Министерство образования и науки РФ
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Ростовский государственный строительный университет»

Утверждено на заседании
кафедры технической механики
6 мая 2011 г.

Методические указания
на тему:«Динамика точки и общие теоремы динамики системы»

Ростов-на-Дону
2011

УДК 531.01
Методические указания на тему:«Динамика точки и общие теоремы динамики системы». Ростов-на-Дону: Рост. гос. строит. ун - т, 2011. - с. 24

Рассматривается первая часть курса динамики, посвящённая динамике материальной точки и общим уравнениям динамики. Курс изложен чрезвычайно сжато, но содержит основные сведения из соответствующих разделов курса теоретической механики, преподаваемого студентам строительных специальностей.

Составители: доц. Ремизов М.Ю.
доц. Русакова Е.Б.
доц. Углич С.И.

Рецензент: доц. Виленская Т.В.

Динамика точки.

Динамика точки. Основные понятия и определения.

В разделе кинематики исследовалось движение тел без учёта причин, обеспечивающих это движение. Рассматривалось движение, заданное каким-либо способом и определялись траектории, скорости и ускорения точек этого тела.

В разделе динамики решается более сложная и важная задача. Определяется движение тела под действием сил приложенных к нему, с учётом внешних и внутренних условий, влияющих на это движение.

Динамикой называется раздел механики, в котором изучаются законы движения материальных тел под действием сил.

Материальной точкой называют материальное тело (тело, имеющее массу), размерами которого при изучении его движения можно пренебречь.

Точку будем называть изолированной, если на точку не оказывается никакого влияния, никакого действия со стороны других тел и среды, в которой точка движется.

Законы динамики

В основе динамики лежат законы, установленные путём обобщения результатов целого ряда опытов и наблюдений над движением тел и проверенные обширной общественно-исторической практикой человечества. Систематически эти законы были впервые изложены И. Ньютоном.

Первый закон (закон инерции), открытый Галилеем, гласит: *изолированная от внешних воздействий материальная точка сохраняет своё состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока приложенные силы не заставят её изменить это состояние.* Движение, совершаемое точкой при отсутствии сил, называется движением по инерции.

Закон инерции отражает одно из основных свойств материи - пребывать неизменно в движении и устанавливает для материальных тел эквивалентность состояний покоя и движения по инерции. не является равномерным и прямолинейным, то на точку действует сила.

Система отсчёта, по отношению к которой выполняется закон инерции, называется инерциальной системой отсчёта (иногда её условно называют неподвижной).

Второй закон (основной закон динамики) гласит: *произведение массы материальной точки на ускорение, которое она получает под действием данной силы, равно по модулю этой силе, а направление ускорения совпадает с направлением силы.*

Математически этот закон выражается векторным равенством.

$$m\bar{a}=\bar{F}$$

Здесь m -масса точки, $\bar{a}$ - ускорение точки, $\bar{F}$ - сила, действующая на точку.

Второй закон динамики, как и первый, имеет место только по отношению к инерциальной системе отсчёта.

Третий закон (закон равенства действия и противодействия) устанавливает характер механического взаимодействия между материальными телами. Для двух материальных точек он гласит: *две материальные точки действуют друг на друга с силами, равными по модулю и направленными вдоль прямой, соединяющей эти точки, в противоположные стороны.*

Заметим, что силы взаимодействия между свободными материальными точками (или телами), как приложенные к разным объектам, не образуют уравновешенной системы.

Задачи динамики. Для свободной материальной точки задачами динамики являются следующие:

1) зная закон движения точки, определить действующую на неё силу (первая задача динамики);

2) зная действующие на точку силы, определить закон движения точки (вторая, или основная, задача динамики).

Дифференциальные уравнения движения материальной точки

Для решения задач динамики точки будем пользоваться одной из следующих двух систем уравнений.

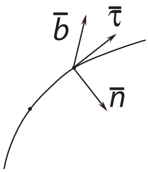
Уравнения в декартовых координатах. Из кинематики известно, что движение точки в прямоугольных декартовых координатах задаётся уравнениями:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

Проектируя второй закон Ньютона на оси координат получим:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = F_x \\ m\ddot{y} = F_y \\ m\ddot{z} = F_z \end{cases}$$

Уравнения движения при естественном способе задания движения точки. При проектировании уравнений движения на оси естественного трехгранника получим:



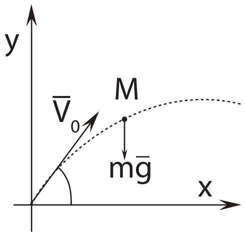
$$\begin{cases} m\dfrac{dV_\tau}{dt} = F_\tau \\ m\dfrac{V_\tau^2}{\rho} = F_n \\ 0 = F_b \end{cases}$$

Эти уравнения можно переписать в виде:

$$\begin{cases} m\ddot{s} = F_\tau \\ m\dfrac{\dot{s}^2}{\rho} = F_n \\ 0 = F_b \end{cases}$$

Здесь s - закон движения точки по траектории, ρ - радиус кривизны траектории в данной точке, F_τ, F_n, F_b - проекции силы, приложенной к точке на единичные векторы естественных осей.

Пример 1



α

Материальная точка брошена со скоростью $\bar{V}_0$ под углом α к горизонту. На точку действует сила веса $m\bar{g}$. Определить дальнейшее движение точки.

Решение. Составим уравнения движения точки в проекциях на оси x и y.

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = -mg \end{cases}$$

После интегрирования уравнений получим:

$x=C_1t+C_2$; $y=-gt^2/2+C_3t+C_4$

Здесь C_1, C_2 , C_3 , C_4 - константы интегрирования.

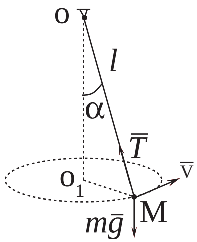
Сформулируем начальные условия:
При t = 0 x = 0, y=0. $V_x=V_0\cos\alpha$, $V_y = V_0\sin\alpha$.
После удовлетворения начальных условий получим.

$$C_2 = 0, C_4 = 0, C_1 = V_0 cos\alpha, C_3 = V_0 sin\alpha$$

Окончательно получим.

$$\begin{cases} x = V_0 cos\alpha \cdot t \\ y = -\dfrac{gt^2}{2} + V_0 cos\alpha \cdot t \end{cases}$$

Пример 2.



Материальная точка М массы m подвешена на нерастяжимой нити длиной l, которая при движении описывает коническую поверхность, составляя угол α с вертикалью.
Определить скорость точки и силу натяжения нити.

Составим равнения движения точки в проекциях на оси естественного трехгранника $\overline{\tau}$, $\overline{n}$, $\overline{b}$. Направление касательной совпадает с направлением скорости точки, нормаль направлена вдоль MO_1, а бинормаль направлена по вертикали вверх. Кроме того $V_\tau = V$.

$$\begin{cases} m\dfrac{dV}{dt} = 0 \\ m\dfrac{V^2}{\rho} = T sin\alpha \\ 0 = T cos\alpha - mg \end{cases}$$

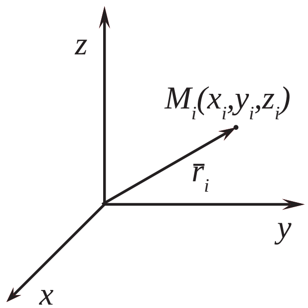
Из первого уравнения получаем V= const.
Во втором уравнении $\rho = l \cdot sin\alpha$ – радиус кривизны траектории.
Из последнего уравнения находим T. Окончательно получим:

$$\begin{cases} T = \dfrac{mg}{\cos\alpha} \\ V = sin\alpha\sqrt{\dfrac{lg}{cos\alpha}} \end{cases}$$

Основные понятия динамики системы

Механической системой мы будем называть совокупность материальных точек, объединённых по некоторому признаку.
Силы, действующие на систему мы будем разделять на внешние и внутренние.
Внутренними называются силы взаимодействия между телами, принадлежащими одной системе. Внешними называются силы взаимодействия между телами системы и телами не входящими в систему.

Характеристики механической системы



Рассмотрим механическую систему, состоящую из n материальных точек. Пусть m_i — масса i — ой точки системы, $\bar{r}_i$ — радиус вектор этой точки.
i=1,2,...n.

Центр масс

Центром масс называется точка, радиус вектор которой удовлетворяет следующему равенству:
Обозначим

$$\bar{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \bar{r}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \qquad M = \sum_{i=1}^{n} m_i$$

M — масса всей системы. Из этих равенств можно получить выражения, которые пригодятся нам в дальнейшем:

$$M\bar{r}_c = \sum_{i=1}^{n} m_i \bar{r}_i \qquad M\bar{V}_c = \sum_{i=1}^{n} m_i \bar{V}_i \qquad M\bar{a}_c = \sum_{i=1}^{n} m_i \bar{a}_i$$

Здесь $\bar{r}_c$ — радиус вектор центра масс, $\bar{V}_c$ — скорость центра масс, $\bar{a}_c$ — ускорение центра масс.

Геометрия масс

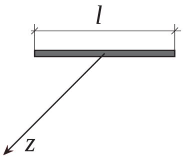
Пусть i — ая точка системы имеет координаты (x_i, y_i, z_i).
Пусть h_i — расстояние от i — ой точки до оси z.

Моментом инерции системы относительно оси z называется выражение:
Аналогично вводятся моменты инерции относительно осей x и y.

$$J_z = \sum_{i=1}^{n} m_i h_i^2 = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 + y_i^2)$$

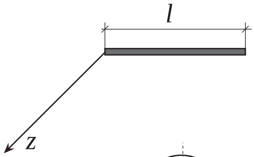
$$J_x = \sum_{i=1}^{n} m_i (y_i^2 + z_i^2) \qquad J_y = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_i^2 + z_i^2)$$

Приведём без вывода моменты инерции для для некоторых фигур:



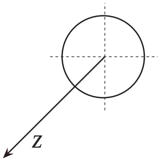
Момент инерции однородного стержня длиной *l* и массой m относительно оси, проходящей через центр стержня перпендикулярно к нему.

$$J_z = \frac{ml^2}{12}$$



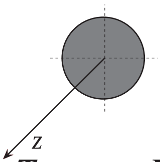
Момент инерции однородного стержня длиной *l* и массой m относительно оси, проходящей через центр конец стержня перпендикулярно к нему.

$$J_z = \frac{ml^2}{3}$$



Момент инерции однородного кольца радиуса r и массы m относительно оси, проходящей через центр кольца перпендикулярно к его плоскости.

$$J_z = mr^2$$



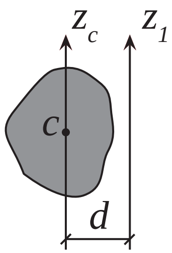
Момент инерции однородного диска радиуса r и массы m относительно оси, проходящей через центр кольца перпендикулярно к его плоскости.

$$J_z = \frac{mr^2}{2}$$

Теорема Гюйгенса

Для вычисления момента инерции относительно оси часто удобно использовать теорему Гюйгенса, которую приводим без доказательства:

Момент инерции твёрдого тела относительно оси равен моменту инерции относительно другой оси, параллельной данной и проходящей через центр масс плюс произведение массы тела на квадрат расстояния между осями.



$$J_{z1} = J_{zc} + md^2$$

Общие теоремы динамики системы

Теорема о движении центра масс системы

Рассмотрим систему, состоящую из n материальных точек. Для каждой точки системы можно записать уравнение движения в виде:

$$m_i \overline{a}_i = \overline{F}_i^e + \overline{F}_i^i \ , \ i=1,\ 2,\ ...n$$

Здесь обозначено:

$\overline{F}_i^e$ — сумма всех внешних сил, приложенных к i — ой точке.

$\overline{F}_i^i$ — сумма всех внутренних сил, приложенных к i — ой точке.

m_i — масса i — ой точки.

Просуммируем уравнения движения для всех точек системы.

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \overline{a}_i = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i^e + \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i^i$$

Левую часть этого равенства можно представить в виде:

$$M\overline{a}_c = \sum_{i=1}^{n} m_i \overline{a}_i$$

В силу свойств внутренних сил сумма всех внутренних сил, действующих на точки системы равна нулю.

$$\sum_{i=1}^{n}\overline{F}_i^i=\overline{0}$$

Сумма всех внешних сил, действующих на систему есть по определению главный вектор внешних сил, приложенных к системе:

$$\sum_{i=1}^{n}\overline{F}_i^e=\overline{R}^e$$

Теперь наше равенство можно представить в виде:

$$M\overline{a}_c=\overline{R}^e$$

Это равенство даёт аналитическое выражение теоремы о движении центра масс

Словесная формулировка теоремы:

Центр масс системы движется как двигалась бы материальная точка с массой равной массе всей системы под действием всех внешних сил, приложенных к системе.

Следствия:

1. Если $\overline{R}^e=\overline{0}$ то $\overline{a}_c=\overline{0}\rightarrow\overline{V}_c=\overline{Const}$ — *если сумма всех вешних сил, приложенных к системе равна нулю, то скорость центра масс есть величина постоянная.*

2. Если $R_x^e=0$ то $a_{cx}=0\rightarrow V_{cx}=Const$ — *если сумма проекций всех вешних сил приложенных к системе на некоторую ось, равна нулю, то проекция скорости центра масс на ту же ось есть величина постоянная.*

Теорема об изменении количества движения системы

Введём понятие количества движения для точки:

$$\overline{q}_i=m_i\overline{V}_i$$

Здесь $\overline{q}_i$ — количество движения точки, m_i — масса точки, $\overline{V}_i$ — скорость точки.

Для системы количества движения вычисляется как сумма количеств движения всех точек системы.

$$\overline{Q}=\sum_{i=1}^{n}m_i\overline{V}_i$$

Количество движения системы можно также выразить через скорость центра масс.

$\overline{Q} = M\overline{V}_c$ Здесь M — масса системы,
$\overline{V}_c$ — скорость центра масс системы.

Приступим к выводу теоремы. Для i -ой точки системы уравнение движения можно записать в виде:

$$m_i \frac{d\overline{V}_i}{dt} = \overline{F}_i^e + \overline{F}_i^i$$

$\overline{F}_i^e$ — сумма всех внешних сил, приложенных к i — ой точке.

$\overline{F}_i^i$ — сумма всех внутренних сил, приложенных к i — ой точке.

m_i — масса i — ой точки.

Просуммируем уравнения движения всех точек:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\overline{V}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i^e + \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i^i$$

Левая часть этого равенства может быть представлена в виде:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\overline{V}_i}{dt} = \frac{d\overline{Q}}{dt} \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^{n} \overline{F}_i^e = \overline{R}^e$$

Последнее слагаемое левой части равно нулю в силу свойств внутренних сил. Окончательно получаем:

$$\frac{d\overline{Q}}{dt} = \overline{R}^e$$

Это аналитическое выражение теоремы об изменении количества движения системы в дифференциальной форме.

Словесная формулировка теоремы:

Производная по времени от количества движения системы равно главному вектору всех внешних сил, приложенных к системе.

Следствия из теоремы.

1. Если $\overline{R}^e = \overline{0}$ *то* $\overline{Q} = \overline{\text{const}}$, - *если главный вектор внешних сил, действующих на систему равен нулю, то количество движения системы есть величина постоянная.*

2. Если $R_x^e = 0$ то $Q_z = \text{const}$ - *если проекция главного вектора внешних сил, действующих на систему на некоторую ось равна нулю, то проекция количества движения системы на эту ось есть величина постоянная.*

Теорема об изменении количества движения в конечной форме

Представим выражение теоремы об изменении количества движения в виде:

$$d\overline{Q} = \overline{R}^{e} dt$$

Введём понятие *импульса силы*:

$$\bar{S}_i^e = \int_{t_0}^{t_1} \bar{F}_i^e \, dt$$

Импульсом силы на интервале $[t_0,\ t_1]$ *называется интеграл по времени на данном интервале от силы*

В предыдущем равенстве представим правую часть в виде:

$$\bar{R}^e = \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i^e$$

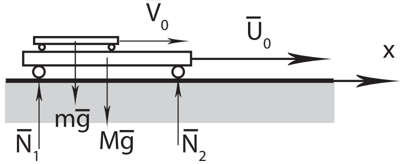
$$\int_{t_0}^{t_1} d\bar{Q} = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \bar{F}_i^e dt$$

Проинтегрируем полученное равенство по времени.

$$\bar{Q}_1 - \bar{Q}_0 = \sum_{i=1}^{n} \bar{S}_i^e$$

Словесная формулировка теоремы: *Изменение количества движения системы за некоторый отрезок времени равно сумме импульсов всех внешних сил, действующих на систему за тот же промежуток времени.*

Пример



Платформа массы M в начальный момент движется со скоростью U_0, а тележка массы m двигалась с относительной скоростью V_0.

Затем, вследствии внутренних причин тележка перестала двигаться по платформе.

Определить общую скорость тележки и платформы.

Решение

Силы веса, действующие на систему, и силы реакций действующие на колеса направлены по вертикали. Следовательно проекция количества движения на ось x постоянна.

Вычислим проекции вектора количества движения на ось x в начальный и конечный моменты. Учтём, что абсолютная скорость тележки в начальный момент равна $\overline{V}_0+\overline{U}_0$. В конечный момент скорости тележки и платформы одинаковы и равны $\overline{U}_1$.

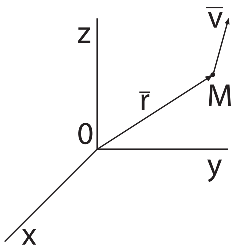
$$\begin{cases} Q_x^{\text{нач}} = m(V_0 + U_0) + MU_0 \\ Q_x^{\text{кон}} = mU_1 + MU_1 \end{cases}$$

Приравнивая эти величины получим:

$$U_1 = U_0 + \frac{mV_0}{M + m}$$

Задача решена.

Теорема об изменении кинетического момента системы



Введём понятие кинетического момента или момента количества движения точки.

$\bar{k}_o = \bar{r} \times m\bar{V}$ - кинетический момент точки относительно центра O.

m - масса точки,

$\bar{r}$ - радиус вектор точки относительно точки O,

$\bar{V}$ - вектор скорости точки.

Для системы материальных точек кинетический момент относительно некоторого центра определяется как сумма кинетических моментов всех точек системы относительно того же центра.

$$\bar{K}_o = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times m_i \bar{V}_i$$

Рассмотрим систему, состоящую из n материальных точек. Для каждой точки системы можно записать уравнение движения в виде:

$$m_i\overline{a}_i = \overline{F}_i^e + \overline{F}_i^i \;, i\text{=}1, 2, ...n$$

Умножим обе части этого равенства векторно на радиус вектор i- ой точки $\bar{r}_i$.

$$\bar{r}_i \times m_i\, \bar{a}_i = \bar{r}_i \times \bar{F}_i^i + \bar{r}_i \times \bar{F}_i^e$$

Преобразуем левую часть этого равенства.

$$\bar{r}_i \times m_i\, \bar{a}_i = \bar{r}_i \times m_i\, \frac{d\,\bar{V}_i}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{r}_i \times m_i\, \bar{V}_i)$$

Чтобы убедится в справедливости этого равенства достаточно вычислить производную, стоящую в правой части.

$$\frac{d}{dt}(\bar{r}_i \times m_i\, \bar{V}_i) = \frac{d\bar{r}_i}{dt} \times m_i\, \bar{V}_i + \bar{r}_i \times m_i\, \frac{d\,\bar{V}_i}{dt} = \bar{V}_i \times m_i\, \bar{V}_i + \bar{r}_i \times m_i\, \frac{d\,\bar{V}_i}{dt}$$

Первое из стоящих справа слагаемых равно нулю и утверждение доказано. Мы получили для произвольной точки системы равенство:

$$\frac{d}{dt}(\bar{r}_i \times m_i\, \bar{V}_i) = \bar{r}_i \times \bar{F}_i^i + \bar{r}_i \times \bar{F}_i^e$$

Заметим что слева в скобке стоит кинетический момент точки относительно центра О. Просуммируем полученное выражение по всем точкам системы.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d\bar{k}_{oi}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times \bar{F}_i^i + \sum_{i=1}^{n} \bar{r}_i \times \bar{F}_i^e$$

Так как внутренние силы являются уравновешенными, первое слагаемое в правой части равно нулю, второе есть главный момент всех внешних сил, действующих на систему относительно центра О. Сумма кинетических моментов всех точек системы даёт кинетический момент системы. Окончательно получаем:

$$\frac{d\bar{K}_o}{dt} = \bar{M}_o^e$$

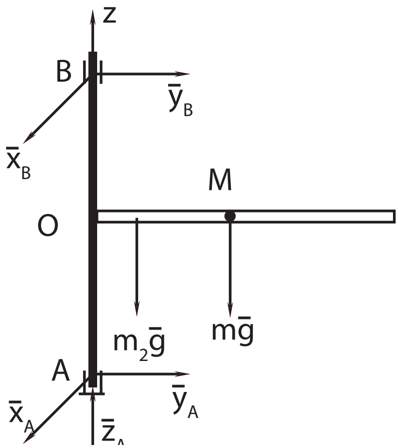
Словесная формулировка теоремы: *Производная по времени от кинетического момента системы относительно некоторого центра равна главному моменту всех внешних сил. действующих на систему относительно того же центра.*

Следствия из теоремы.

1. Если $\overline{M}_o^{\,e}=\overline{0}$ *то* $\overline{K}_o=\overline{\text{const}}$, - *если главный момент внешних сил, действующих на систему относительно некоторого центра равен нулю, то кинетический момент системы относительно этого центра есть величина постоянная.*

2. Если $M_z^{\,e}=0$ то K_z=const - *если главный момент внешних сил, действующих на систему относительно некоторой оси равен нулю, то кинетический момент системы относительно этой оси есть величина постоянная.*

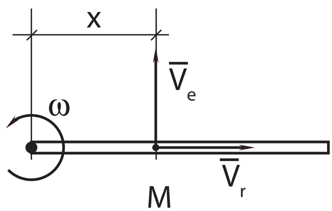
Пример



Горизонтальная трубка жёстко соединена с осью AB. Внутри трубки находится точка M массы m. В начальный момент трубка вместе с осью вращается с угловой скоростью ω_0. Момент инерции трубки с осью относительно оси вращения равен J. В начальный момент точка находилась на расстоянии a от оси. Определить угловую скорость трубки в момент, когда шарик вылетает из трубки, если длина трубки равна L.

Решение

Применим теорему об изменении кинетического момента в проекции на ось z. Заметим что все внешние силы, приложенные к системе, дают нулевые моменты относительно оси z. Следовательно K_z=const. Для трубки с осью $K_z = J_z \cdot \omega$. Определим кинетический момент для точки, движущейся вдоль трубки.



При движении точки её скорость складывается из относительной, направленной вдоль трубки и переносной, направленной перпендикулярно трубке. Количество движения точки также складывается из двух составляющих, пропорциональных относительной и переносной скоростям. Вектор количества движения, соответствующий относительной скорости, даёт нулевой момент относительно оси z. Вычислим последовательно переносную скорость, количество движения тоски и кинетический момент относительно оси вращения.

$$V_e = \omega \cdot x;\ q = m \cdot \omega \cdot x;\ k_z = m \cdot \omega \cdot x^2$$

Вычислим кинетический момент системы в начальный и конечный моменты времени.

$$\begin{cases} K_z^{\text{нач}} = J_z \cdot \omega_0 + m \cdot \omega \cdot a^2 \\ K_z^{\text{кон}} = J_z \cdot \omega \quad + m \cdot \omega \cdot L^2 \end{cases}$$

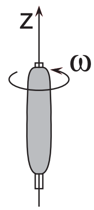
Здесь ω - угловая скорость в момент вылета шарика из трубки.

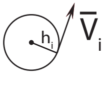
Приравнивая эти величины получим:

$$\omega = \frac{J_z + m \cdot a^2}{J_z + m \cdot L^2}\omega_0$$

Решение получено.

Уравнение вращательного движения твёрдого тела.





Тело вращается с угловой скоростью ω относительно оси z. Найдём вначале кинетический момент относительно оси z.

$$K_z = \sum_{i=1}^{n} m_i V_i h_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \omega h_i h_i = \omega \sum_{i=1}^{n} m_i h_i^2 = \omega J_z$$

$$\frac{dK_z}{dt} = M_z^e$$

$$J_z \dot{\omega} = M_z^e$$

Запишем теорему об изменении кинетического момента в проекции на ось z, а затем подставим туда выражение K_z.

Теорема об изменении кинетической энергии системы

Введём вначале понятие о кинетической энергии.

Для точки массой m, движущейся со скоростью $\overline{V}$.

$$T = \frac{mV^2}{2}$$

Для системы, состоящей из n материальных точек, масса *i*- ой точки m_i, а ее скорость $\overline{V}_i$

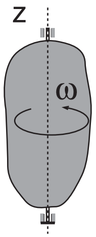
$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{mV_i^2}{2}$$

Рассмотрим несколько частных случаев движения твёрдого тела.

1. Поступательное движение. Скорости всех точек системы одинаковы и равны V, масса всей системы равна M.

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i V_i^2}{2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i V^2}{2} = M\frac{V^2}{2}$$

2. Вращательное движение твёрдого тела. Тело вращается относительно оси z с угловой скоростью ω.



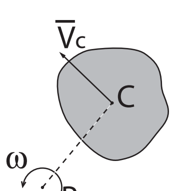
При вращательном движении твердого тела скорость скорость *i*- ой равна $V_i = \omega h_i$

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{mV_i^2}{2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{mh_i^2\omega^2}{2} = \omega^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{mh_i^2}{2} = \frac{J_z\omega^2}{2}$$

Здесь

$$J_z = \sum_{i=1}^{n} mh_i^2$$

3. Плоское движение твёрдого тела.



Рассмотрим плоское движение тела. Здесь P - мгновенный центр скоростей фигуры, ω - угловая скорость тела, C - центр масс тела. В данный момент времени тело вращается относительно мгновенного центра скоростей, значить кинетическую энергию можно выразить как при вращательном движении.

$T = \dfrac{J_P \omega^2}{2}$ Здесь J_P - момент инерции тела относительно оси, проходящей через точку Р. По теореме Гюйгенса

$J_P = J_C + M \cdot PC^2$ Здесь J_P - момент инерции тела относительно оси, проходящей через точку Р.

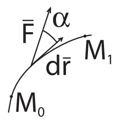
$$T = (J_C + M \cdot PC^2)\frac{\omega^2}{2} = \frac{J_c \cdot \omega^2}{2} + \frac{M \cdot PC^2 \cdot \omega^2}{2} = \frac{J_c \cdot \omega^2}{2} + \frac{M \cdot V_c^2}{2}$$

Сведём полученные результаты в таблицу

Поступательное движение	$T = \dfrac{MV^2}{2}$
Вращательное движение	$T = \dfrac{J_z \omega^2}{2}$
Плоское движение	$T = \dfrac{J_c \cdot \omega^2}{2} + \dfrac{M \cdot V_c^2}{2}$

Введём понятие работы силы.

Пусть точка движется по некоторой траектории под действием силы $\overline{F}$, пусть элементарное перемещение точки - $d\bar{r}$.



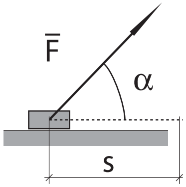
$dA = \bar{F} \cdot d\bar{r}$ dA - элементарная работа силы на перемещении $d\bar{r}$.

В случае конечного перемещения для вычисления работы необходимо вычислять интеграл от элементарной работы силы вдоль траектории.

$A_{01} = \displaystyle\int_{\overset{\frown}{M_0 M_1}} \bar{F} \cdot d\bar{r}$ Это выражение даёт работу силы $\overline{F}$ на участке $M_0 M_1$.

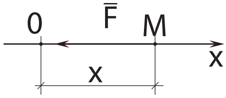
Примеры.

Работа постоянной силы на прямолинейном пути.



Постоянная по величине и направлению сила $\overline{F}$, точка приложения перемещается прямолинейно на расстояние s.

A=F·s·cosα



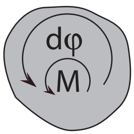
На точку M, движущуюся вдоль оси x, действует сила $\overline{F}$. В начальный момент $x=x_0$, в конечный $x=x_1$

$F_x=-cx$

$$A = \int_{x_0}^{x_1} F_x \cdot dx = -c\int_{x_0}^{x_1} x \cdot dx = -c\,\frac{x^2}{2}\bigg|_{x_0}^{x_1} = -\frac{c}{2}(x_1^2 - x_0^2)$$

Работа пары сил при повороте тела.

Тело совершает поворот в плоскости действия пары с моментом M на бесконечно малый угол dφ.



dA=M·dφ

В случае конечного поворота тела для вычисления работы необходимо вычислять соответствующий интеграл.

$$A = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} M \cdot d\varphi$$

Тело поворачивается от $\varphi=\varphi_0$ до $\varphi=\varphi_1$

Приступим к выводу теоремы об изменении кинетической энергии системы.

Рассматриваем систему, состоящую из n материальных точек. Здесь m_i - масса i-ой точки, $\overline{V}_i$ - её скорость, $\overline{F}_i^i$ - сумма всех внутренних сил, приложенных к данной точке, $\overline{F}_i^e$ - сумма всех внешних сил, приложенных к данной точке.

Запишем уравнение движения для точки.

$$m_i \frac{d\bar{V}_i}{dt} = \bar{F}_i^e + \bar{F}_i^i$$

Умножим обе части скалярно на $d\bar{r}_i$, элементарное перемещение точки.

$$m_i \frac{d\bar{V}_i}{dt} \cdot d\bar{r}_i = \bar{F}_i^e \cdot d\bar{r}_i + \bar{F}_i^i \cdot d\bar{r}_i$$

Преобразуем левую часть этого равенства.

$$m_i \frac{d\bar{V}_i}{dt} \cdot d\bar{r}_i = m_i d\bar{V}_i \cdot \frac{d\bar{r}_i}{dt} = d\bar{V}_i \cdot \bar{V}_i = d\left(\frac{m_i V_i^2}{2}\right) = dT_i$$

Здесь dT_i - дифференциал кинетической энергии i - ой точки. В правой части предыдущего равенства стоят элементарные работы внешних и внутренних сил.

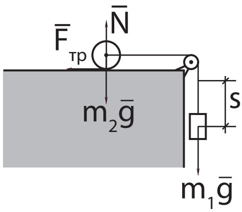
$$dT_i = dA_i^e + dA_i^i$$

После интегрирования на интервале $[t_0, t_1]$ и суммирования по всем точкам системы получим:

$$T_1 - T_0 = A^e + A^i$$

Словесная формулировка теоремы: *Изменение кинетической энергии системы за конечный промежуток времени равно сумме работ внешних и внутренних сил, действующих на систему за тот же промежуток времени.*

Пример



Груз массы m_1 связан нерастяжимой нитью, переброшенной через блок с однородным диском массы m_2, который катится без проскальзывания по плоскости. Масса блока равна нулю. В начальный момент система неподвижна. Определить скорость груза после того, как он опустится на расстояние s.

Применим теорему об изменении кинетической энергии системы.

$$T_1 - T_0 = A^e + A^i$$

$T_0 = 0$ так как в начальный момент система неподвижна.

$T_1 = T^1 + T^2$; Здесь T^1 - кинетическая энергия груза m_1, T^2 - кинетическая энергия диска. Пусть V_1 - скорость груза после того, как он опустится на расстояние s. V_2 и ω_2 - соответственно скорость центра диска и его угловая скорость в конце пути. Заметим, что при качении диска без проскальзывания мгновенный центр скоростей диска находится в точке касания диска и плоскости.

Выпишем кинетическую энергию для каждого тела. Пусть радиус равен r_2.

$$T^1 = \frac{m_1 V_1^2}{2}$$

Груз 1 совершает поступательное движение.

$$T^2 = \frac{m_2 V_2^2}{2} + \frac{J_2 \omega_2^2}{2}$$

Диск совершает плоское движение.

$$V_1 = V_2\,; \;\; V_2 = \omega_2 r_2; \;\; J_2 = \frac{m_2 r_2^2}{2}$$

Выпишем кинематические связи и значение момента инерции диска относительно центра.

Теперь кинетическую энергию можно представить в виде:

$$T_1 = \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_1^2}{2} + \frac{m_2 r_2^2 V_1^2}{4 r_2^2} = \frac{V_1^2}{2}\left(m_1 + \frac{3}{2} m_2\right)$$

Вычислим сумму работ всех сил, действующих в системе.

Сила веса диска не совершает работы так как точка её приложения движется в направлении, перпендикулярном к направлению силы. Сила трения и сила нормального давления, приложенные к диску, не совершают работы так как они приложены в мгновенном центре скоростей, и поэтому на бесконечно малом перемещении из работы равны нулю. Следовательно и на конечном перемещении их работы равны нулю. Внутренние силы в данном случае не совершают работу. Окончательно получим:

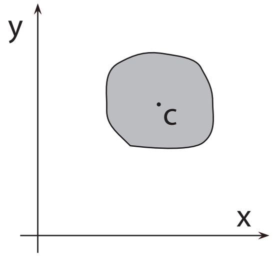
$$A^e = m_1 g s$$

$$\frac{V_1^2}{2}\left(m_1 + \frac{3}{2} m_2\right) = m_1\, g s$$

Отсюда, после некоторых преобразований получим окончательный ответ.

$$V_1 = \sqrt{\frac{2 m_1 g s}{m_1 + \frac{3}{2} m_2}}$$

Дифференциальный уравнения плоского движения твёрдого тела

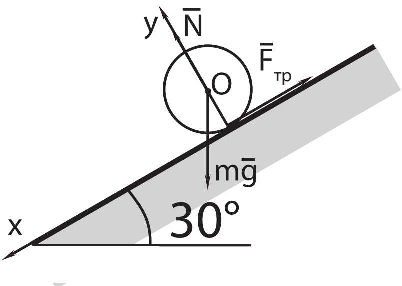


На рисунке слева изображено тело, совершающее плоское движение. С - центр масс тела.

$$\begin{cases} m\ddot{x}_c = R_x \\ m\ddot{y}_c = R_y \\ J_c\ddot{\varphi} = M_c^e \end{cases}$$

Два первых уравнения суть проекции теоремы о движении центра масс на оси x и y, а третье - уравнение вращательного движения относительно центральной оси.

Пример



Однородный диск радиуса r и массы m катится по наклонной плоскости вниз. Качение происходит без проскальзывания. Определить ускорение центра диска.

Решение

Составим уравнения движения в проекциях на оси x и y а также уравнение вращательного движения относительно центральной оси. Учтём, что проекция ускорения центра колеса на ось y равна нулю. На диск действует сила веса mg, сила нормального давления N и сила трения $F_{тр}$.

$$\begin{cases} m\ddot{x}_o = mg \cdot sin30^\circ - F_{тр} \\ 0 = N - mg \cdot cos30^\circ \\ J_o\ddot{\varphi} = F_{тр} \cdot r \end{cases}$$

Учтём что мгновенный центр скоростей диска находится в точке соприкосновения диска и поверхности.

$$V_o = \omega r \Rightarrow \ddot{x}_o = \ddot{\varphi} r \qquad J_o = \frac{mr^2}{2} \qquad F_{\text{тр}} = \frac{mr^2}{2}\ddot{\varphi} = \frac{m}{2}\ddot{x}_o$$

$$m\ddot{x}_o = mg \cdot 0{,}5 - \frac{m}{2}\ddot{x}_o \Rightarrow \frac{3}{2}\ddot{x}_o = g \cdot 0{,}5 \quad \ddot{x}_o = \frac{mg}{3}$$ Ускорение найдено.