Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Ростовский государственный строительный университет»

Утверждено на заседании
кафедры технической
механики 27.10.2011

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

КИНЕМАТИКА

I часть

Методические указания для бакалавров

Ростов-на-Дону

2012

УДК 624.04

Теоретическая механика. Кинематика. I часть: методические указания для бакалавров. – Ростов н/Д: Рост. гос. строит. ун-т, 2012. – 35 с.

Изложены основные положения кинематики. Иллюстрационные примеры позволяют закрепить теоретический материал. Цель курса теоретической механики – приобретение базовых знаний для дальнейшего изучения дисциплин механического цикла

Предназначены для бакалавров.

УДК 624.04

Составители: канд. техн. наук., доц. Д. А. Высоковский
канд. техн. наук., доц. Г. М. Кравченко
Рецензент д-р техн. наук., проф. Л.Н.Панасюк

Редактор Т.М.Климчук
Темплан 2012 г. поз. 59

Подписано в печать 28.11.11. Формат 60×84/16.
Бумага писчая. Ризограф. Уч.-изд. л. 1,5.
Тираж 100 экз. Заказ.

Редакционно-издательский центр
Ростовского государственного строительного университета
344022, г. Ростов-на-Дону, ул. Социалистическая, 162

Введение

Теоретическая механика – одна из фундаментальных наук, изучаемых в технических университетах: ее законы и правила широко применяются в различных прикладных дисциплинах. Особая роль в учебной программе отводится кинематике.

Кинематика – раздел теоретической механики, изучающий движение материальных тел независимо от причин, вызывающих это движение. Под движением тел понимают изменение их положения относительно друг друга в пространстве с течением времени.

Тело отсчета – материальное тело, по отношению к которому изучается движение.

Система отсчета – совокупность тела отсчета, связанной с ним системы координат и часов.

Пространство рассматривается как трехмерное евклидово, однородное и изотропное.

Время считается одинаково во всех точках пространства, во всех системах отсчета и не зависит от движения тел.

Основная единица времени – секунда (с), расстояния – метр (м).

Кинематика разделяется на *кинематику точки* и *кинематику твердого тела*.

Задачи кинематики точки:

Первой задачей кинематики является задание движения точки, т. е. указание способа определения положения точки в выбранной системе отсчета в любой момент времени.

Ко второй задаче отнесем определение кинематических характеристик движения точки – траектории, скорости и ускорения.

1. Кинематика точки

1.1. Способы задания движения точки

Всякое движение точки можно задать одним из трех способов: естественным, координатным, векторным.

1. Естественный способ

Если известно, что точка должна двигаться по заданной траектории, то надо задать: уравнение траектории, систему отсчета (рис. 1) и закон движения вдоль траектории

$$S = f(t). \tag{1.1}$$

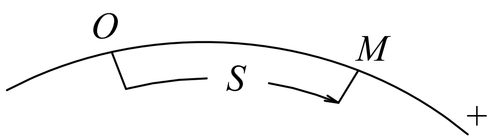


Рис. 1

2. Координатный способ

Чтобы описать движение точки относительно некоторой системы координат x,y,z, надо задать уравнения движения

$$x = f_1(t),\ y = f_2(t),\ z = f_3(t). \tag{1.2}$$

3. Векторный способ

В этом способе надо задать вектор-функцию движения точки М

$$\bar{r} = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}. \tag{1.3}$$

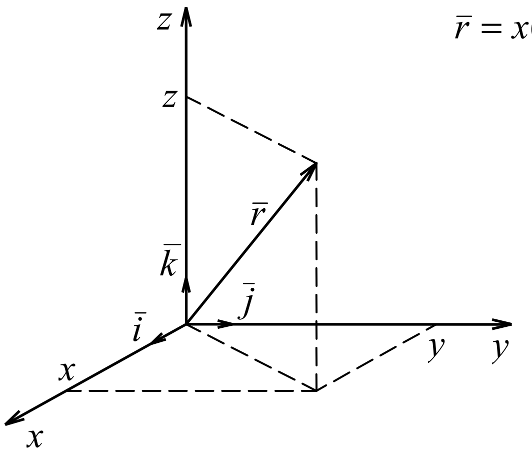


Рис. 2

Этот способ удобно применять для вывода формул скорости и ускорения движения точки.

1.2. Скорость движения точки и ускорение

Пусть положение точки M в момент t определяется радиус-вектором $\bar{r}$, а в момент $t+\Delta t$ радиус вектором $\bar{r}+\Delta\bar{r}$ (рис.3).

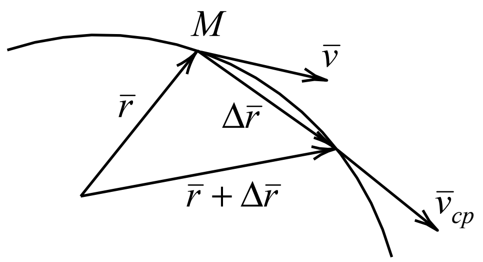


Рис. 3

Тогда средняя скорость $\bar{V}_{cp}$ за время Δt будет равна

$$\bar{V}_{cp}=\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta t}.$$

Переходя к пределу, получим мгновенную скорость

$$\bar{V}=\frac{d\bar{r}}{dt}=\dot{\bar{r}}. \qquad (1.4)$$

Скорость движения точки – в е к т о р н а я величина, равная первой производной от радиуса-вектора по времени. Вектор скорости направлен по касательной к траектории движения в сторону движения.

Аналогично выводится вектор ускорения

$$\bar{a}=\frac{d\bar{v}}{dt}=\ddot{\bar{r}}. \qquad (1.5)$$

Вектор ускорения в данный момент времени равен первой производной от вектора скорости или второй производной от радиуса-вектора точки по времени.

Чтобы получить формулы для вычисления проекции скорости и ускорения на оси неподвижной декартовой системы координат, воспользуемся выражением радиуса-вектора (1.3).

Подстановка (1.3) в (1.4) дает

$$\bar{v}=\dot{x}\bar{i}+\dot{y}\bar{j}+\dot{z}\bar{k}. \qquad (1.6)$$

Зная уравнения движения в виде (1.2) или (1.3), вычислим проекции вектора скорости на оси декартовой системы координат и модуль вектора скорости

$$v_x=\dot{x},\ v_y=\dot{y},\ v_z=\dot{z}; \qquad (1.7)$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}\ . \qquad (1.8)$$

Вектор скорости (1.6) представим в виде

$$\bar{v} = v_x \bar{i} + v_y \bar{j} + v_z \bar{k}\ . \qquad (1.9)$$

После подстановки (1.9) в (1.5) получим

$$\bar{a} = \dot{v}_x \bar{i} + \dot{v}_y \bar{j} + \dot{v}_z \bar{k}\ . \qquad (1.10)$$

Отсюда проекции и модуль вектора ускорения вычислим по формулам:

$$a_x = \dot{v}_x,\ a_y = \dot{v}_y,\ a_z = \dot{v}_z; \qquad (1.11)$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\ . \qquad (1.12)$$

1.3. Скорость движения точки и ускорение при естественном способе задания движения

Чтобы получить формулы для вектора скорости и вектора ускорения при естественном способе описания движения точки, воспользуемся понятием функции от функции.

Будем считать, что радиус-вектор точки M зависит от дуги, которая зависит от времени t, т.е. $\bar{r} = \bar{r}[s(t)]$ (рис.4).

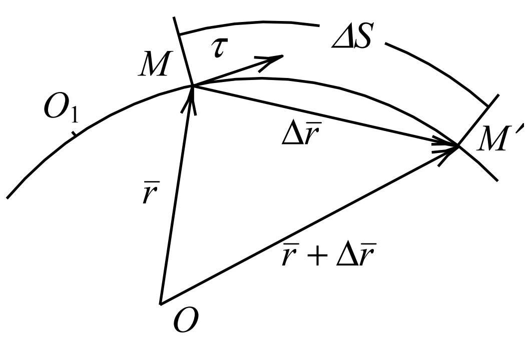


Рис. 4

Тогда

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt}. \qquad (1.13)$$

Так как

$$\left|\frac{d\bar{r}}{ds}\right| = \lim_{\Delta S \to 0}\left|\frac{\Delta\bar{r}}{\Delta s}\right| = 1,$$ то

$$\frac{d\bar{r}}{ds} = \bar{\tau}\ ,$$

где $\bar{\tau}$ – единичный касательный вектор к траектории в точке M.

Вектор скорости (1.13) принимает вид

$$\bar{v} = \dot{s} \cdot \bar{\tau}\ . \qquad (1.14)$$

Так как $\dot{s} = v$, то

$$\bar{v} = v \cdot \bar{\tau}\,. \tag{1.15}$$

Теперь определим ускорение как производную вектора скорости (1.15) по времени:

$$\bar{a} = \frac{dv}{dt}\bar{\tau} + v^2\frac{d\bar{\tau}}{ds} \tag{1.16}$$

Производную $\frac{d\bar{\tau}}{ds}$ преобразуем с помощью радиуса кривизны траектории (рис. 5).

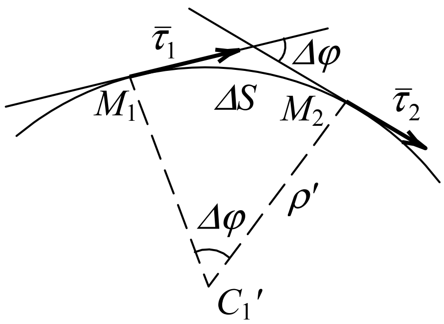


Рис. 5

Точка M_1 – начало дуги ΔS, M_2 – конец дуги, $\bar{\tau}_1$ и $\bar{\tau}_2$ – единичные касательные векторы, $\Delta\varphi$ – угол смежности, ρ' – радиус окруж ности с центром c_1'.

Отсюда следуют соотношения:

$$\Delta S = \rho'\Delta\varphi\,, \tag{1.17}$$

$$\frac{d\varphi}{dS} = \lim_{\Delta S \to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta S} = \frac{1}{\rho}\,,$$

где ρ – радиус кривизны кривой, т.е. радиус соприкасающейся окружности.

Следовательно,

$$\frac{d\bar{\tau}}{dS} = \frac{d\bar{\tau}}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dS} = \frac{1}{\rho}\frac{d\bar{\tau}}{d\varphi}\,. \tag{1.18}$$

Так как $\bar{\tau}^2 = 1$, то $\bar{\tau}\frac{d\bar{\tau}}{d\varphi} = 0$. Отсюда $\frac{d\bar{\tau}}{d\varphi} \perp \bar{\tau}$, $\frac{d\bar{\tau}}{d\varphi} = b\bar{n}$,

где $\bar{n}$ – единичный вектор главной нормали траектории в точке M, b – модуль вектора $\frac{d\bar{\tau}}{d\varphi}$. Обратимся к рис. 6 и вычислим величину b.

Из $\triangle AM_1B$ находим

$$|\Delta\bar{\tau}| = 2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}.$$

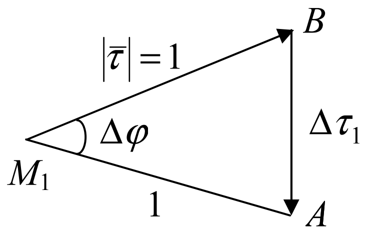


Рис. 6

Для модуля производной $\dfrac{d\bar{\tau}}{d\varphi}$ получим

$$b=\left|\frac{d\bar{\tau}}{d\varphi}\right|=\lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{2\sin\dfrac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta\varphi}=1.$$

Таким образом, формулу (1.18) приводим к виду

$$\frac{d\bar{\tau}}{dS}=\frac{1}{\rho}\bar{n} \tag{1.19}$$

Подстановка (1.19) в (1.16) приводит к окончательному результату

$$\bar{a}=\frac{dv}{dt}\bar{\tau}+\frac{v^2}{\rho}\bar{n}\,. \tag{1.20}$$

Вектор ускорения при естественном способе задания движения точки равен геометрической сумме двух взаимно перпендикулярных векторов, один из которых направлен по касательной к траектории, а другой – по главной нормали.

Модуль касательного ускорения вычисляется по формуле

$$a_\tau=\frac{dv}{dt}=\dot{v}\ , \tag{1.21}$$

модуль нормального ускорения – по формуле

$$a_n=\frac{v^2}{\rho}, \tag{1.22}$$

модуль полного ускорения – по формуле

$$a=\sqrt{a_\tau^2+a_n^2}\,. \tag{1.23}$$

Для решения задач иногда полезно применять комбинированные формулы. Так, касательное ускорение можно вычислить, дифференцируя во времени равенство (1.8),

$$a_\tau=\frac{dv}{dt}=\frac{v_x a_x+v_y a_y+v_z a_z}{\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}}, \tag{1.24}$$

а нормальное ускорение можно определить по формулам (1.12) и (1.23)

$$a_n^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 - a_\tau^2, \qquad (1.25)$$

отсюда находим величину радиуса кривизны

$$\rho = \frac{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}{a_n}. \qquad (1.26)$$

Пример 1.1. Даны уравнения движения точки в плоскости xy:

$$x = -2\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right), \quad y = 2\sin\left(\frac{\pi}{8}t\right) - 1$$

(x, y – в сантиметрах, t – в секундах).

Определить уравнение траектории точки; для момента $t = 1$ найти скорость и ускорение точки, а также ее касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

Решение.

1. Для определения траектории точки исключим из уравнений движения время t. Поскольку t входит в аргументы тригонометрических функций, где один аргумент вдвое больше другого используем тождество

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) = 1 - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}t\right). \qquad (1.27)$$

Из уравнений движения найдем выражения соответствующих функций и подставим в (1.27). Получим

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right) = \frac{3-x}{2}, \quad \sin\left(\frac{\pi}{8}t\right) = \frac{y+1}{2},$$

следовательно,

$$\frac{3-x}{2} = 1 - 2\frac{(y+1)^2}{4}.$$

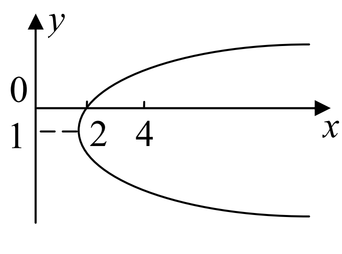


Рис. 7

Отсюда находим уравнение траектории параболы (рис. 7):

$$x = (y+1)^2 + 1.$$

2. Скорость движения точки определим по проекциям на координатные

оси:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{\pi}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}t\right),$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{8}t\right),$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

и при $t = 1$ с

$$v_x = 1{,}11\,\text{см/с},\ v_y = 0{,}73\,\text{см/с},\ v = 1{,}33\,\text{см/с}.$$

3. Аналогично находим ускорение:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{\pi}{8}\cos\left(\frac{\pi}{4}t\right),$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{\pi^2}{32}\sin\left(\frac{\pi}{8}t\right),$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$

и при $t = 1$ с

$$a_x = 0{,}87\,\text{см/с}^2,\ a_y = -0{,}12\,\text{см/с}^2,$$

$$a = 0{,}88\,\text{см/с}^2.$$

4. Касательное ускорение находим по формуле

$$a_\tau = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{v}$$

и при $t = 1$ с $\qquad a_\tau = 0{,}66\,\text{см/с}^2.$

5. Нормальное ускорение точки $a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}$. Подставляя сюда найденные численные значения a и a_τ, получим при $t = 1$ с

$$a_n = 0{,}56\,\text{см/с}^2.$$

6. Радиус кривизны траектории $\rho = v^2 / a_n$. Подставляя сюда найденные численные значения v и a_n, находим, что при $t = 1$ с

$$\rho = 3{,}05\,\text{см}.$$

Пример 1.2. Под данным уравнениям движения точки в плоскости xy:

$$x = 5 + 3\cos t, \; y = 4\sin t$$

определить уравнение траектории; для момента времени $t = \dfrac{\pi}{2}$ с найти скорость и ускорение точки, а также касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны в соответствующей точке траектории.

Решение.

1. Для определения уравнения движения точки исключим из заданных уравнений время t. Для этого эти уравнения преобразуем к виду:

$$\frac{x-5}{3} = \cos t, \; \frac{y}{4} = \sin t$$

Отсюда находим уравнение траектории эллипса (рис. 8):

$$\frac{(x-5)^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

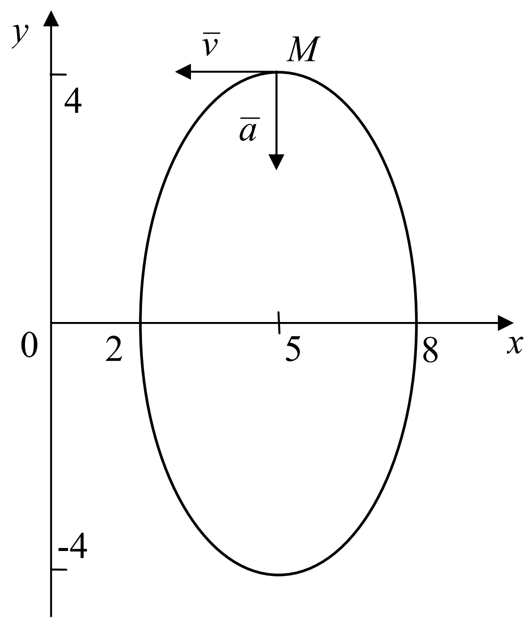


Рис.8

2. Скорость движения точки определим по формулам:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -\sin t,$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = 4\cos t\,;$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

и при $t = \dfrac{\pi}{2}$ с

$$v_x = -3 \text{ см/с},\ v_y = 0\,,\ v = 3 \text{ см/с}.$$

3. Аналогично находим ускорение:

$$a_x = -3\cos t,\ a_y = -4\sin t\,;$$

$$a = \sqrt{9\cos^2 t + 16\sin^2 t}$$

и при $t = \dfrac{\pi}{2}$ с

$$a_x = 0\,,\ a_y = -4 \text{ см/с}^2,\ a = 4 \text{ см/с}^2.$$

4. Касательное ускорение находим по формуле

$$a_\tau = \frac{v_x a_x + v_y a_y}{v}$$

и при $t = \dfrac{\pi}{2}$ с

$$a_\tau = \frac{-3 \cdot 0 + 0 \cdot (-4)}{3} = 0.$$

5. Нормальное ускорение точки $a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}$. Подставляя сюда найденные численные значения a и a_τ, получим при $t = \dfrac{\pi}{2}$ с

$$a_n = 4 \text{ см/с}^2.$$

6. Радиус кривизны эллипса $\rho = v^2 / a_n$. Подставляя сюда найденные численные значения v и a_n, находим, что в точке M (рис. 8)

$$\rho = 2{,}25 \text{ см}.$$

Пример 1.3

Дано: движение точки задано в виде $\bar{r} = 3t\bar{i} + 4t\bar{j}$.

Определить координаты точки в момент времени, когда $|\bar{r}| = 5$ м.

*Решение***.** Используя (1.3), $x=3t$, $y=4t$.

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad 25=9t^2+16t^2, \quad t=1\text{с}.$$

Следовательно, $x=3$, $y=4$.

Пример 1.4

Дано: Уравнение движения точки $\bar{r} = 2t^3\bar{i} + 4t\bar{j} + 8t^2\bar{k}$.

Найти ускорение точки при t_1=2с.

По формулам (1.4), (1.5): $\bar{V} = \dot{\bar{r}}$; $\bar{V} = 6t^2\bar{i} + 4\bar{j} + 16t\bar{k}$; ;

$$\bar{a} = \dot{\bar{V}} = \ddot{\bar{r}}; \quad \bar{a} = 12t\bar{i} + 16\bar{k}.$$

Ускорение точки найдем по проекциям на координатные оси:

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2};$$

$a_x = 12t$; $a_y = 0$; $a_z = 16$.

При t_1=2с $|\bar{a}| = \sqrt{(12\cdot 2)^2 + 16^2} = 28{,}84$ (м/с^2).

Пример 1.5

Тело с начальной скоростью 120 м/с остановилось, пройдя 1200 м. Определить время до полной остановки. По условию S = 1200 м, V_0=120 м/с, движение равнозамедленное.

Уравнение движения:

$$S = V_0 t - \frac{a_\tau t^2}{2} = V_0 t - \frac{V_0 t}{2} = \frac{V_0 t}{2},$$

$$t = \frac{2S}{V_0} = \frac{2\cdot 1200}{120} = 20\,c$$

Пример 1.6

Автомобиль движется по круглому арочному мосту радиусом 100 м по уравнению $S = 10t + t^2$.

Определить полное ускорение через 3 с движения.

Полное ускорение тела определим по формуле:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}, \qquad a_\tau = \frac{dV}{dt} = \ddot{S}; \qquad a_n = \frac{V^2}{R}.$$

$V = \dot{S} = 10 + 2t, \quad V(3) = 16$ м/с;

$a_n(3) = \dfrac{16^2}{100} = 2{,}56$ м/с^2; $\quad a_\tau = 2$ м/с^2;

$a = \sqrt{2^2 + 2{,}56^2} = 3{,}25$ м/с^2.

Пример 1.7

Материальная точка М движется по закону $\bar{r} = 0{,}5t^3\bar{i} + t^4\bar{j}$.

Определить угол между вектором ускорения и осью x в момент времени t_1 = 1с. Искомый угол определить по значению $\cos(\bar{a}, x) = \dfrac{a_x}{a}$.

$$\bar{a} = \ddot{\bar{r}}; \qquad a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2};$$

$$\dot{r} = 1{,}5t^2\bar{i} + 4t^3\bar{j}; \qquad \ddot{r} = 3t\bar{i} + 12t^2\bar{j}.$$

$a_x = 3t; \quad a_y = 12t^2$.

При t=1с $a_x(1) = 3$ (м/с^2); $a_y(1) = 12$ м/с^2.

$a(1) = \sqrt{3^2 + 12^2} = 12{,}37$ м/с^2

$\cos(\bar{a}, x) = \dfrac{3}{12{,}37} = 0{,}2425; \quad (\bar{a}, x) = \arccos 0{,}2425 \approx 76°$

Пример 1.8. Определить уравнения движения и траекторию точки M обода колеса радиуса R = 1 м, если колесо движется по прямолинейному пути с постоянной скоростью V_c = 20 м/с.

Принять, что колесо катится без скольжения; за начало координат взять начальное положение точки на пути, принятом за ось Ox.

По уравнениям движения определить скорость и ускорение точки M, а также ее касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны ρ траектории в момент $t = \dfrac{\pi}{30}$ с.

Решение

1. Обозначим точку касания колеса с рельсом в начальный момент через 0 и прием ее за начало координат, направив ось Ox вдоль рельса вправо, а ось Oy – вертикально вверх (рис. 9). Так как колесо катится без скольжения, то длина дуги $PM = R\varphi$ равна длине участка рельса $OP = V_c t$, т.е.

$$R\varphi = V_c t\ .$$

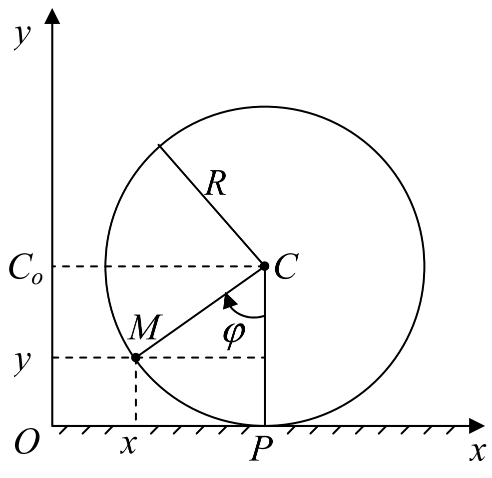


Рис. 9

Отсюда получим зависимость угла поворота от времени:

$$\varphi = \frac{V_c}{R}t = 20t\ .$$

Путь текущие координаты точки M будут x, y. Тогда

$$x = R\varphi - R\sin\varphi = 20t - 20\sin t,$$
$$y = R - R\cos\varphi = 1 - \cos 20t.$$

Эти зависимости координат x и y от времени t дают нам уравнения движения точки M, а траектория точки представляет собой ц и к л о и д у (рис. 10).

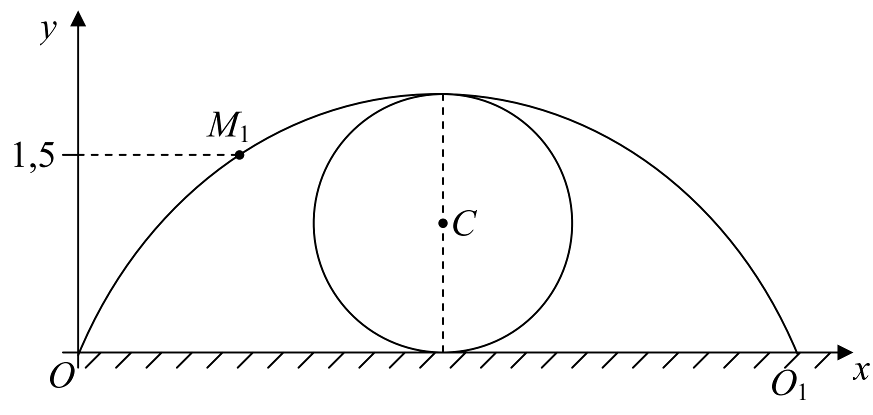


Рис. 10

2. Скорость движения точки M определим по проекциям на координатные оси:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = 2 - -20\cos 20t,$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = 20\sin 20t;$$

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$

и при $t = \dfrac{\pi}{30}$ с

$$V_x = 30\,\text{м/с},\ V_y = 10\sqrt{3}\,\text{м/с},\ V = 20\sqrt{3}\,\text{м/с}.$$

3. Аналогично находим ускорение:

$$a_x = 200\sqrt{3}\,\text{м/с}^2,\ a_y = -200\sqrt{3}\,\text{м/с}^2,\ a = 400\,\text{м/с}^2.$$

4. Определим тангенциальное ускорение:

$$a_\tau = \frac{30\cdot 200\sqrt{3} - 10\sqrt{3}\cdot 200}{20\sqrt{3}} = 200\,\text{м/с}^2.$$

5. Вычислим нормальное ускорение:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = 200\sqrt{3}\,\text{м/с}^2.$$

6. Радиус кривизны ρ при $t = \dfrac{\pi}{30}$ с (y = 1,5)

$$\rho = \frac{V^2}{a_n} = 2\sqrt{3}\,\text{м}.$$

Пример 1.9. Круглый цилиндр радиуса R вращается вокруг неподвижной оси z , причем угол поворота $\varphi = \omega t$. Точка M, выходя из M_o , движется вдоль образующей l с постоянной скоростью u. Найти траекторию, скорость и ускорение этой точки, а также определить радиус кривизны траектории (рис. 11а).

Решение

1. Пусть движущаяся точка в момент t занимает положение M, а образующая l повернулась на угол $\varphi = \omega t$. Если координаты точки M обозначить через x, y и z, то, как видно из рис. 11б, будем иметь:

$$x = R\cos\omega t,$$
$$y = R\sin\omega t.$$

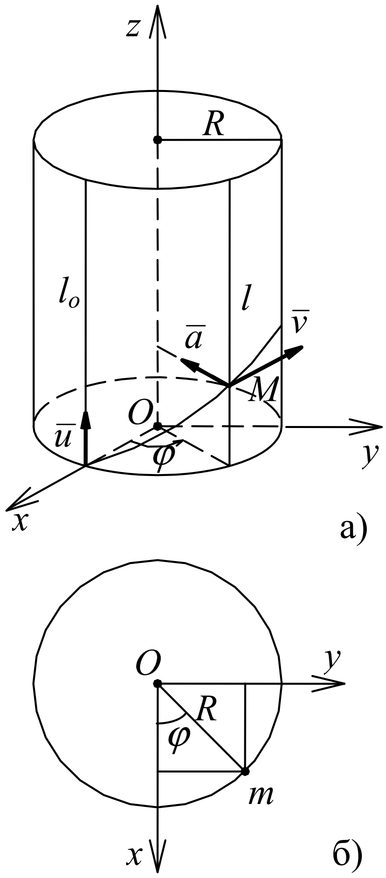


Рис. 11.

Так как скорость u постоянна, то за время t точка M переместится вдоль образующей l на расстояние $z = ut$. Итак, уравнения движения точки получаем в следующем виде: $x = R\cos\omega t, y = R\sin\omega t, z = ut$.

Траектория в этом движении точки представляет собой в и н т о в у ю л и н и ю.

Чтобы получить уравнение траектории, нужно из уравнений движения исключить t. Заменяя t в третьем уравнении через φ/ω, получим:

$$z = \frac{u}{\omega}\varphi.$$

Пусть за один поворот цилиндра вокруг оси z точка перемещается вдоль образующей на расстояние h; это расстояние h называется ш а г о м винта (винтовой линии). Полагая в предыдущем равенстве $\varphi = 2\pi$, получим:

$$h = 2\pi\frac{u}{\omega};$$

отсюда

$$\frac{u}{\omega} = \frac{h}{2\pi}$$

и, следовательно,

$$\varphi = \frac{2\pi}{h}z.$$

Подставляя это значение φ в выражения для x и y, получим уравнение траектории, т.е. уравнение винтовой линии:

$$x = R\cos\left(2\pi\frac{z}{h}\right),\ \ y = R\sin\left(2\pi\frac{z}{h}\right).$$

2. Скорость движения точки *M* определим по проекциям на координатные оси:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -R\omega\sin\omega t,$$
$$v_y = \frac{dy}{dt} = R\omega\cos\omega t,$$
$$v_z = \frac{dz}{dt} = u;$$
$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{R^2\omega^2 + u^2}.$$

Отсюда следует, что точка *M* движется с постоянной по модулю скоростью. Если обозначить углы вектора $\bar{v}$ с координатными осями через α, β и γ , то

$$\cos\alpha = \frac{v_x}{v} = -\frac{R\omega}{\sqrt{R^2\omega^2 + u^2}}\sin(\omega t),$$

$$\cos\beta = \frac{v_y}{v} = \frac{R\omega}{\sqrt{R^2\omega^2 + u^2}}\cos(\omega t),$$

$$\cos\gamma = \frac{v_z}{v} = \frac{u}{\sqrt{R^2\omega^2 + u^2}}.$$

3. Аналогично находим ускорение:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = -\omega^2 x,\ \ a_y = \frac{dv_y}{dt} = -\omega^2 y,\ \ a_z = 0;$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = R\omega^2.$$

4. Так как точка *M* движется с постоянной по модулю скоростью, то a_τ=0; поэтому ускорение a совпадает с нормальным ускорением a_n; отсюда получим равенство

$$\frac{v^2}{\rho} = a = R\omega^2,$$

из которого находим радиус кривизны траектории:

$$\rho = \frac{v^2}{R\omega^2} = \frac{R\omega^2 + u^2}{R\omega^2} = R + \frac{u^2}{R\omega^2}.$$

Следовательно, винтовая линия есть линия постоянной кривизны

2. Простейшие движения твердого тела

2.1. Поступательное движение

Поступательным движением твердого тела называется такое движение, при котором всякая прямая этого тела движется параллельно самой себе (рис. 12). Точки A и B описывают одинаковые траектории с равными скоростями и ускорениями.

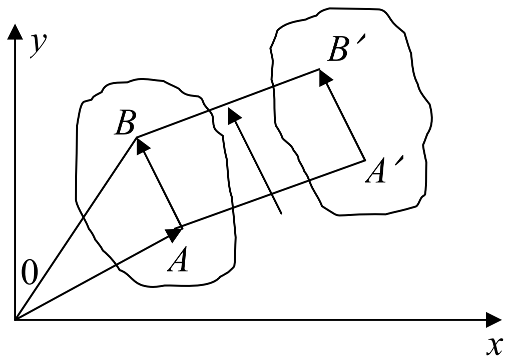


Рис. 12

Из определения

$$\bar{r}_b = \bar{r}_A + \bar{r}_{AB}, \tag{2.1}$$

где AB – const.

Дифференцируя (2.1), получим

$$\bar{v}_A = \bar{v}_B, \quad \bar{a}_A = \bar{a}_B \tag{2.2}$$

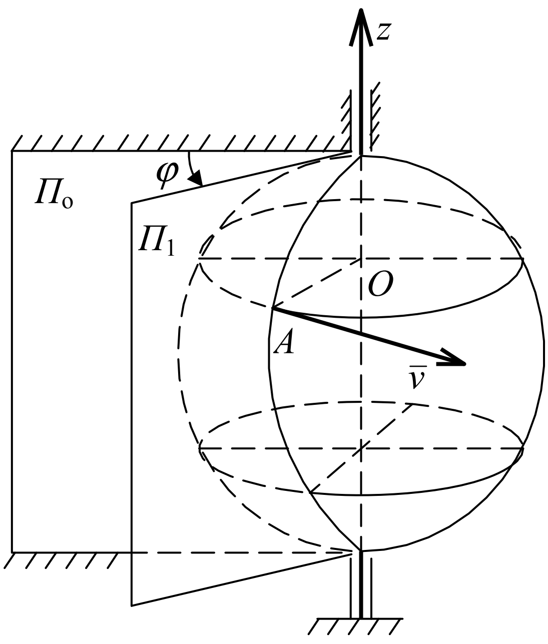
Отсюда следует, что изучение поступательного движения твердого тела сводится к изучению одной (любой) точки тела.

2.2. Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

Если твердое тело движется так, что две какие-нибудь его точки остаются неподвижными, то такое движение называется вращательным (рис. 13).

Положение вращающегося тела определяется линейным углом двугранного угла $\Pi_o\Pi_1$. Измеряется угол φ всегда в радианах. При вращении тела вокруг оси этот угол является непрерывной и однозначной функцией времени, т.е.

$$\varphi = f(t). \tag{2.3}$$



Производная от угла φ по времени называется угловой скоростью вращения тела, т.е.

$$\omega = \dot{\varphi}. \qquad (2.4)$$

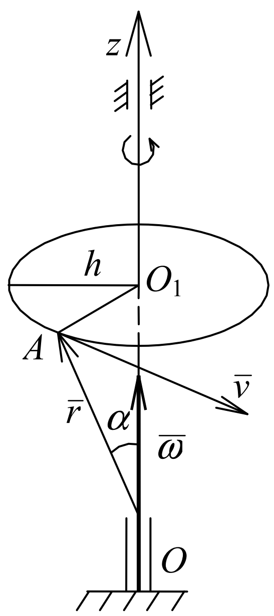
Производная от угловой скорости по времени называется угловым ускорением вращения тела, т.е.

$$\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\varphi}. \qquad (2.5)$$

При вращении тела все его точки описывают окружности. Рассмотрим точку A, находящуюся

Рис. 13

на расстоянии h от оси вращения (рис. 13). Для определения скорости и ускорения точки A воспользуемся формулами (1.15), (1.21) – (1.23)



$$V = \frac{ds}{dt} = h\dot{\varphi} = h\omega. \qquad (2.6)$$

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = h\varepsilon, \quad a_n = \frac{v^2}{\rho} = h\omega^2, \qquad (2.7)$$

$$a = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\,. \qquad (2.8)$$

Выведем теперь векторную формулу для скорости точки *A*. Будем считать, что угловая скорость является векторной величиной, а положение точки *A* определяется радиусом-вектором (рис. 14).

Рис. 14

Составляя векторное произведение $\bar{\omega} \times \bar{r}$, получим $|\bar{\omega} \times \bar{r}| = \omega r \sin\alpha = v$.

Следовательно, $\qquad \bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}. \qquad (2.9)$

Формула (2.9), называемая формулой Эйлера, позволяет при заданной угловой скорости тела определить величину и направление скоростей точек вращающегося тела.

Так как $\bar{v} = \dot{\bar{r}}$, то (2.9) можно записать в виде

$$\frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{r}. \tag{2.10}$$

При решении задач кинематики в ряде случаев пользуются подвижными осями $Oxyz$. Когда такие оси движутся вращательно, то их орты $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ зависят от времени. Орт $\bar{i}$ можно рассматривать как радиус-вектор $\bar{r}_A = \bar{i}$ точки A, лежащей на оси Ox на расстоянии единицы длины от начала 0. Тогда

$$\frac{d\bar{i}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{i}.$$

Аналогичные соотношения получим и для производных от $\bar{j}$ и $\bar{k}$. В результате находим:

$$\frac{d\bar{i}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{i}, \ \frac{d\bar{j}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{j}, \ \frac{d\bar{k}}{dt} = \bar{\omega} \times \bar{k}. \tag{2.11}$$

Равенства (2.11) называются формулами Пуассона.

Пример 2.1. Рейка 1, ступенчатое колесо 2 с радиусами R_2 и r_2 и колесо 3 радиуса R_3 , скрепленное с валом радиуса r_3 , находятся в зацеплении; на вал намотана нить с грузом 4 на конце (рис. 15). Рейка движется по закону $s_1 = f(t)$.

Определить ω_3, v_A, ε_B, a_A в момент времени $t = t_1$, если $R_2 = 6$ см, $r_2 = 4$ см, $R_3 = 8$ см, $r_3 = 3$ см, $s_1 = 3t^3$, A – точка обода колеса 3, $t_1 = 3$ с.

Решение

Условимся обозначать скорости точек, лежащих на внешних ободах колес (радиуса R_i), через v_i, а точек, лежащих на внутренних ободах (радиуса r_i), – через u_i .

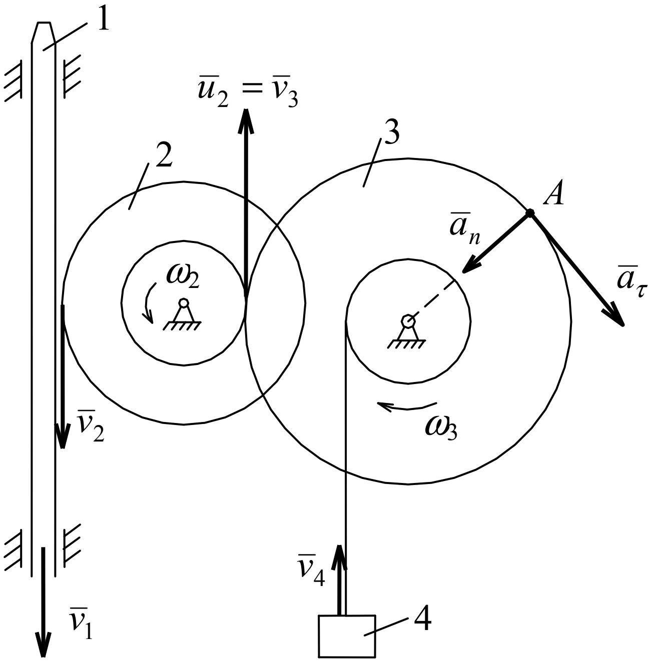


Рис. 15

1. Определяем сначала угловые скорости всех колес как функции времени t. Зная закон движения рейки 1, находим ее скорость:

$$v_i = \dot{s}_1 = 9t^2. \tag{2.12}$$

Так как рейка и колесо 2 находятся в зацеплении, то $v_2 = v_1$ или $\omega_2 R_2 = v_1$. Но колеса 2 и 3 тоже находятся в зацеплении, следовательно $u_2 = v_3$ или $\omega_2 r_2 = \omega_3 r_3$. Из этих равенств находим

$$\omega_2 = \frac{v_1}{R_2} = \frac{3}{2}t^2, \qquad \omega_3 = \frac{r_3}{R_3}\omega_2 = \frac{3}{4}t^2. \tag{2.13}$$

получим ω_3 = 6,75 с.

2. Определяем ε_3 . Учитывая второе из равенств (2.13), получим $\varepsilon_3 = \dot{\omega}_3 = 1{,}5t$. Тогда при t_1 = 3 с ε_3 = 4,5 с$^{-2}$.

3. Определяем a_A . Для точки A $\bar{a}_A = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n$, где $a_\tau = R_3\varepsilon_3$, $a_n = R_3\omega_3^2$. Тогда для момента времени t_1 = 3 с имеем

$$a_\tau = 36\,\text{см/с}^2,\ a_n = 364{,}5\,\text{см/с}^2;$$

$$a_A = 366{,}3\ \text{см/с}^2.$$

Пример 2.2. Ведущий вал 1 фрикционной передачи (рис. 16), делая n = 360 об/мин, на ходу передвигается так, что расстояние плоскости диска от оси вращения ведомого вала 2 изменяется по закону $x = 8 - 0{,}2t$ см. Определить угловую скорость и угловое ускорение ведомого вала в функции от расстояния x, а также скорость и ускорение точки B на ободе ведомого диска в момент, когда x равно радиусу ведущего диска. Радиус ведомого диска R = 17 см; ведущего – r = 5 см.

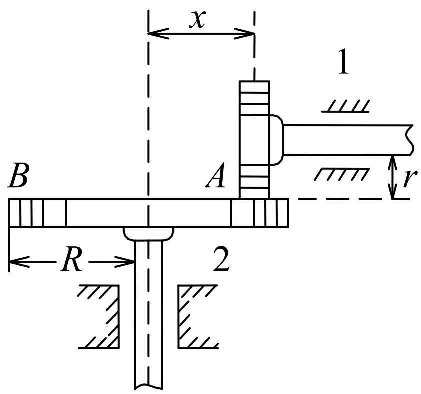


Рис. 16

Решение

Определим угловую скорость ведущего вала 1

$$\omega_1 = \frac{\pi n_1}{30} = \frac{\pi 360}{30} = 12\pi \quad \text{с}^{-1}. \qquad (2.14)$$

Приняв, что окружные скорости точки касания A ведущего и ведомого дисков одинаковы, т.е. скольжение в направлении, окружной скорости отсутствует, определим угловую скорость ω_2 ведомого диска из равенства

$$\omega_2 x = \omega_1 r,$$

откуда

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{r}{8 - 0{,}2t} \text{ с}^{-1}.$$

Подставив численные значения ω_2 и r в это соотношение, получим

$$\omega_2 = \frac{60\pi}{8 - 0{,}2t} \text{ с}^{-1}.$$

Угловое ускорение ведомого вала и диска получим, взяв первую производную от угловой скорости по времени

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{12\pi}{(8 - 0{,}2t)^2} \text{ с}^{-2}.$$

Так как по условию

$$x = 8 - 0{,}2t\ ,$$

то определим время t , через которое расстояние x ведущего диска будет равно r, т.е.

$$5 = 8 - 0{,}2t\ ,$$

и, следовательно, $t = 6$ с.

В этот момент

$$\omega_2 = \frac{150\pi}{17}\ \text{с}^{-1},\ \varepsilon_2 = \frac{12\pi}{17^2}\ \text{с}^{-2}.$$

$$v_B = 150\pi\ \text{см/с},\ a_B = \frac{75\pi}{17}\sqrt{1 + 90000\pi^2}\ \text{см/с}^2.$$

3. Сложное движение точки

3.1. Относительное, переносное и абсолютное движения

Рассмотрим простейшее сложное движение, когда точка движется относительно некоторой системы координат $Oxyz$, которая в свою очередь произвольно движется по отношению к другой системе $O_1x_1y_1z_1$, принятой условно за неподвижную. Такое движение точки по отношению к $O_1x_1y_1z_1$ называется сложным.

Относительным движением точки называется ее движение по отношению к подвижной системе отсчета. Относительной траекторией, относительной скоростью и относительным ускорением точки называют соответственно траекторию, скорость и ускорение в этом относительном движении.

Переносной скоростью точки в данный момент времени называют скорость, которую имеет точка, как неизменно связанная в этот момент времени с самой подвижной системой координат.

Абсолютным движением точки называют ее движение относительно неподвижной системы отсчета. Абсолютной скоростью, абсолютным ускорением точки называют соответственно скорость и ускорение в абсолютном движении.

При решении задач принимают следующие обозначения: $\bar{v}_{отн}$ – относительная скорость; $\bar{a}_{отн}$ – относительное ускорение; $\bar{r}$ – радиус-вектор точки в подвижной системе отсчета; $\bar{v}_{пер}$, $\bar{a}_{пер}$ – переносная скорость и переносное ускорение.

3.2. Сложение скоростей и ускорений при вращательном переносном движении

Из векторного треугольника OOA (рис. 17) имеем, что во все время движения

$$\bar{R} = 0_1 0 \cdot \bar{k} + \bar{r} = 0_1 0 \cdot \bar{k} + x\bar{i} + y\bar{j}, \qquad (3.1)$$

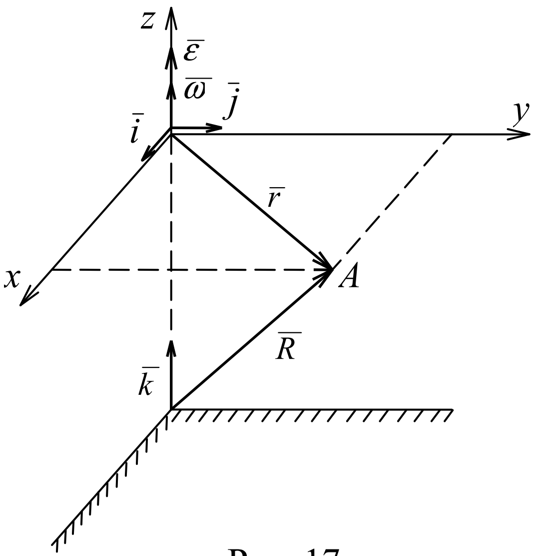


Рис. 17

где $0_1 0 = h$ – const. Когда точка A движется относительно системы Oxy, а сама система вращается вокруг неподвижной оси Oz, то x,y изменяются по величине, а $\bar{i}$, $\bar{j}$ – по направлению. Вектор $\bar{R}$ будет, следовательно изменяться и по величине, и по направлению.

Дифференцируя (3.1), получим:

$$\frac{d\bar{R}}{dt} = \left(x\frac{d\bar{i}}{dt} + y\frac{d\bar{j}}{dt} \right) + \left(\dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} \right). \qquad (3.2)$$

Так как абсолютная скорость точки A является первой производной от радиуса-вектора $\bar{R}$, то

$$\bar{v} = \left(x\frac{d\bar{i}}{dt} + y\frac{d\bar{j}}{dt} \right) + \left(\dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} \right). \qquad (3.3)$$

Это выражение преобразуем по формулам Пуассона (2.11):

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \left(x\bar{i} + y\bar{j} \right) + \left(\dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} \right) = \bar{\omega} \times \bar{r} + \left(\dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j} \right). \qquad (3.4)$$

Первое слагаемое в (3.4) определяет скорость переносного движения точки при вращении подвижной системы координат, т.е.

$$\bar{v}_{пер} = \bar{\omega} \times \left(x\bar{i} + y\bar{j} \right) = \bar{\omega} \times \bar{r}. \qquad (3.5)$$

Второе слагаемое определяет скорость точки *A* при неизменных $\bar{i}$, $\bar{j}$, т.е. ее относительную скорость

$$\bar{v}_{отн} = \dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j}. \tag{3.6}$$

В результате формула (3.4) дает

$$\bar{v} = \bar{v}_{пер} + \bar{v}_{отн}. \tag{3.7}$$

Таким образом, доказана теорема о сложении скоростей: при сложном движении абсолютная скорость точки равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей.

Теперь найдем зависимость между абсолютным, относительным и переносным ускорениями точки. Для этого воспользуемся формулами (3.5) – (3.7).

Дифференцируя (3.7) по времени, получим

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d\bar{v}_{пер}}{dt} + \frac{d\bar{v}_{отн}}{dt}. \tag{3.8}$$

Определим производную от переносной скорости (3.5):

$$\frac{d\bar{v}_{пер}}{dt} = \frac{d\bar{\omega}}{dt}\times\left(x\bar{i} + y\bar{j}\right) + \bar{\omega}\times\left(x\frac{d\bar{i}}{dt} + y\frac{d\bar{j}}{dt}\right) + \bar{\omega}\times\left(\dot{x}\bar{i} + \dot{y}\bar{j}\right) =$$

$$= \bar{\varepsilon}\times\bar{r} + \bar{\omega}\times\left(\bar{\omega}\times\bar{r}\right) + \bar{\omega}\times\bar{v}_{отн}.$$

Так как

$$\bar{a}_{пер} = \bar{a}^{\tau}_{пер} + \bar{a}^{n}_{пер} = \bar{\varepsilon}\times\bar{r} + \bar{\omega}\times\left(\bar{\omega}\times\bar{r}\right), \tag{3.9}$$

то

$$\frac{d\bar{v}_{\text{ïåð}}}{dt} = \bar{a}_{\text{ïåð}} + \bar{\omega}\times\bar{v}_{\text{îòí}}\ . \tag{3.10}$$

Найдем производную от относительной скорости (3.6):

$$\frac{d\bar{v}_{\text{îòí}}}{dt} = \ddot{x}\bar{i} + \ddot{y}\bar{j} + \left(\dot{x}\frac{d\bar{i}}{dt} + \dot{y}\frac{d\bar{j}}{dt}\right) = \bar{a}_{\text{îòí}} + \bar{\omega}\times\bar{v}_{\text{îòí}}\ . \tag{3.11}$$

Подставляя выражения (3.10), (3.11) в (3.8), получим

$$\bar{a} = \bar{a}_{пер} + \bar{a}_{отн} + 2\bar{\omega}\times\bar{v}_{отн}. \tag{3.12}$$

Эта формула показывает, что в том случае, когда переносное движение не является поступательным, абсолютное ускорение точки складывается из трех ускорений: переносного, относительного и ускорения равного $2\overline{\omega}\times\overline{v}_{отн}$, которое называется поворотным или кориолисовым уравнением.

В результате формула (3.8) дает

$$\overline{a} = \overline{a}_{пер} + \overline{a}_{отн} + \overline{a}_{кор}, \tag{3.13}$$

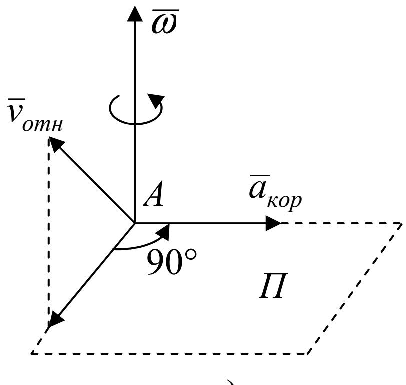
где

$$\overline{a}_{кор} = 2\overline{\omega}\times\overline{v}_{отн}. \tag{3.14}$$

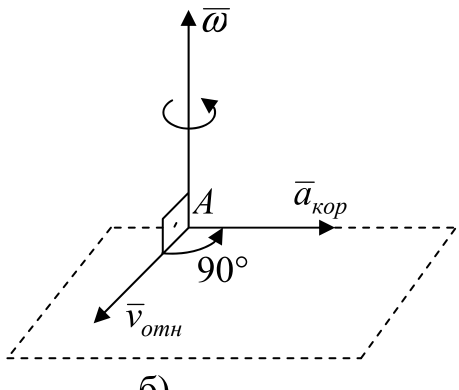
Таким образом, доказана теорема Кориолиса о сложении ускорений: в том случае, когда переносное движение не является поступательным, абсолютное ускорение точки равно векторной сумме трех ускорений: переносного, относительного и кориолисова.

В случае, когда $\overline{R} = x\overline{i} + y\overline{j} + z\overline{k}$, формула (3.13) не меняет вида.

Для определения вектора кориолисова ускорения можно воспользоваться простым правилом Н.Е. Жуковского. По этому правилу надо вектор $\overline{v}_{отн}$ спроектировать на плоскость *П*, перпендикулярную оси вращения (рис. 18,а), и повернуть эту проекцию на 90° в сторону вращения.



а)



б)

Рис. 18

Если относительная траектория – плоская кривая и перемещается все время в своей плоскости, то угол α = 90° (рис. 18,б) и в этом случае $\overline{a}_{кор} = 2\omega v_{отн}$. Кроме того, в этом случае, как видно из рис. 18,б, направление $\overline{a}_{пер}$ можно найти, повернув вектор $\overline{v}_{отн}$ на 90° в сторону переносного вращения.

Пример 3.1. Кулиса *OA* вращается с постоянной угловой скоростью ω (рис. 19). По прорези кулисы скользит ползун *B* с постоянной скоростью u . Определить абсолютное ускорение ползуна *B* в зависимости от его расстояния *x* до оси *O*.

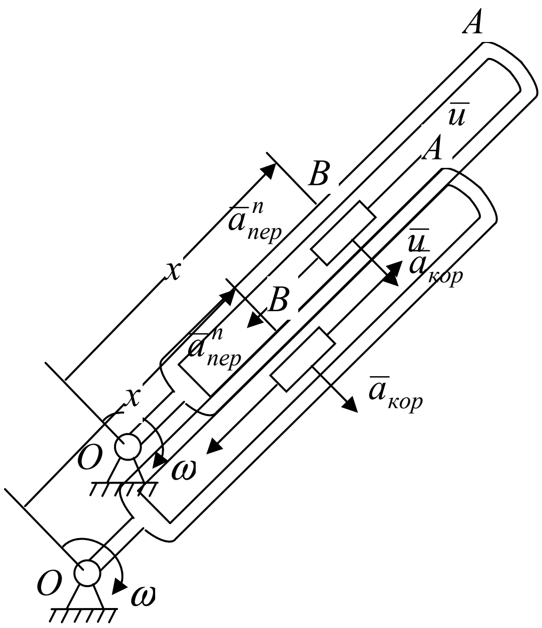


Рис. 19

Решение

Так как $v_{отн} = u$, то $a_{отн} = 0$. Переносное ускорение $a_{пер}$ ползуна равно ускорению той точки кулисы, с которой в данный момент совпадает ползун. Так как эта точка кулисы движется по окружности радиуса *OA*=*x*, то $a_{пер} = a^n_{пер} = \omega^2 x$, а кориолисово ускорение $a_{кор} = 2\omega u$. В данной задаче $\bar{a}_{кор}$ перпендикулярно к $\bar{a}^n_{пер}$.

Следовательно, $a = \sqrt{a^2_{пер} + a^2_{кор}} = \omega\sqrt{\omega^2 x^2 + 4u^2}$.

Пример 3. 2. В кулисном механизме (рис. 20а) рейка 1 движется со скоростью $v_1 = \sqrt{3}$ см/с и ускорением $a_1 = \sqrt{3}$ см/с^2. В тот момент, когда α = 30, конец рейки 2 удален от направляющей рейки 1 на расстояние *BO* = 3 см, а рейка 2 имеет скорость $v_2 = 5$ см/с и ускорение $a_2 = 1$ см/с^2. Определить в этот момент угловое ускорение ε_3 кулисы 3 и ускорение ползуна *B* относительно кулисы.

Решение

В данной задаче известны абсолютная скорость $v_B = v_2$ и абсолютное ускорение $a_B = a_2$ ползуна *B*. Чтобы определить искомые величины, воспользуемся теоремой о сложении скоростей и теоремой Кориолиса.

По первой теореме $\bar{v}_2 = \bar{v}_{Вотн} + \bar{v}_{Впер}$.

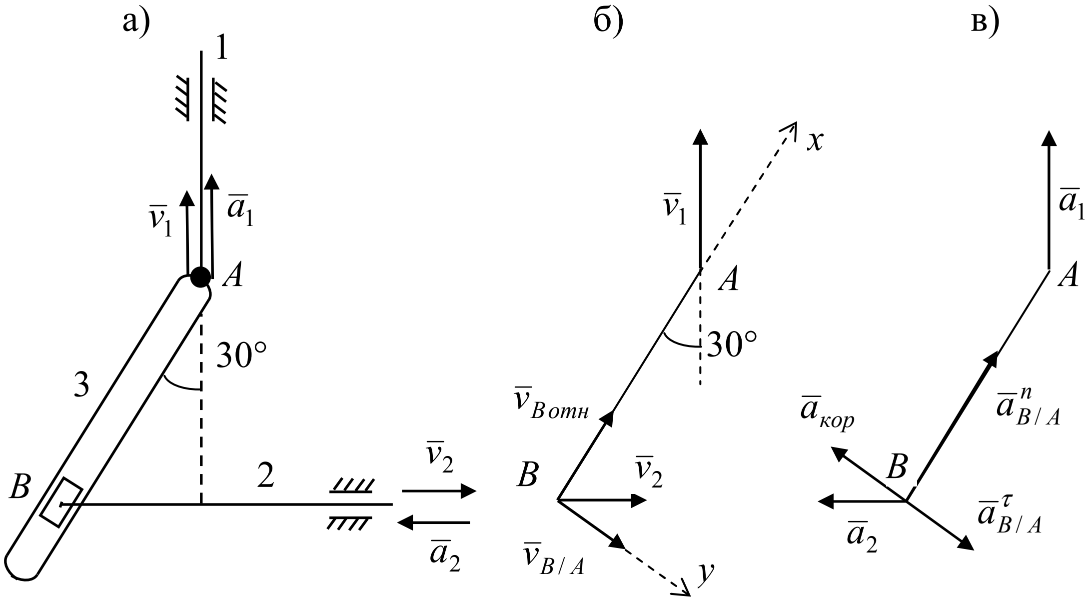


Рис. 20

Так как кулиса 3 совершает мгновенное вращение вокруг A с угловой скоростью ω_3 и мгновенное поступательное движение со скоростью $\overline{v}_A = \overline{v}_1$, то $\overline{v}_{Bпер} = \overline{v}_{B/A} + \overline{v}_A$, следовательно

$$\overline{v}_2 = \overline{v}_{Bотн} + \overline{v}_{B/A} + \overline{v}_A, \tag{3.15}$$

где $\overline{v}_{B/A} = \omega_3 AB = 6\omega_3$, $v_A = v_1 = 3$ см/с.

Проектируя векторное уравнение (3.15) на координатные оси (рис. 20б), получим

$$v_{B/A} = \frac{\sqrt{3}}{2}v_2 + \frac{1}{2}v_1 = 3\sqrt{3}\ \text{см/с},$$

$$v_{Bотн} = \frac{1}{2}v_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}v_1 = 1\ \text{см/с}.$$

Отсюда

$$\omega_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}\,\text{с}^{-1},\ a_{кор} = 2\omega_3 v_{Bотн} = \sqrt{3}\ \text{см/с}^2.$$

По теореме Кориолиса

$$\overline{a}_B = \overline{a}_{Bотн} + \overline{a}_{Bпер} + \overline{a}_{кор}. \tag{3.16}$$

Переносное ускорение $\overline{a}_{Bпер}$ определим по формуле

$$\overline{a}_{Bпер} = \overline{a}_A + \overline{a}^n_{B/A} + \overline{a}^\tau_{B/A}. \qquad (3.17)$$

Из (3.16) и (3.17) составим векторное уравнение

$$\overline{a}_B = \overline{a}_{Bотн} + \overline{a}_A + \overline{a}^n_{B/A} + \overline{a}^\tau_{B/A} + \overline{a}_{кор}. \qquad (3.18)$$

Здесь

$$a_A = a_1 = \sqrt{3}\,\text{см/с}^2,\ a_B = a_2 = 1\,\text{см/с}^2,$$

$$a^n_{Bотн} = \omega_3^2 AB = 4{,}5\ \text{см/с}^2,\ a_{кор} = \sqrt{3}\,\text{см/с}^2,$$

Проектируя (3.18) на координатные оси (рис. 20в), находим

$$a^\tau_{B/A} = a_{кор} + a_1 \sin 30^\circ - a_2 \cos 30^\circ = \sqrt{3}\,\text{см/с}^2,$$

$$a_{Bотн} = -a_2 \sin 30^\circ - a_1 \cos 30^\circ - \overline{a}^n_{B/A} = -6{,}5\,\text{см/с}^2.$$

Отсюда

$$\varepsilon_3 = \frac{\overline{a}^\tau_{B/A}}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{6}\,\text{с}^{-2},\ a_{Bотн} = -6{,}5\,\text{см/с}^2.$$

В некоторых учебниках и задачниках принимаются следующие обозначения: $\overline{v}_r$ – относительная скорость; $\overline{a}_r$ – относительное ускорение; $\overline{v}_e, \overline{a}_e$ – переносная скорость и переносное ускорение; $a_к$ – кориолисово ускорение.

Пример 3.3. Шар радиуса R вращается вокруг оси z с постоянной угловой скоростью ω (рис. 21). По меридиану AB движется точка M с постоянной по модулю относительной скоростью v_r. Найти проекции абсолютного ускорения точки M на ось z и на подвижные оси x и y, зная широту φ точки M в данный момент.

Решение

Так как переносное движение есть вращение вокруг неподвижной оси z с постоянной угловой скоростью ω, то переносное ускорение $\overline{a}_e$ точки M направлено по радиусу MO_1 параллели ab; если обозначим этот радиус через r, то $r = R\cos\varphi$; следовательно,

$$a_e = R\cos\varphi\omega^2.$$

В относительном движении точка *M* движется по окружности меридиана радиуса R с постоянной по модулю скоростью v_r; следовательно, относительное ускорение a_r направлено по радиусу *MO* этой окружности и по модулю

$$a_r = \frac{v_r^2}{R}.$$

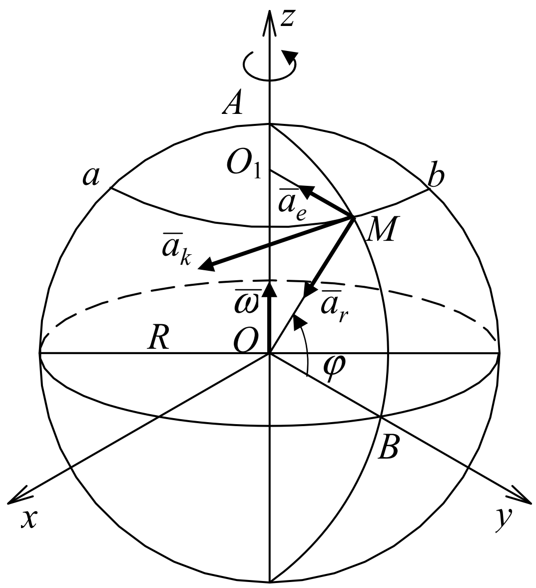


Рис. 21

Кориолисово ускорение $\overline{a}_к$ перпендикулярно к плоскости, в которой лежат векторы $\overline{\omega}$ и $\overline{v}_r$; следовательно, вектор $\overline{a}_к$ направлен перпендикулярно к плоскости меридиана *AB* (по касательной к параллели *ab*) в ту же сторону, что и ось *Ox*, как указано на рис. 21. Так как угол между векторами $\overline{\omega}$ и $\overline{v}_r$ равен φ, то $a_к = 2\omega v_r \sin\varphi$.

Согласно теореме Кориолиса, имеем:

$$\overline{a} = \overline{a}_e + \overline{a}_r + \overline{a}_к.$$

Отсюда следует, что проекция абсолютного ускорения $\overline{a}$ на какую-нибудь ось равна алгебраической сумме проекций ускорений $\overline{a}_e$, $\overline{a}_r$ и $\overline{a}_к$ на ту же ось. Составим проекции этих ускорений

$$a_x = a_{ex} + a_{rx} + a_{кx} = 2\omega v_r \sin\varphi,$$

$$a_y = a_{ey} + a_{ry} + a_{кy} = -\left(R\omega^2 + \frac{v_r^2}{R}\right)\cos\varphi,$$

$$a_z = a_{ez} + a_{rz} + a_{кz} = -\frac{v_r^2}{R}\sin\varphi.$$

По найденным трем проекциям вектора абсолютного ускорения определим его модуль

$$a=\sqrt{2\omega^2 v_r^2\left(1+\sin^2\varphi\right)+R^2\omega^2\cos^2\varphi+\frac{v_r^4}{R^2}}.$$

Кориолисова сила в данном случае равна $2\omega v_r \sin\varphi$ и направлена противоположно ускорению $\overline{a}_к$. Действие этой силы, возникающей вследствие суточного вращения Земли, объясняется так называемым законом Бэра, т.е. размывание правых берегов рек в Северном полушарии, текущих в направлении меридиана.

Точно так же колеса движущегося в направлении меридиана электровоза оказывают горизонтальное давление на правый рельс. При вычислении этого давления под ω нужно, очевидно, понимать угловую скорость суточного вращения Земли, а под φ – географическую широту данного места земной поверхности.

Пример 3.4. Прямая *OA* вращается вокруг неподвижной точки *O* с постоянной угловой скоростью ω ; точка *M* движется по этой прямой с постоянной относительной скоростью $\overline{v}_r$. Определить ее абсолютное ускорение (рис. 22).

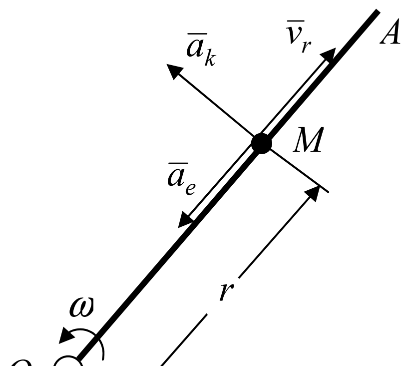


Рис. 22

Решение

Переносное движение есть равномерное вращение прямой *OA* вокруг точки *O*; следовательно,

$$a_e^n = OM\omega^2 = r\omega^2,$$

причем ускорение a_e^n направлено к центру вращения *O*; относительное движение точки *M* есть движение прямолинейное и равномерное; следовательно

$$a_r = 0.$$

Для определения вектора кориолисова ускорения воспользуемся правилом

Н.Е.Жуковского. По этому правилу повернем вектор относительной скорости $\bar{v}_r$ на 90° в сторону переносного вращения, как показано на рис. 22. Модуль этого вектора $a_к = 2\omega v_r$. На основании теоремы Кориолиса

$$\bar{a} = \bar{a}_e + \bar{a}_r + \bar{a}_к = \bar{a}_e + \bar{a}_к, \quad a = \omega\sqrt{r^2\omega^2 + 4v_r^2}\ .$$

Предположим, что вместо прямой *OA* вращается полая цилиндрическая трубка, в которой движется шарик *M*. Согласно сказанному в задаче 3.4, заключаем, что шарик оказывает давление на правую образующую цилиндрической трубки.

Пример 3.5

Прямоугольная пластинка вращается вокруг вертикальной оси по закону $\varphi_e = \dfrac{\pi}{3}t$. По одной из сторон пластинки движется точка М по закону $O\breve{M} = 2t$. Определить ускорение Кориолиса для точки М

Решение

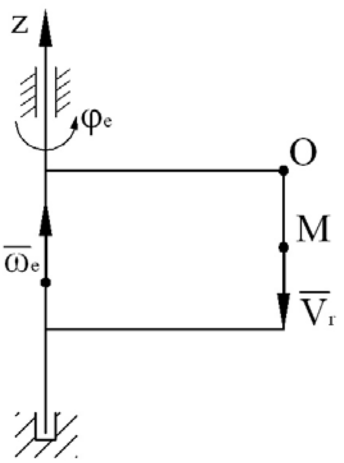


Рис. 23

Точка М совершает сложное движение: относительное движение по закону $S = O\breve{M} = 2t$ вдоль стороны пластинки, переносное – вращение вокруг оси *z* по закону $\varphi_e = \dfrac{\pi}{3}t$.

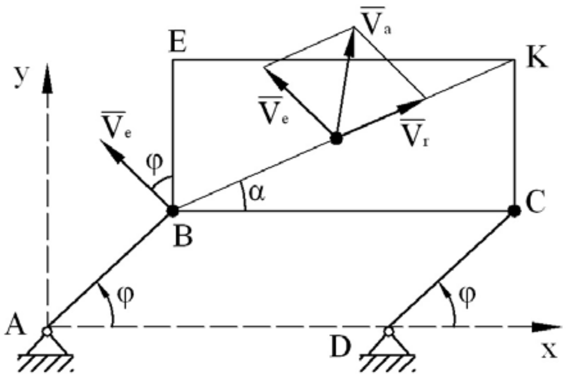
$$a_{кор} = 2\omega_e \cdot V_r \sin\alpha,$$

где $\omega_e = \dot{\varphi}_e = \dfrac{\pi}{3}$; $V_r = \dot{S} = 2$; α = 180°.

Тогда $a_{кор} = 2\cdot\dfrac{\pi}{3}\cdot 2\sin 180° = 0$ м/с^2.

Следовательно, кориолисово ускорение отсутствует

Пример 3.6



Механизм расположен в плоскости чертежа. Определить абсолютную скорость точки М в момент времени

t_1 =1с, если ее движение по пластинке задано уравнением $S = BM = 0{,}1t^2$; кривошипы $AB = CD = 0{,}5$ м вращаются по закону φ = 0,25πt, α = 30°.

Рис. 24

Решение

Примем движение точки по диагонали пластины относительным: $S = 0{,}1t^2$. Движение точки вместе с пластиной – переносное. Скорость точки в сложном движении определяется (3.7):

$$\overline{V}_a = \overline{V}_r + \overline{V}_e ,$$

где $V_r = \dot{S} = 0{,}2t$; $V_r(1) = 0{,}2$ м/с;

(направление $\overline{V}_r$ указано на рис. 24);

$V_e = V_B = V_M$,

т. к. $AB \| DC$ в любой момент времени и пластина $BCEK$ движется поступательно;

$V_e = \omega \cdot AB = \dot{\varphi} AB = 0{,}25\pi \cdot 0{,}5 = \dfrac{\pi}{8}$ м/с;

(направление $V_e \perp AB$ показано на рис. 24).

$V_a = \sqrt{V_r^2 + V_e^2 + 2V_r V_e \cos\beta}$;

$V_a(1) = \sqrt{0{,}2^2 + \left(\dfrac{\pi}{8}\right)^2 + 2 \cdot 0{,}2 \cdot \dfrac{\pi}{8} \cdot \cos 105^\circ} = 0{,}39$ м/с

Спроектируем векторное равенство (3.7) на оси *x*, *y*:

$$V_x = V_{rx} + V_{ex} = V_r \cos\alpha - V_e \sin\varphi;$$

$$V_y = V_{ry} + V_{ey} = V_r \sin\alpha + V_e \cos\varphi;$$

$$V_x(1) = 0{,}2\cos 30° - \frac{\pi}{8}\sin\frac{\pi}{4} = -0{,}105 \text{ м/с}$$

$$V_y(1) = 0{,}2\sin 30° + \frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{4} = 0{,}378 \text{ м/с}$$

$$V_a = \sqrt{V_x^2 + V_y^2};$$

$$V_a(1) = \sqrt{(-0{,}105)^2 + (0{,}378)^2} = 0{,}39 \text{ м/с}$$