Министерство образования и науки РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Ростовский государственный строительный университет»

Утверждено на заседании
кафедры технической механики
6 мая 2011 г.

Методические указания
на тему:«Общие принципы динамики»

Ростов-на-Дону
2012

УДК 531.01
Методические указания на тему:«Общие принципы динамики». – Ростов-на-Дону: Рост. гос. строит. ун - т, 2012. – 24 с.

Рассматривается вторая часть курса динамики, общие принципы динамики. Курс изложен чрезвычайно сжато, но содержит основные сведения из соответствующих разделов курса теоретической механики, преподаваемого студентам строительных специальностей.
УДК 531.01

Составители: доц. М.Ю. Ремизов
доц. Е.Б. Русакова
доц. С.И. Углич

Рецензент: доц. Т.В. Виленская

Редактор Н.Е. Гладких
Темплан 2012 г., поз. 62

Подписано в печать 17.01.12. Формат 60×84 1/16.
Ризограф. Бумага писчая. Уч.-изд.л. 1,4.
Тираж 100 экз. Заказ 48/12

Редакционно-издательский центр РГСУ
344022, Ростов-на-Дону, ул. Социалистическая, 162

Общие принципы динамики

Классификация связей

Рассмотрим механическую систему, состоящую из n материальных точек с массой m_i и координатами x_i, y_i, z_i. Здесь $i=1, 2, ...,n$. Аналитически связи, наложенные на систему, могут быть выражены в виде соотношений:

$$f_j(x_i, y_i, z_i, \dot{x}_i, \dot{y}_i, \dot{z}_i, t) \geq 0.$$

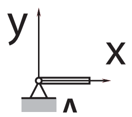
На систему наложено k связей, $j=1, 2, ...,k$.

Если в выражениях связей всюду стоит знак «=», то связи называются *удерживающими*, в противном случае – *неудерживающими*.

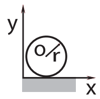
Если связи не зависят явно от времени, то они называются *стационарными*.

Если связи не зависят от скоростей, то есть от производных координат по времени, или эти зависимости могут быть проинтегрированы, то они называются *геометрическими* или *голономными*. В противном случае их называют *неголономными*.

Примеры связей:



Неподвижный шарнир. Аналитическое выражение связей: $x_A=0$; $y_A=0$. Связи удерживающие, стационарные, голономные.



Диск радиуса r с центром в точке O находится в контакте с поверхностью. Аналитическое выражение связи: $y_c=r$. Связь удерживающая, стационарная, голономная. Если диск может покинуть поверхность, то выражение связи следующее: $y_c \geq r$ связь неудерживающая, стационарная, голономная.

Принцип Даламбера

Рассмотрим точку с массой m и ускорением $\overline{a}$.

Назовём силой инерции, действующей на точку, выражение

$$\overline{F}^{ин} = -m\overline{a}.$$

Второй закон Ньютона для точки можно представить в виде:

$$m\overline{a} = \overline{F} \Rightarrow \overline{F} - m\overline{a} = 0 \Rightarrow \overline{F} + \overline{F}^{ин} = 0.$$

Последнее равенство можно трактовать как условие равновесия для точки, на которую кроме обычных сил, действует еще и сила инерции. Аналогично можно рассуждать и в случае механической системы. В результате можно сформулировать принцип Даламбера для системы: *если в любой момент времени к каждой из точек системы кроме действующих на нее внешних и внутренних сил присоединить соответствующие силы инерции, то полученная система сил будет уравновешенной и к ней можно применять все уравнения статики.*

С точки зрения методики решения задач принцип Даламбера позволяет свести решение задач динамики к решению задач статики. Однако необходимо научиться прикладывать силы инерции. Для точки сила инерции задается определением. Рассмотрим движение твердого тела. Наша задача состоит в том, чтобы определить, к чему сводится система сил инерции в простых случаях: – поступательном, вращательном и плоском движениях твердого тела.

Начнем с плоского движения твердого тела.

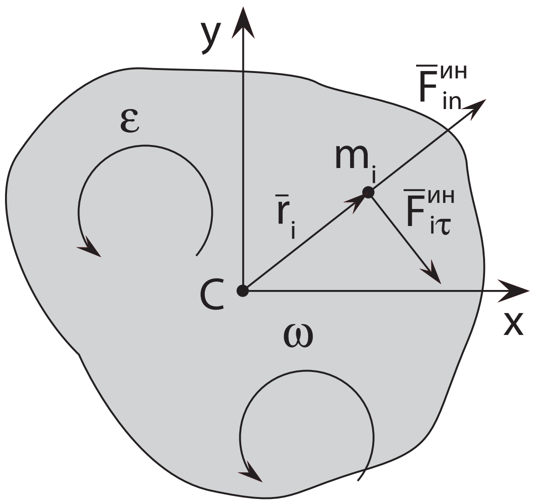


Рис.1

Рассматриваем движение плоской фигуры, изображенной на рис.1. Здесь С – центр масс фигуры; $\bar{r}_i$ – радиус вектор i - й точки фигуры относительно точки С; m_i – ее масса; $\bar{F}^{ин}_{in}$ – сила инерции, соответствующая нормальному ускорению i - й точки при ее вращении относительно полюса С; $\bar{F}^{ин}_{i\tau}$ – сила инерции, соответствующая касательному ускорению i - й точки при ее вращении относительно полюса С. Ускорение i - й точки фигуры может быть выражено следующим образом:

$$\bar{a}_i = \bar{a}_c + \bar{a}_{ic}^{\tau} + \bar{a}_{ic}^{n}.$$

Сила инерции может быть представлена в виде:

$$\bar{F}_i^{ин} = -m_i \cdot \bar{a}_i = -m_i \cdot \bar{a}_c - m_i \cdot \bar{a}_{ic}^{\tau} - m_i \cdot \bar{a}_{ic}^{n}.$$

Найдем главный вектор и главный момент сил инерции относительно центра масс фигуры С. Выше была получена формула для силы инерции, действующей на i-ю точку системы.

$$\bar{R}^{\text{ин}} = -\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \bar{a}_i = -\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \bar{a}_c - \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \bar{a}_{ic}^{\tau} - \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \bar{a}_{ic}^{n}.$$

Выразим касательное и нормальное ускорение при вращении i - й точки относительно центра С.

$$\bar{a}_{ic}^{\tau} = \bar{\varepsilon} \times \bar{r}_i; \;\; \bar{a}_{ic}^{n} = -\omega^2 \cdot \bar{r}_i.$$

Продолжим работу с выражением главного вектора сил инерции.

$$\bar{R}^{\text{ин}} = -\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right) \cdot \bar{a}_c - \bar{\varepsilon} \times \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \bar{r}_i + \omega^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \bar{r}_i \;.$$

$\sum_{i=1}^{n} m_i = M,$ – сумма масс всех точек системы равна массе системы М.

$\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot \bar{r}_i = M \cdot \bar{r}_c = \bar{0},$ – это следует из определения центра масс и выбора системы отсчета.

Окончательно получим:

$$\bar{R}^{\text{ин}} = -M \cdot \bar{a}_{c}.$$

Вычислим момент сил инерции относительно центра масс фигуры С. Выразим проекции векторов на оси x и y:

$$\bar{r}_i = (x_i, y_i); \; \bar{a}_c = \left(a_{cx}, a_{cy}\right).$$

Сила инерции, действующая на i-ю точку, состоит из трех слагаемых. Рассмотрим вначале силы инерции, связанные с ускорением тоски С.

$$M_{c1} = -\sum_{i=1}^{n} M_c(m_i \cdot \bar{a}_c) = -\sum_{i=1}^{n} m_i(\, a_{cy} \cdot x_i - a_{cx} \cdot y_i) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n} m_i \, a_{cy} \cdot x_i + \sum_{i=1}^{n} m_i a_{cx} \cdot y_i = -a_{cy} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot x_i + a_{cx} \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot y_i.$$

Рассмотрим полученное выражение. Из определения центра масс следует:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \cdot x_i = Mx_c = 0; \ \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot y_i = My_c = 0.$$

Таким образом силы инерции, связанные с ускорением точки С, дают нулевой момент относительно этой точки.

Как видно из рисунка, силы инерции, связанные с нормальными ускорениями при вращении относительно центра С дают нулевые моменты.

Вычислим сумму моментов сил инерции, связанных с касательными ускорениями при вращении относительно центра С.

$$M_{c3} = -\sum_{i=1}^{n} F_{i\tau}^{\text{ин}} \cdot r_i = -\sum_{i=1}^{n} m_i \varepsilon \cdot r_i \cdot r_i = -\varepsilon \cdot \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot r_i^2 = -J_c \cdot \varepsilon.$$

Таким образом, система сил инерции, действующая на тело в плоском движении, приводится к одной силе $\bar{R}^{\text{ин}} = -M \cdot \bar{a}_c$, приложенной в центре масс и равной , и одной паре, равной $M_c^{\text{ин}} = -J_c \cdot \varepsilon$.

Рассмотрим случай поступательного движения твердого тела. Очевидно, что можно использовать полученные выше результаты, приняв угловое ускорение ε равным нулю. Таким образом, в случае поступательного движения твердого тела система сил инерции приводится к одной силе, приложенной к центру масс тела и равной $\overline{F}^{ин} = - M\,\overline{a}_c$.

Рассмотрим случай вращательного движения твердого тела относительно оси, проходящей через центр масс тела. Так как в этом случае ускорение центра масс равно нулю, то система сил инерции приводится к одной паре, $M^{ин} = - J_c\varepsilon$.

Пример. Динамические реакции при вращательном движении твердого тела.

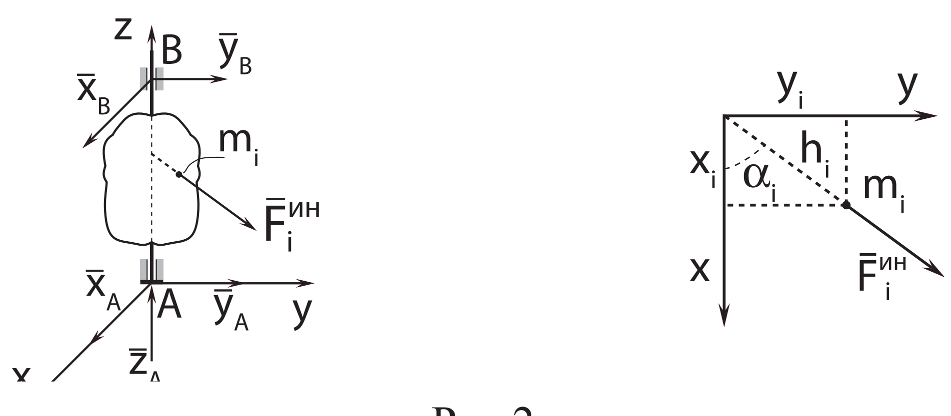


Рис.2

Рассмотрим твердое тело, которое вращается с постоянной угловой скоростью ω относительно вертикальной оси z. В точке А тело закреплено цилиндрическим шарниром с подпятником, а в точке В – цилиндрическим шарниром. Тело представляем как множество материальных точек. Пусть i-я точка тела имеет массу m_i, а ее координаты – (x_i, y_i, z_i). Здесь i = 1, 2, ...,n.

Необходимо определить динамические опорные реакции. Отметим, что при определении динамических опорных реакций учитываются только силы инерции, силами веса пренебрегают.

Применим к системе принцип Даламбера. К каждой точке тела приложим силы инерции. На рис.2 показана сила инерции, действующая на i-ю точку. Приложены также силы реакций в точках А и В.

$F^{ин}_i = m_i\omega^2 h_i$. Выразим проекции этой силы на оси x и y:

$F^{ин}_{ix} = m_i\omega^2 h_i cos\alpha_i = m_i\omega^2 x_i$;

$F^{ин}_{iy} = m_i\omega^2 h_i sin\alpha_i = m_i\omega^2 y_i$.

В соответствии с принципом Даламбера для тела можно записать уравнения равновесия статики.

$$\sum m_{xi} = -y_B \cdot AB - \sum_{i=1}^{n} F_{iy}^{\text{ин}} \cdot z_i = 0.$$

Отсюда: $$y_B \cdot AB + \omega^2 \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot y_i z_i = 0.$$

Обозначим $$J_{yz} = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot y_i z_i.$$

Отсюда $$y_B = -\frac{\omega^2}{AB} \cdot J_{yz}.$$

Составим сумму проекций всех сил на ось y.

$$\sum y_i = y_A + y_B + \sum_{i=1}^{n} F_{iy}^{\text{ин}} = 0.$$

Отсюда $$y_A = -y_B - \omega^2 \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot y_i.$$

Окончательно получим $$y_A = \omega^2 \cdot \left(\frac{J_{yz}}{AB} - My_C\right).$$

Здесь М – масса тела; y_C – координата центра масс по оси y.

Составим сумму моментов всех сил относительно оси y.

$$\sum m_{yi} = x_B \cdot AB + \sum_{i=1}^{n} F_{ix}^{\text{ин}} \cdot z_i = 0.$$

Отсюда $$x_B \cdot AB + \omega^2 \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot x_i z_i = 0.$$

Обозначим $$J_{xz} = \sum_{i=1}^{n} m_i \cdot x_i z_i.$$

Выразим x_B $$x_B = -\frac{\omega^2}{AB} \cdot J_{xz}.$$

Составим сумму проекций всех сил на ось x.

$$\sum x_i = x_A + x_B + \sum_{i=1}^{n} F_{ix}^{\text{ин}} = 0.$$

Отсюда $$x_A = -x_B - \omega^2 \sum_{i=1}^{n} m_i x_i.$$

Окончательно получим $x_A = \omega^2 \cdot \left(\frac{J_{xz}}{AB} - M x_C\right).$

Здесь x_C – координата центра масс в проекции на ось x.

Составив сумму проекций всех сил на ось z, получим $z_A=0$.

Интересно выяснить при каких условиях динамические опорные реакции обращаются в нуль. Этот вопрос очень актуален для механизмов, имеющих детали, вращающиеся с большой скоростью, например турбины, коленчатые валы и т.д.

Очевидно, что если $J_{xz}=J_{yz}=0$ и $x_C = y_C =0,$ то опорные реакции обращаются в нуль.

Величины J_{xz}, J_{yz} характеризуют распределение масс в теле и зависят от выбора формы тела.

Принцип возможных перемещений

Введем несколько новых понятий.

Возможным перемещением механической системы будем называть любую совокупность элементарных перемещений точек этой системы из занимаемого в данный момент времени положения, которые допускаются всеми наложенными на систему связями.

Обратим внимание на следующие обстоятельства:

– имеются в виду бесконечно малые перемещения;

– возможные перемещения никак не связаны с силами, действующими на систему, а определяются только связями, наложенными на систему.

Примеры

Рис.3

На рис.3 слева изображен неподвижный шарнир. Возможное перемещение для такой связи – поворот относительно точки A на угол $\delta\varphi$. Справа изображен подвижный шарнир. Возможные перемещения, допускаемые этой связью, горизонтальное перемещение δs и поворот $\delta\varphi$.

Связь называется идеальной, если силы реакций этой связи не совершают работ на возможных перемещениях, допускаемых этой связью.

Отметим, что большинство связей, с которыми мы имели дело в курсе механики – идеальны.

Разделим силы, действующие на систему, на *активные* и *пассивные* силы. Пассивные силы появляются в результате действия активных сил. К активным относятся все внешние силы, действующие на систему. К пассивным относятся силы реакций, действующие в системе.

Принцип возможных перемещений: *для равновесия механической системы с идеальными связями необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех действующих на нее активных сил при любом возможном перемещении системы была равна нулю.*

Доказательство. Начнем с необходимости. Пусть механическая система с идеальными связями находится в равновесии, докажем, что в этом случае сумма работ активных сил на возможных перемещениях равна нулю.

Для i - й точки системы выполняются условия равновесия.

$$\overline{F}^a_i + \overline{F}^p_i = \overline{0} .$$

Здесь $\overline{F}^a_i$ – равнодействующая активных сил, приложенных к i - й точке, а $\overline{F}^p_i$ – равнодействующая пассивных сил. Пусть $\delta\overline{r}_i$ – возможное перемещение i - й точки. Умножим скалярно уравнение равновесия точки на возможное перемещение.

$$\overline{F}^a_i \cdot \delta\overline{r}_i + \overline{F}^p_i \cdot \delta\overline{r}_i = 0$$

или
$$\delta A^a_i + \delta A^p_i = 0.$$

Здесь δA^a_i – работа активных сил, приложенных к i - й точке на возможном перемещении; δA^p_i – работа пассивных сил, приложенных к i - й точке на возможном перемещении.

Но $\delta A^p_i = 0$ в силу идеальности связей. Следовательно, $\delta A^a_i = 0.$

Просуммируем полученное выражение по всем точкам системы.

$$\Sigma\, \delta A^a_i = 0.$$

Итак мы исходили из того, что система находится в равновесии и получили, что сума работ активных сил на возможных перемещениях равна нулю. Необходимость доказана.

Докажем достаточность. Исходим из того, что

$$\Sigma\, \delta A^a_i = 0.$$

Очевидно, что к этому выражению можно добавить выражение, равное нулю.

$$\Sigma\, (\delta A^a_i + \delta A^p_i) = 0;$$

или
$$\Sigma(\overline{F}^a_i \cdot \delta\overline{r}_i + \overline{F}^p_i \cdot \delta\overline{r}_i) = 0.$$

Вынесем общий множитель $\Sigma(\overline{F}^a_i + \overline{F}^p_i) \cdot \delta\overline{r}_i = 0.$

С учетом того, что возможное перемещение $\delta\overline{r}_i$ может выбираться произвольно, из этого равенства можно вывести:

$$\overline{F}^a_i + \overline{F}^p_i = \overline{0}.$$

Последнее соответствует условию равновесия для произвольной точки системы. Таким образом достаточность доказана.

Пример 1

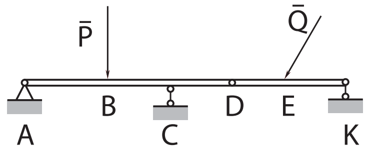


Рис.4

Рассмотрим составную балку ADK, находящуюся в равновесии и нагруженную силами P=2 кН, Q = 4 кН. Сила Q составляет с горизонтом угол 60° (рис.4).

AB = BC = CD = DE = EK = 2 м.

Определить реакцию в шарнире С.

Решение

Заметим, что исходная система, в силу наложенных на нее связей перемещаться не может. Освободимся от связи в точке С и приложим соответствующую реакцию.

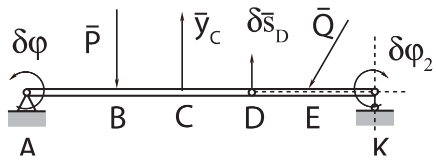


Рис.5

Теперь мы получили механизм, который может перемещаться (рис.5). Стержень AD в точке А закреплен неподвижным шарниром и может совершать вращение относительно точки А. Зададим угол поворота левой части δφ.

Символ δ употребляется, чтобы подчеркнуть, что речь идет о возможных перемещениях, а не о реальных. Математический смысл этой величины, в нашем случае, вполне соответствует обычному дифференциалу.

Заметим, что:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega \Rightarrow d\varphi = \omega \cdot dt;$$

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{V} \Rightarrow d\bar{r} = \bar{V} \cdot dt.$$

То есть бесконечно малые углы поворота пропорциональны угловым скоростям, а бесконечно малые перемещения точек пропорциональны их линейным скоростям. Отсюда можно вывести, что к возможным перемещениям можно применять, в частности теорию плоского движения.

Перемещение точки D направлено по вертикали вверх: $\delta s_D = \delta\varphi \cdot AD$. В точке D связь допускает только перемещения по горизонтали. Проводя перпендикуляры к перемещениям в точках D и K, как показано на чертеже, получим положение мгновенного центра скоростей для стержня AD. Он совпадает с точкой K. Следовательно, правая часть системы совершает поворот относительно точки K на угол $\delta\varphi_2$.

Можно записать $\delta s_D = \delta\varphi_2 \cdot KD \Rightarrow \delta\varphi \cdot AD = \delta\varphi_2 \cdot KD \Rightarrow 6\delta\varphi = 4\delta\varphi_2 \Rightarrow \delta\varphi_2 = 1{,}5\delta\varphi$.

Заметим, что для вычисления работы силы, в случае если сила приложена к телу, совершающему поворот относительно некоторого центра, можно вычислить момент силы относительно этого центра и умножить на угол поворота. В случае, если направления момента силы и угла поворота совпадают, работа берется со знаком плюс, в противном случае – со знаком минус.

Вычислим сумму работ активных сил на возможных перемещениях.

$$\delta A^a = -P \cdot AB \cdot \delta\varphi + y_C \cdot AC \cdot \delta\varphi - Q \cdot \sin 60° \cdot KE \cdot \delta\varphi_2 = 0;$$
$$-P \cdot 2 \cdot \delta\varphi + y_C \cdot 4 \cdot \delta\varphi - Q \cdot \sin 60° \cdot 2 \cdot \delta\varphi_2 = 0;$$
$$-P \cdot 2 \cdot \delta\varphi + y_C \cdot 4 \cdot \delta\varphi - Q \cdot \sin 60° \cdot 2 \cdot 1{,}5 \cdot \delta\varphi = 0;$$
$$-4 + y_C \cdot 4 - 12 \cdot \sin 60° = 0;$$
$$y_C = 3{,}598 \text{ кН}.$$

Задача решена.

Пример 2

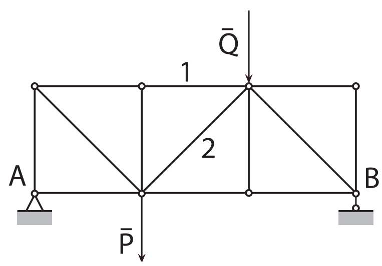


Рис.6

Найти усилия в стержнях 1 и 2 фермы, изображенной на рис.6, если P = 3 кН, Q = 5 кН. Ширина каждого пролета a, высота фермы тоже a. В узловых точках стержни фермы соединены шарнирно.

Решение

Отбросим вначале стержень 1 и приложим соответствующие усилия.

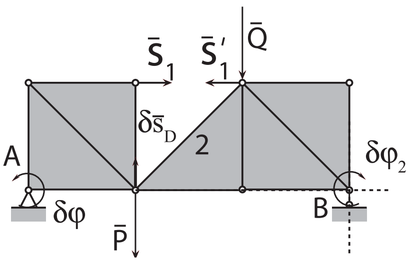


Рис.7

После удаления первого стержня ферма разбилась на две части, шарнирно соединенные между собой. Левая часть фермы в точке А закреплена неподвижным шарниром и, следовательно, может совершать поворот относительно шарнира А. Зададим угол поворота левой части $\delta\varphi$ (рис.7).

Общая точка двух частей перемещается по вертикали вверх, а опора В допускает перемещение в горизонтальном направлении. Проведем перпендикуляры к перемещениям и получим в точке их пересечения мгновенный центр скоростей для правой части. Он совпадает с точкой В. Связь между перемещениями найдем из соотношения

$$a\delta\varphi = 2a\delta\varphi_2 \Rightarrow \delta\varphi_2 = 0{,}5\delta\varphi.$$

Запишем сумму работ активных сил на возможных перемещениях.

$$\delta A^a = -Pa\delta\varphi - s_1\delta\varphi - Qa\delta\varphi_2 - s_1 a\,\delta\varphi_2 = 0,$$

или $$-Pa\delta\varphi - s_1\delta\varphi - Qa0{,}5\delta\varphi - s_1 a0{,}5\,\delta\varphi = 0.$$

Отсюда $$-P - 1{,}5s_1 - Q0{,}5 = 0;$$

$$s_1 = -3{,}667 \text{ кН}.$$

Отбросим теперь стержень 3 и приложим соответствующие реакции (рис.8).

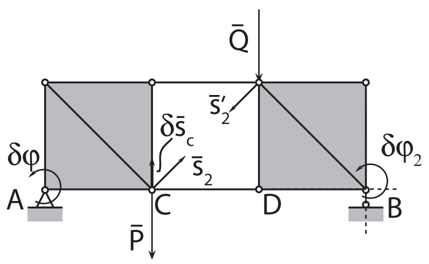


Рис.8

После удаления стержня 3 в нашей системе образовалось 4 тела: левая часть, правая часть и два горизонтальных стержня. Левая часть закреплена неподвижным стержнем и, следовательно может совершать поворот относительно точки А. Зададим угол поворота левой части $\delta\varphi$.

Перемещение точки С будет направлено по вертикали вверх δs_C.

Применим теорему о проекциях скоростей к стержню CD. Теорема была выведена для скоростей, но она применима и для бесконечно малых перемещений. Проекция перемещения точки С на направление стержня CD равна нулю, следовательно проекция, перемещения точки

D на направление стержня тоже равна нулю. Следовательно, в точке D перемещение направлено по вертикали.

Итак, в точке D перемещение направлено по вертикали, а в точке B связь допускает только горизонтальное перемещение. Проводя перпендикуляры к перемещениям в этих точках, получим мгновенный центр скоростей для правой части. Он совпадает с точкой B. Следовательно, правая часть вращается относительно точки B. Пусть угол поворота правой части $\delta\varphi_2$.

Обратим внимание на то, что средняя часть нашей системы это параллелограмм, стороны которого соединены шарнирами. Следовательно, при перемещении стороны этой фигуры остаются параллельны друг другу. Отсюда следует что $\delta\varphi = \delta\varphi_2$.

Выпишем сумму работ активных сил на возможных перемещениях.

$\delta A^a = -P\cdot a\cdot\delta\varphi + s_2\cdot a\cdot\sin45°\cdot\delta\varphi + Q\cdot a\cdot\delta\varphi_2 + s_2\cdot a\cdot\sin45°\cdot\delta\varphi_2 + s_2\cdot a\cdot\sin45°\cdot\delta\varphi_2 = 0.$

Отсюда, учитывая что $\delta\varphi = \delta\varphi_2$, получим:

$$-P + 3\cdot s_2\cdot\sin45° + Q = 0.$$

Окончательно получим $s_2 = (P - Q)/(3\cdot\sin45°) = -0{,}943$ кН.

Задача полностью решена.

Общее уравнение динамики

Если к механической системе применить последовательно принцип Даламбера и принцип возможных перемещений то можно прийти к следующему результату: *при движении механической системы с идеальными связями в каждый момент времени сумма элементарных работ всех приложенных активных сил и всех сил инерции на любом возможном перемещении системы будет равна нулю.*

Этот результат называется общим уравнением динамики или принципом Даламбера - Лагранжа. Аналитически общее уравнение динамики можно записать в виде:

$$\Sigma\delta A^a_i + \Sigma\delta A^{ин}_i = 0.$$

Пример

Система, показанная на рис.9 ниже, состоит из груза весом P_1, блока весом P_2 и диска весом P_3. Блок и диск – однородные сплошные диски радиусов r_2 и r_3 соответственно. Трением можно пренебречь. Блок катится по поверхности без проскальзывания. Определить ускорение груза 1.

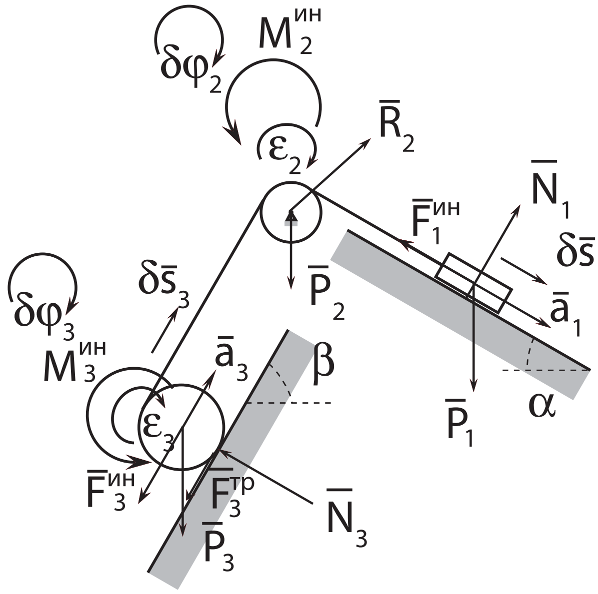


Рис.9

Покажем на рис.9 силы веса, силы реакций N_1, N_3, R_2, а также силу трения, действующую на диск 3. Эта сила трения обязательно есть, так как диск катится без проскальзывания. Покажем ускорение груза 1 a_1, ускорение центра диска a_3, угловые ускорения ε_2 и ε_3. При этом исходим из предположения, что груз 1 движется вдоль наклонной поверхности вниз.

В соответствии с принципом Даламбера, приложим к системе силы инерции. Учтем при этом, что груз 1 совершает поступательное движение, блок 2 – вращательное, а диск 3 – плоское. К грузу 1 приложим силу инерции $F^{ин}{}_1$, к блоку 2 приложим пару сил $M^{ин}{}_2$, а к диску 3 – силу $F^{ин}{}_3$ и пару $M^{ин}{}_3$. Теперь применим к системе принцип возможных перемещений. Пусть перемещение груза 1 – δs_1, поворот блока 2 – $\delta\varphi_2$, перемещение центра диска 3 – δs_3, а его угол поворота – $\delta\varphi_3$. Ввиду сильной загроможденности чертежа, возможные перемещения показаны несколько в стороне от соответствующих тел.

Выпишем сумму работ активных сил и сил инерции на возможных перемещениях.

$$\delta A = P_1 \cdot sin\alpha \cdot \delta s_1 - F_1^{ин} \cdot \delta s_1 - M_2^{ин} \cdot \delta\varphi_2 -$$

$$- P_3 \cdot sin\beta \cdot \delta s_3 - F_3^{ин} \cdot \delta s_3 - M_3^{ин} \cdot \delta\varphi_3 = 0.$$

Найдем кинематические связи. Они одинаковы для скоростей, ускорений и возможных перемещений.

$$V_1 = \omega_2 \cdot r_2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{V_1}{r_2}; \qquad V_3 = \frac{V_1}{2}\ ;\ \omega_3 = \frac{V_1}{2r_3};$$

$$a_1 = \varepsilon_2 \cdot r_2 \Rightarrow \varepsilon_2 = \frac{a_1}{r_2}; \quad a_3 = \frac{a_1}{2}\ ;\ \varepsilon_3 = \frac{a_1}{2r_3};$$

$$\delta s_1 = \delta\varphi_2 \cdot r_2 \Rightarrow \delta\varphi_2 = \frac{\delta s_1}{r_2};\ \delta s_3 = \frac{\delta s_1}{2}\ ;\ \delta\varphi_3 = \frac{\delta s_1}{2r_3}.$$

Запишем теперь выражения для сил инерции и моментов инерциальных сил

$$F_1^{ин} = \frac{P_1}{g} \cdot a_1;\ \ M_2^{ин} = J_2 \cdot \varepsilon_2;\ F_3^{ин} = \frac{P_3}{g} \cdot a_3;\ M_3^{ин} = J_3 \cdot \varepsilon_3;$$

$$J_2 = \frac{P_2 \cdot r_2^2}{2g};\quad J_3 = \frac{P_3 \cdot r_3^2}{2g}\ .$$

Подставляем все полученные выражения в сумму работ

$$\delta A = P \cdot sin\alpha \cdot \delta s_1 - \frac{P_1}{g} \cdot a_1 \cdot\ \delta s_1 - \frac{P_2 \cdot r_2^2}{2g} \cdot \frac{a_1}{r_2}\frac{\delta s_1}{r_2} -$$

$$- P_3 \cdot sin\beta \cdot \frac{\delta s_1}{2} - \frac{P_3}{g} \cdot \frac{a_1}{2} \cdot \frac{\delta s_1}{2} - \frac{P_3 \cdot r_3^2}{2g} \cdot \frac{a_1}{2r_3} \cdot \frac{\delta s_1}{2r_3} = 0.$$

Это выражение можно сократить на δs_1. После некоторых преобразований получим.

$$P_1 \cdot sin\alpha - \frac{P_1}{g} \cdot a_1 - \frac{P_2}{2g} \cdot a_1 - P_3 \cdot sin\beta \cdot \frac{1}{2} -$$

$$- \frac{P_3}{g} \cdot \frac{a_1}{4} - \frac{P_3}{8g} \cdot a_1 = 0.$$

Отсюда можно получить искомое ускорение a_1:

$$a_1 = \frac{g \cdot \left(P_1 \cdot sin\alpha - \dfrac{P_3 \cdot sin\beta}{2}\right)}{P_1 + \dfrac{P_2}{2} + \dfrac{3P_3}{8}}.$$

Решение найдено.

Обобщенные координаты

Рассматривается механическая система, состоящая из n материальных точек. Масса i - й точки m_i, радиус-вектор – $\bar{r}_i$, координата – (x_i, y_i, z_i), i = 1, 2, ...,n.

Пусть $q_1, q_2, ..., q_s$ – набор независимых параметров, однозначно определяющих положение системы. то есть

$$\bar{r}_i = \bar{r}_i(q_1, q_2, ..., q_s).$$

Минимальное число параметров, однозначно определяющих положение системы, называется числом степеней свободы системы.

Такой минимальный набор параметров называется обобщенными координатами системы, а производные обобщенных координат по времени – обобщенными скоростями.

Уравнения Лагранжа II рода

Рассмотрим движение системы материальных точек с идеальными стационарными связями. Масса i - й точки m_i, радиус вектор $\bar{r}_i$.

Пусть $\bar{F}^a_i$ – равнодействующая всех активных сил, действующих на i-ю точку, а $\bar{F}^p_i$ – равнодействующая всех пассивных сил, действующих на i - ю точку.

В соответствии с принципом Даламбера, добавив к активным и пассивным силам силу инерции $-m_i\bar{a}_i$, можно считать, что полученная система сил уравновешена, и можно использовать в качестве условия равновесия принцип возможных перемещений. Здесь $\delta\bar{r}_i$ – возможное перемещение i - й точки.

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{F}_i^a + \bar{F}_i^p - m_i\bar{a}_i\right)\cdot\delta\bar{r}_i = 0$$

или

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{F}_i^a + \bar{F}_i^p - m_i\frac{d\bar{V}_i}{dt}\right)\cdot\delta\bar{r}_i = 0.$$

Так как связи, наложенные на систему идеальны, то сумма работ пассивных сил на возможных перемещениях равна нулю.

Пусть система имеет s степеней свободы и q_j, $j=1,2,...,s$ – обобщенные координаты системы.

Тогда $\bar{r}_i=\bar{r}_i(q_1, q_2 ... q_s)$ и $\delta \bar{r}_i = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \cdot \delta q_j$.

Рассмотрим первое слагаемое в выражении работы.

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{s} \bar{F}_i^a \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \cdot \delta q_j = \sum_{j=1}^{s} \left(\sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i^a \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \right) \cdot \delta q_j = \sum_{j=1}^{s} Q_j \cdot \delta q_j .$$

Здесь обозначено Qj выражение $Q_j = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i^a \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j}$.

Q_j называют обобщенной силой, соответствующей j - й обобщенной координате.

Рассмотрим второе слагаемое.

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\bar{V}_i}{dt} \cdot \delta \bar{r}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\bar{V}_i}{dt} \cdot \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \cdot \delta q_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{s} \left(\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\bar{V}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \right) \cdot \delta q_j .$$

Рассмотрим отдельно выражение, стоящее в скобках в последней части выражения.

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\bar{V}_i}{dt} \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt} \left(m_i \bar{V}_i \cdot \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \right) - \sum_{i=1}^{n} m_i \bar{V}_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} \right) .$$

Справедливость последнего равенства подтверждается непосредственной проверкой.

В дальнейшем мы воспользуемся двумя соотношениями.

$$\frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial \dot{q}_j}; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial q_j}.$$

Первое из этих соотношений доказывается следующим образом:

$$\bar{V}_i = \frac{d\bar{r}_i}{dt} = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_1} \dot{q}_1 + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_2} \dot{q}_2 + \ldots + \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_s} \dot{q}_s \Rightarrow \frac{\partial \bar{V}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \bar{r}_i}{\partial q_j}.$$

Второе соотношение есть результат перемены порядка дифференцирования. Воспользовавшись этими соотношениями, получим:

$$\sum_{i=1}^{n}\left[m_i\frac{d}{dt}\left(\overline{V}_i\cdot\frac{\partial\overline{V}_i}{\partial\dot{q}_j}\right)-m_i\overline{V}_i\cdot\frac{\partial\overline{V}_i}{\partial q_j}\right]=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_i}{\partial\dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T_i}{\partial q_j}\right]=$$

$$=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}\quad.$$

Здесь T_i – кинетическая энергия i - й точки, T – кинетическая энергия всей системы.

$$T_i=\frac{m_i\overline{V}_i^2}{2};\qquad T=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i\overline{V}_i^2}{2}\ .$$

Теперь сумма работ активных сил и сил инерции может быть представлена в виде:

$$\sum_{j=1}^{s}\left[Q_j-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}\right)+\frac{\partial T}{\partial q_j}\right]\cdot\delta q_j=0\,.$$

Отсюда можно вывести:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_j}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j\quad j=1,2,\ldots,s.$$

Это и есть уравнение Лагранжа II рода.

Вернемся к обобщенным силам.

$$\sum_{i=1}^{n}\bar{F}_i^a\cdot\delta\bar{r}_i=\sum_{j=1}^{s}Q_j\delta q_j.$$

Так как δq_j – возможные перемещения, то можно взять $\delta q_к$ не равным нулю, а все остальные возможные перемещения – нулевыми.

$$Q_k\delta q_k=\sum_{i=1}^{n}\bar{F}_i^a\cdot\delta\bar{r}_i=\delta A_k^a\,.$$

Отсюда $\quad Q_k = \dfrac{\delta A_k^a}{\delta q_k}$.

Последняя формула дает возможность для вычисления обобщенных сил: нужно зафиксировать все обобщенные координаты, кроме одной, а ей придать приращение в сторону возрастания, затем вычислить сумму работ активных сил. Отношение суммы работ к возможному перемещению дает обобщенную силу, соответствующую выбранной обобщенной координате.

Пример

Прямоугольник может скользить без трения по горизонтальной поверхности. К прямоугольнику шарнирно прикреплен невесомый стержень длиной L. Масса прямоугольника – m_1, точка A, прикрепленная к концу стержня имеет массу m_2.

Пусть x и φ – обобщенные координаты. Составить уравнения Лагранжа II рода.

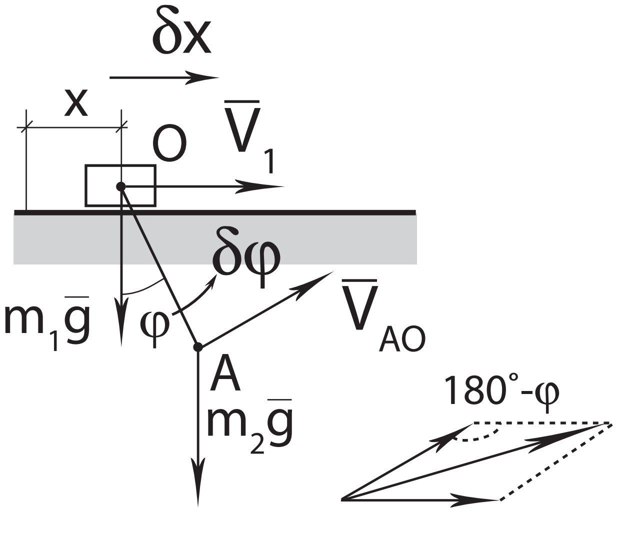


Рис.10

Решение задачи

Запишем выражение кинетической энергии системы

$$T = \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2}.$$

Учтем, что:

$$V_1 = \dot{x};\ \ \bar{V}_2 = \bar{V}_1 + \bar{V}_{AO}\,;\ V_{AO} = \dot{\varphi} \cdot L;$$

$$V_2^2 = V_1^2 + V_{AO}^2 - 2V_1 V_{AO}\cos(180° - \varphi) = \dot{x}^2 + (\dot{\varphi}L)^2 + 2\dot{x}\dot{\varphi}L\cos\varphi.$$

Для составления уравнений Лагранжа II рода вычислим производные:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m_1 \cdot \dot{x} + m_2 \cdot \dot{x} + m_2 \cdot \dot{\varphi} L cos\varphi;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = m_1 \cdot \ddot{x} + m_2 \cdot \ddot{x} + m_2 \cdot \ddot{\varphi} L cos\varphi - m_2 \cdot \dot{\varphi}^2 L sin\varphi;$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0.$$

Для того чтобы получить обобщенную силу Q_x зададим приращение координата x в сторону возрастания, а координату φ зафиксируем.

$$\delta A_x = 0 = Q_x \cdot \delta x \Rightarrow Q_x = 0.$$

Таким образом первое из уравнений Лагранжа II рода имеет вид:

$$(m_1 + m_2) \cdot \ddot{x} + m_2 \cdot \ddot{\varphi} L cos\varphi - m_2 \cdot \dot{\varphi}^2 L sin\varphi = 0.$$

Составим уравнение движения, соответствующее координате φ.

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = m_2(\dot{\varphi} L + \dot{x}\dot{\varphi} L cos\varphi);$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = m_2(\ddot{\varphi} L + \ddot{x}\dot{\varphi} L cos\varphi + \dot{x}\ddot{\varphi} L cos\varphi - \dot{x}\dot{\varphi}^2 L sin\varphi);$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varphi} = -m_2 \dot{x}\dot{\varphi} L sin\varphi.$$

Для вычисления обобщенной силы Q_φ зафиксируем координату x и зададим приращение координате φ. Вычислим сумму работ.

$$\delta A_\varphi = -m_2 g L sin\varphi \cdot \delta\varphi = Q_\varphi \cdot \delta\varphi \Rightarrow Q_\varphi = -m_2 g L sin\varphi.$$

Подставляя полученные выражения и сокращая общий сомножитель m_2L, получим:

$$\ddot{\varphi} + \ddot{x}\dot{\varphi} cos\varphi + \dot{x}\ddot{\varphi} cos\varphi - \dot{x}\dot{\varphi}^2 sin\varphi + \dot{x}\dot{\varphi} sin\varphi = -g sin\varphi.$$

Итак, уравнения Лагранжа II рода записаны. Поставленная задача решена.

Пример 2

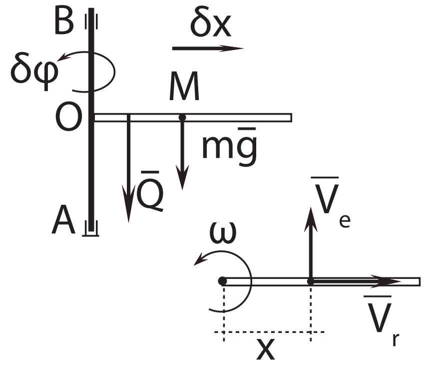


Рис.11

Горизонтальная трубка жестко соединена с осью АВ (рис.11). Внутри трубки находится точка М массы m. Момент инерции трубки с осью относительно оси вращения равен J. Обобщенные координаты - x расстояние от точки М до оси вращения и φ – угол поворота относительно оси.

Составить уравнения Лагранжа II рода, описывающие движение системы.

Решение.

Запишем кинетическую энергию системы.

$$T = \frac{J\omega^2}{2} + \frac{mV^2}{2}.$$

Здесь $\omega = \dot{\varphi}$ – угловая скорость трубки с осью.

Точка М совершает сложное движение, поэтому

$$\bar{V} = \bar{V}_r + \bar{V}_e;\ V_r = \dot{x};\ \ V_e = \dot{\varphi} \cdot x;$$

или $V^2 = \dot{x}^2 + \dot{\varphi}^2 \cdot x^2$.

Теперь выражение кинетической энергии примет вид:

$$T = \frac{J\dot{\varphi}^2}{2} + \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{\varphi}^2 \cdot x^2\right).$$

Для составления уравнений Лагранжа II рода нам необходимо вычислить производные:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x};\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x};\ \frac{\partial T}{\partial x} = m\dot{\varphi}^2 x.$$

Вычислим обобщенную силу Q_x. Для этого зафиксируем координату φ, и зададим приращение координате x в сторону ее возростания – δx.

$$\delta A_x = 0 = Q_x \delta x \Rightarrow Q_x = 0.$$

Теперь можно составить первое из уравнений Лагранжа:

$$\ddot{x} - \dot{\varphi}^2 x = 0.$$

Перейдем к составлению второго уравнения:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = J\dot{\varphi} + m\dot{\varphi}x^2; \; \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}}\right) = J\ddot{\varphi} + \; m\ddot{\varphi}x^2 + 2m\dot{\varphi}\dot{x}; \; \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0.$$

Для получения обобщенной силы Q_φ, зафиксируем координату x и зададим приращение координате φ в сторону созростания.

$$\delta A_\varphi = 0 = \; Q_\varphi \delta\varphi \; \Rightarrow \; Q_\varphi = 0.$$

Теперь можно записать второе из уравнений Лагранжа II рода.

$$J\ddot{\varphi} + \; m\ddot{\varphi}x^2 + 2m\dot{\varphi}\dot{x} = 0.$$

Задача решена.

Содержание