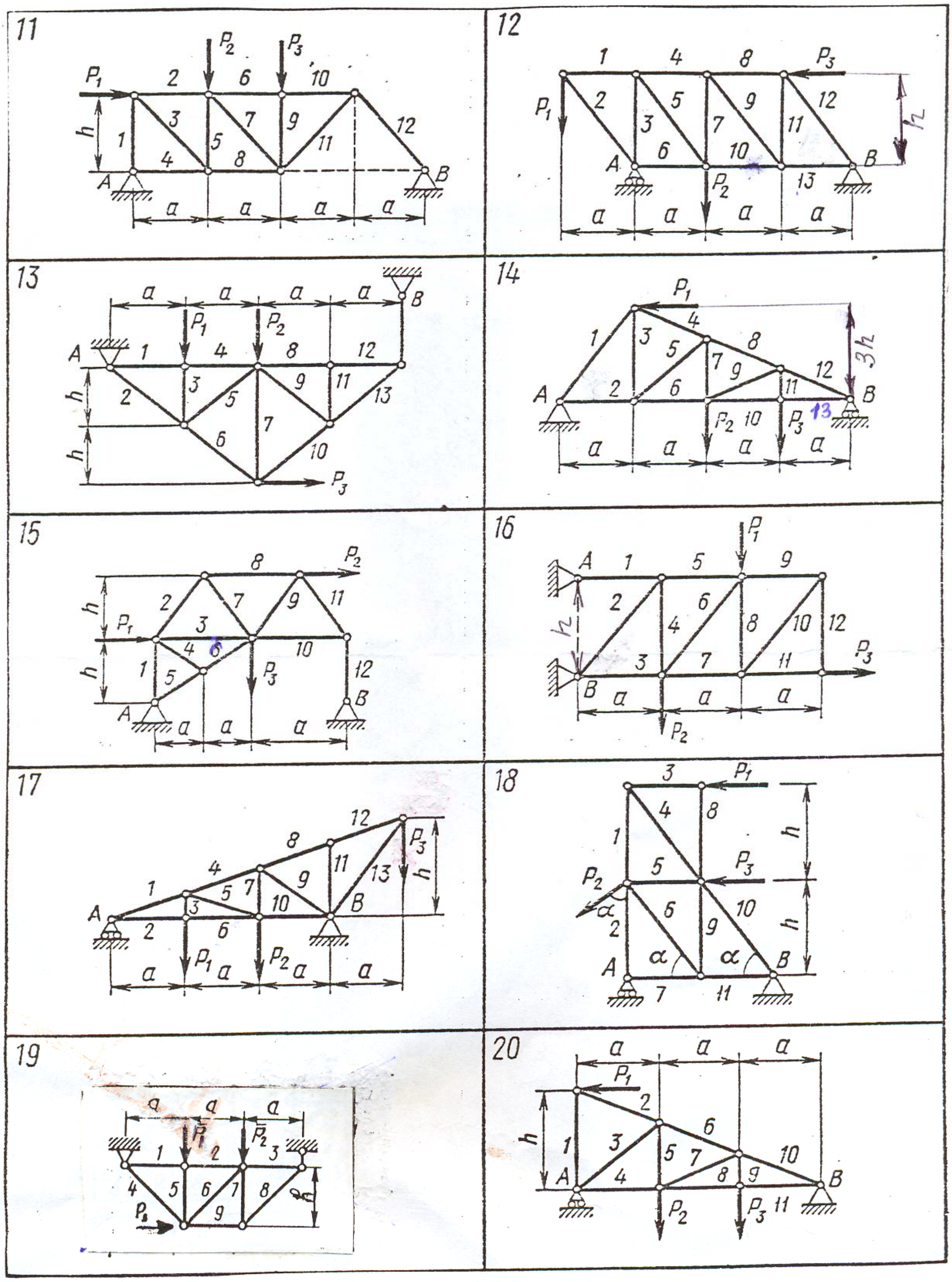

11
P_1 P_2 P_3 A B h a a a a
12
P_1 P_2 P_3 A B h a a a a
13
P_1 P_2 P_3 A B h h a a a a
14
P_1 P_2 P_3 A B 3h a a a a
15
P_1 P_2 P_3 A B h h a a a
16
P_1 P_2 P_3 A B h a a a
17
P_1 P_2 P_3 A B h a a a a
18
P_1 P_2 P_3 A B h h α α α
19
P_1 P_2 P_3 a a a h
20
P_1 P_2 P_3 A B h a a a

Рис. 24

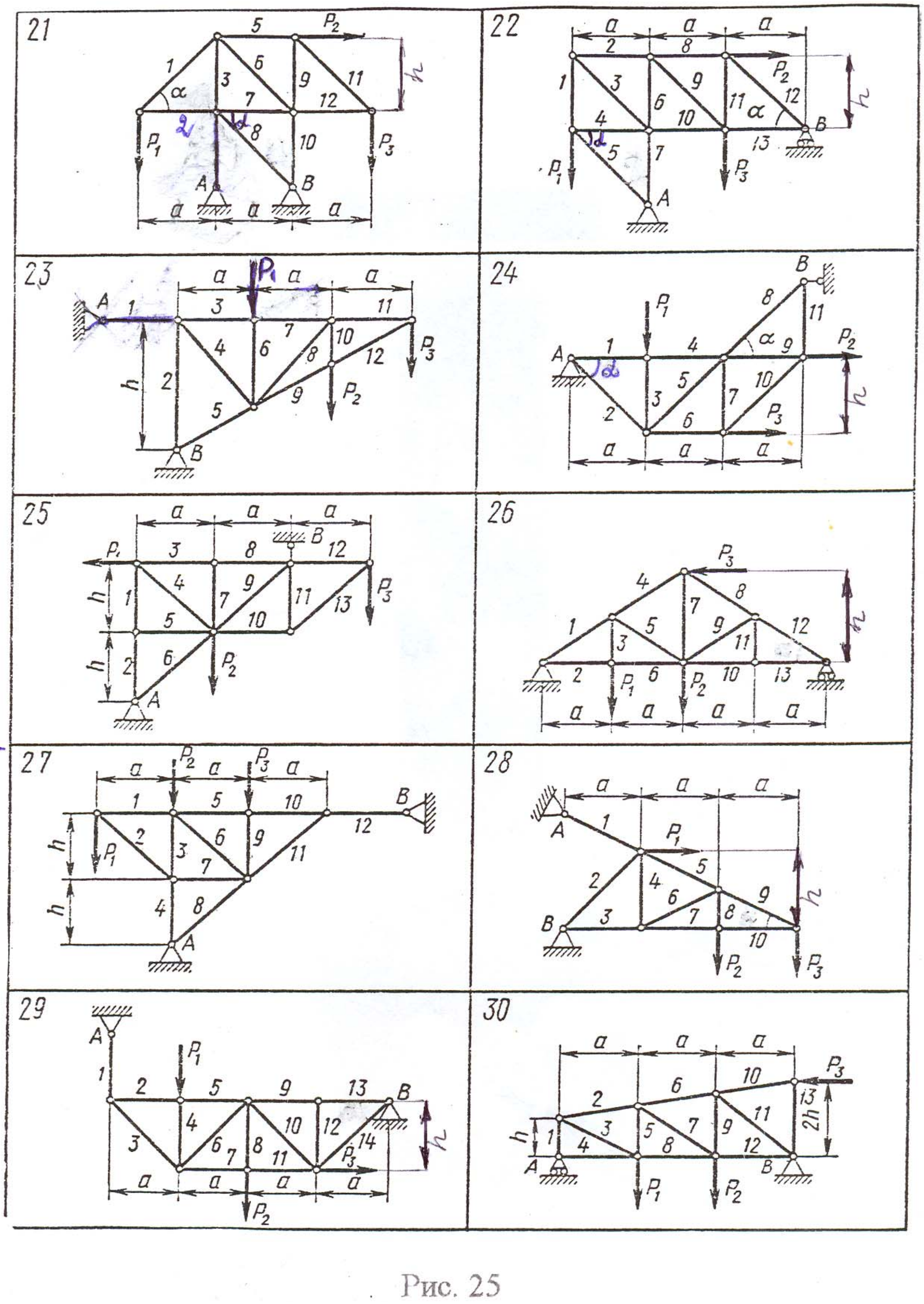


Рис. 25