Министерство образования и науки РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Ростовский государственный строительный университет»

Утверждено на заседании
кафедры технической механики
6 мая 2013 г.

Методические указания
на тему: «Решение конкурсных задач по теоретической механике»
Для подготовки бакалавров направления 270800.62
«Строительство»

Ростов-на-Дону
2013

УДК 531.01

Методические указания на тему:«Решение конкурсных задач по теоретической механике». – Ростов-на-Дону: Рост.гос. строит. ун - т, 2013. – 20 с.

Рассматривается ряд задач теоретической механики, которые использовались на зональных и Всероссийских студенческих олимпиадах последних лет (2008 - 2013 годы).

УДК 531.01

Составитель: доц. С.И. Углич

Редактор Н.Е. Гладких

Темплан 2013 г., поз. 61

Подписано в печать 6.12.11. Формат 60×84 1/16

Ризограф. Бумага писчая. Уч.-изд.л. 1,3.

Тираж 100 экз. Заказ 48/12

Редакционно-издательский центр РГСУ

344022, Ростов-на-Дону, ул. Социалистическая, 162

Среди задач, которые предлагаются на олимпиадах различных уровней, представлены все разделы теоретической механики, - статика, кинематика и динамика. Обычно половина конкурсных задач из раздела динамика. В этих методических указаниях сосредоточимся, в основном, на динамике.

Задача 1

Колесо 1 радиусом R и массой m_1жестко скреплено с рейкой и движется поступательно. Шестерня 2 (однородный диск радиусом rи массой m_2) находится в зацеплении с колесом 1 и связана водилом 3 шарнирно с колесом 1 в точке O. Водило 3 имеет постоянную угловую скорость ω, в начальный момент φ = π/2 рад. (К водилу приложена пара сил с моментом L).

Определить движение колеса и момент пары сил L, который обеспечивает вращение водила с постоянной угловой скоростью ω, и сумму реакций опор A и B при φ = π рад, Принять $m_1=4m_2$, $m_2=$ 1 кг, R=3r, r=0,05 м, ω=6 рад/с. Трением в опорах и массой водила пренебречь, механизм находится в вертикальной плоскости.

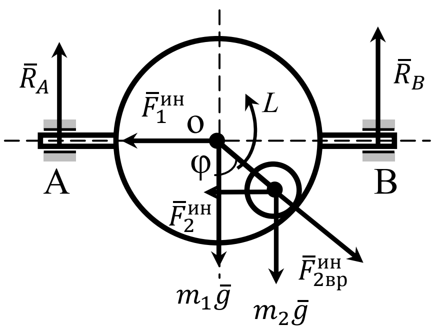

Рис.1

Применим принцип Даламбера. Предположим, что в данный момент колесо 1 движется с ускорением a_1 вправо, тогда к центру этого колеса нужно приложить силу инерции, направленную влево. Так как водило вращается с постоянной угловой скоростью, то и шестерня 2 имеет постоянную угловую скорость, - следовательно система сил инерции действующая на шестерню приводится к двум силам.

$$F_1^{\text{ин}} = m_1\, a_1\,.$$

Ускорение центра шестерни $\bar{a}_2 = \bar{a}_1 + \bar{a}_{21}$.

Поэтому сила инерции, действующая на шестерню, раскладывается на две составляющие.

$$F_2^{\text{ин}} = m_2\, a_1, F_{2\text{вр}}^{\text{ин}} = m_2\omega^2(R-r)$$

Составим сумму проекций всех сил на вертикальную ось.

$$R_A + R_B - m_1 g - m_2 g - F_{2\text{вр}}^{\text{ин}} cos\varphi = 0.$$

У нас φ = π/2 + ωt. При φ = π получим:

$$R_A + R_B = m_1 g + m_2 g - F_{2\text{вр}}^{\text{ин}}$$

Или $R_A + R_B = m_1 g + m_2 g - m_2 \omega^2 (R - r) = 45{,}45$ н.

Составим сумму проекций всех сил на горизонтальную ось.

$$-F_2^{\text{ин}} - F_1^{\text{ин}} + F_{2\text{вр}}^{\text{ин}} sin\varphi = 0,$$

$$-m_2 a_1 - m_1 a_1 + m_2 \omega^2 (R - r) sin\varphi = 0.$$

$$5a_1 = 3{,}6 \sin\left(\frac{\pi}{2} + \omega t\right).$$

Или $\ddot{x}_1 = 0{,}72 cos6t \Rightarrow \dot{x}_1 = 0{,}12 sin6t + C_1$.

Но начальное значение скорости должно равняться нулю $\Rightarrow C_1 = 0$.

Далее $x_1 = -0{,}02 cos6t + C_2$.

Пусть при t=0 $x_1 = 0$, тогда $C_2 = 0{,}02$

Отсюда $x_1 = 0{,}02(1 - cos6t)$.

Для дальнейшего нам нужен дополнительный чертеж.

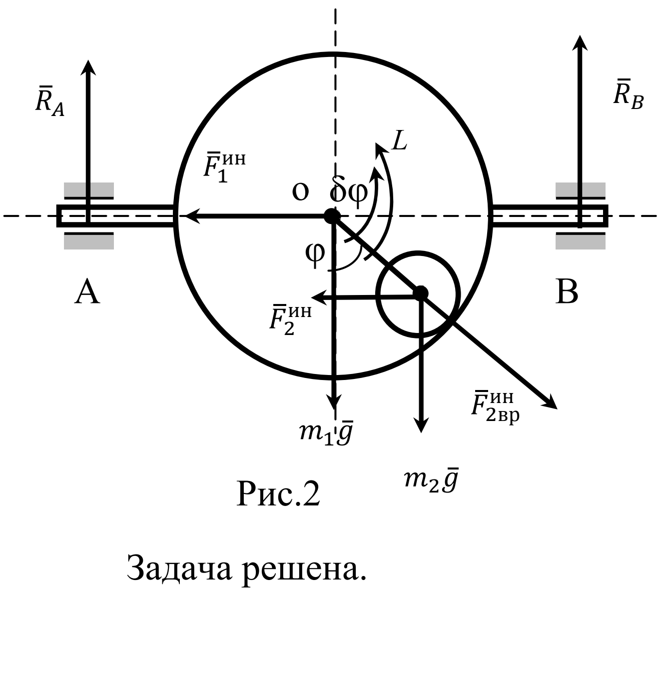

Рис.2

Применим принцип возможных перемещений. Зададим водилу угол поворота δφ.

Тогда

$$\delta A = L\delta\varphi - F_2^{\text{ин}}(R - r)cos\varphi\delta\varphi - m_2 g(R - r)sin\varphi\delta\varphi = 0$$

Отсюда

$$L = (R - r)(F_2^{\text{ин}} cos\varphi + m_2 g sin\varphi)$$

Задача решена.

Задача 2

Тонкая однородная сферическая оболочка весом P и с центром тяжести в геометрическом центре O имеет два отверстия в точках A и B, через которые продет тонкий стержень, закрепленный на концах. От скольжения вдоль стержня оболочка удерживается силами трения, а от вращения – нитью, закрепленной в точке E и направленной вдоль оси Oy. Известно, что точка A находится в плоскости xOy и угол AOC = α, а точка B находится в плоскости xOz и угол BOK = β. Найти силу натяжения нити.

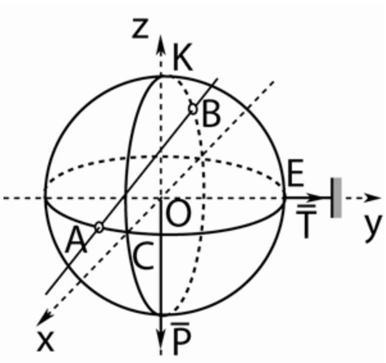

Рис.3

Решение.

На рисунке не изображены силы реакций в точках A и B, а также силы трения, приложенные в тех же точках.

Идея решения состоит в том, чтобы вычислить сумму моментов всех сил относительно оси AB. Относительно этой оси дают моменты только силы P и T.

Момент силы относительно оси будем находить как проекцию вектор-момента силы относительно некоторой точки оси на эту ось.

Для начала выпишем координаты точек A и B.

$$A(R\cos\alpha;\ -R\sin\alpha;\ 0);$$

$$B(-R\sin\beta;\ 0;\ R\cos\beta).$$

Теперь$\overline{AB}(-R\sin\beta - R\cos\alpha; R\sin\alpha; R\cos\beta + R\sin\alpha)$.

$$AO(-R\cos\alpha; R\sin\alpha;\ 0).\ \bar{P}(0; 0; -P).$$

Вычислим момент силы P относительно точки A.

$$\bar{m}_A(\bar{P}) = \overline{AO} \times \bar{P} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ -Rcos\alpha & Rsin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{vmatrix} = -\bar{\imath} \cdot PRsin\alpha - \bar{\jmath} \cdot PRcos\alpha$$

$$= -PR(\bar{\imath} \cdot sin\alpha + \bar{\jmath} \cdot cos\alpha).$$

$\bar{T}(0; T; 0)$.

Вычислим момент силы T относительно точки A.

$$\bar{m}_A(\bar{T}) = \overline{AE} \times \bar{T} = \overline{AO} \times \bar{T} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ -Rcos\alpha & Rsin\alpha & 0 \\ 0 & T & 0 \end{vmatrix} = -\bar{k}RTcos\alpha$$

Чтобы спроектировать вектор на ось AB его нужно скалярно умножить на единичный вектор оси AB.

$$\bar{e} = \frac{\overline{AB}}{|\overline{AB}|} = \frac{1}{|\overline{AB}|}(-Rsin\beta - Rcos\alpha; Rsin\alpha; Rcos\beta + Rsin\alpha)$$

$\sum m_{AB}\,(\bar{F}_i) = \bar{m}_A(\bar{P}) \cdot \bar{e} + \bar{m}_A(\bar{T}) \cdot \bar{e} = \frac{1}{|\overline{AB}|}(PR^2 sin\alpha sin\beta + PR^2 sin\alpha cos\alpha - PR^2 sin\alpha cos\alpha - TR^2 cos\alpha cos\beta) = 0.$

Отсюда $T = Ptg\alpha \cdot tg\beta$.

Задача решена.

Разберем несколько задач из теории удара, которая регулярно представлена на олимпиадах по теоретической механике, но, в силу недостатка лекционных часов слабо представлена в курсе теоретической механики. Кратко изложим основные положения теории.

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ УДАРА

Основное уравнение теории удара

При движении тела под действием обычных сил, скорости точек тела изменяются непрерывно, т. е. каждому бесконечно малому промежутку времени соответствует бесконечно малое приращение скорости. Запишем теоремуоб изменении количества движения точки в конечной форме:

$$m(\bar{U} - \bar{V}) = \int_0^\tau \bar{F} dt \ (1)$$

Здесь $\bar{U}$ – конечное значение скорости точки, $\bar{V}$ – начальное значение скорости точки, $\bar{F}$ – равнодействующая всех сил, приложенных к точке.

Отсюда видно, что когда время τ бесконечно мало (стремится к нулю), то при обычных силах и приращение скорости будет тоже величиной бесконечно малой (стремящейся к нулю).

Однако если в числе действующих сил будут очень большие силы (порядка 1/τ), то приращение скорости за малый промежуток времени τ окажется величиной конечной.

Явление, при котором скорости точек тела за очень малый (близкий к нулю) промежуток времени τ изменяются на конечную величину, называется ударом. Силы, при действии которых происходит удар, будем называть ударными силами. Промежуток времени τ, в течение которого происходит удар, назовем временем удара.

Так как ударные силы очень велики и за время удара изменяются в значительных пределах, то в теории удара в качестве меры взаимодействия тел рассматривают не сами ударные силы, а их импульсы.

$$\bar{S} = \int_0^\tau \bar{F} dt \quad (2)$$

Ударный импульс является величиной конечной. Импульсы неударных сил за время τ будут величинами очень малыми и ими практически можно пренебречь.

Тогда теорема об изменении количества движения точки при ударе примет вид:

$$m(\bar{U} - \bar{V}) = \bar{S}^{уд} \quad (3)$$

т. е. изменение количества движения материальной точки за время удара равно сумме действующих на точку ударных импульсов. Уравнение, полученное выше, является основным уравнением теории удара и играет в теории удара такую же роль, как основной закон динамики при изучении движений под действием неударных сил.

В заключение отметим, что перемещение точки за время удара будет равно , т. е. величине очень малой, которой практически можно пренебречь.

Итак, из всех полученных результатов вытекает следующее:

1) действием неударных сил (таких, например, как сила тяжести) за время удара можно пренебречь;

2) перемещениями точек тела за время удара можно пренебречь и считать тело во время удара неподвижным;

3) изменения скоростей точек тела за время удара определяются основным уравнением теории удара.

ОБЩИЕ ТЕОРЕМЫ ТЕОРИИ УДАРА

Рассмотрим, какой вид принимают общие теоремы динамики для системы материальных точек при ударе.

1. Теорема об изменении количества движения системы при ударе.

Уравнение, полученное в теореме об изменении количества движения, сохраняет свой вид и для случая удара. Но так как импульсами обычных сил при ударе пренебрегают, то в правой части останутся только ударные импульсы. Следовательно, при ударе

$$\bar{Q}_1 - \bar{Q}_0 = \sum_{i=1}^{n} \bar{S}_i^e \quad (4)$$

т. е. изменение количества движения системы за время удара равно сумме всех внешних ударных импульсов, действующих на систему.

В дальнейшем будем ударный импульс обозначать просто символом $\bar{S}_i^e$, так как импульсы неударных сил в теории удара не рассматриваются.

Если геометрическая сумма всех внешних ударных импульсов равна нулю, то, как видно из уравнения, количество движения системы за время удара не изменяется. Следовательно, внутренние ударные импульсы не могут изменить количества движения всей системы.

2. Теорема об изменении главного момента количества движения системы (теорема моментов) при ударе.

Теорема моментов принимает для случая удара вид, несколько отличный от полученного ранее; объясняется это тем, что точки системы за время удара не перемещаются. Рассмотрим систему, состоящую из n материальных точек.

Обозначим равнодействующую внешних ударных импульсов, действующих на точку с массой m_k, через $\bar{S}_i^e$, а равнодействующую действующих на ту же точку внутренних ударных импульсов — через $\bar{S}_i^i$, $\bar{K}_o^1$ – кинетический момент системы относительно точки О после удара, а $\bar{K}_o^0$ - кинетический момент системы относительно точки О до удара.

ТочкаО либо неподвижна, либо центр масс системы.

Тогда теорема моментов при ударе примет вид:

$$\bar{K}_o^1 - \bar{K}_o^0 = \sum_{i=1}^{n} \bar{m}_o\,(\bar{S}_i^e) \quad (5)$$

Коэффициент восстановления при ударе

Значение ударного импульса, появляющегося при соударении двух тел, зависит не только от их масс и скоростей до удара, но и от упругих свойств соударяющихся тел; эти свойства при ударе характеризуют величиной, называемой коэффициентом восстановления.

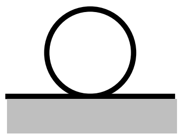

Рис. 4

Рассмотрим шар, падающий вертикально на неподвижную горизонтальную жесткую плиту. Для прямого удара, который при этом произойдет, можно различать две стадии. В течение первой стадии скорости частиц шара, равные в момент начала удара $\bar{V}$ (движение шара считаем поступательным), убывают до нуля. Шар при этом деформируется и вся его начальная кинетическая энергия переходит во внутреннюю потенциальную энергию деформированного тела. Во второй стадии удара шар под действием внутренних сил (сил упругости) начинает восстанавливать свою форму; при этом его внутренняя потенциальная энергия переходит в кинетическую энергию движения частиц шара. В конце удара скорости частиц будут равны $\bar{U}$.

Однако полностью механическая энергия шара при этом не восстанавливается, так как часть ее уходит на сообщение шару остаточных деформаций и его нагревание. Поэтому скорость *U* будет меньше *V*. Введем коэффициент восстановления при ударе:

$$k = \frac{U}{V} \quad (6)$$

Очевидно что значения k находятся в пределах от нуля до единицы. Если *k*= 0, то удар называется *абсолютно неупругим*, если *k*= 0, то удар называется *абсолютно упругим.*

Теорема Карно

При абсолютно неупругом ударе (k = 0) потеря кинетической энергии системы равна кинетической энергии, которую бы имела система, если бы ее точки двигались с потерянными скоростями.

Потерянная скорость точки это разность междускоростью точки в начале и вконце удара.

В общем случае потерю кинетической энергии следует умножить на коэффициент $\frac{1-k}{1+k}$ (теорема Карно).

Задача 3

Однородный стержень длиной *l* = 2 м и массы 4m находится в состоянии покоя на гладкой горизонтальной поверхности. Материальная точка массы m движется со скоростью V=23 м/с, направленной перпендикулярно к стержню, ударяет по нему в точке К, расположенной на расстоянии *b=l/4* от центра масс стержня.

Определить угловую скорость и скорость центра масс, МЦС стержня после удара, если удар был абсолютно неупругим.

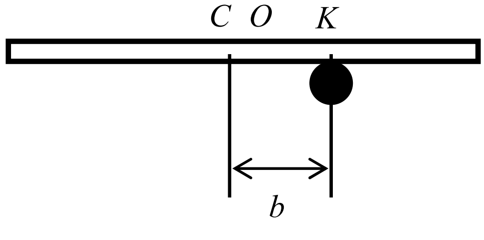

Рис. 5

Применим вначале теорему об изменении количества движения системы при ударе. Пусть точка О – центр масс системы. Перед ударом стержень неподвижен, а точка движется со скоростью V перпендикулярно стержню. Отсюда

$5m*V_o=m*23$ $V_o=23/5=4,6$ м/с.

Здесь $5m*V_o$ – количество движения всей системы после удара в проекции на ось, перпендикулярную стержню, m*23 количество движения точки до удара в проекции на ту же ось. Так как удар внутренний, то количество движения системы во время удара не меняется.

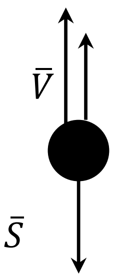

Рис. 6

Рассмотрим отдельно движение точки. Скорость до удара – V, после удара – U, S – ударный импульс.

m(U – V) = -S

a) m(23 – U) =S

Рассмотрим движение стержня, до удара он был неподвижен, после удара скорость центра стержня – V_C, скорость точки K - V_K , а угловая скорость - ω. В точке K действует ударный импульс S.

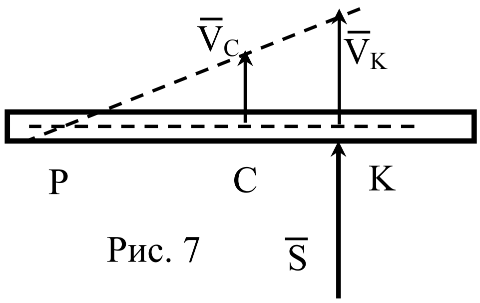

Рис. 7

Уравнения примут вид:

b) $4mV_C = S$;

c) $I_c\omega = S*CK$. $I_c = 4m*l^2/12 = m*4/3$.

Учтем что удар абсолютно неупругий $\Rightarrow U = V_K$.

$V_K = V_C + \omega*CK$

Из b и c получим $\omega = 1,5\ V_C$.

Уравнение a дает $m(23 - V_C – 0,5\omega) =4mV_C$.

Или 23 - ω*2/3 -0,5*ω = ω*8/3 ⇒ω = 6 1/с ⇒V_C = 4м/с. ⇒V_K = 7 м/с.

Построим МЦС для стержня. Это точка P. Обозначим PC = x. Из подобия треугольников получим:

$$\frac{V_C}{x} = \frac{V_K}{x + 0{,}5}$$

Отсюда x = 2/3 м. Задача решена.

Задача 4

Эллиптический маятник состоит из ползуна ***M***, который может скользить вдоль горизонтальной направляющей, и однородного стержня ***AB*** массой ***m*** и длиной ***l***, скрепленного с ползуном посредством цилиндрического шарнира. В некоторый момент, когда система находилась в равновесии, по ползуну производится удар с импульсом ***S***. Определить скорость ползуна и угловую скорость стержня непосредственно после удара.

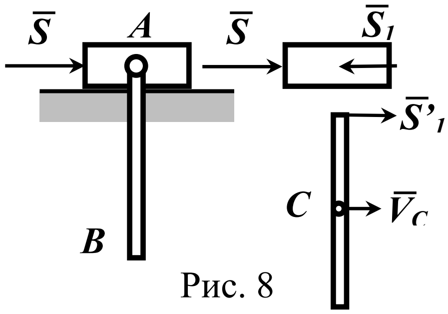

Рис. 8

По условию до удара система была неподвижна. После удара скорость ползуна V_A, скорость центра стержня V_C, и угловая скорость стержня ω, направленная по часовой стрелке. S_1 внутренний ударный импульс между ползуном и стержнем.

Составим уравнение для ползуна A.

$MV_A = S - S_1$;

Для стержня уравнения можно записать так:

$mV_C = S_1$;

$$I_c\omega = S1 * \frac{l}{2}\ , I_c = \frac{ml^2}{12}.$$

К этим уравнениям можно добавить кинематическое соотношение

$$V_A = V_C + \omega * \frac{l}{2}.$$

Отсюда

$$mV_C = S_1\,;$$

$$\frac{ml}{6}\,\omega = S_1 \Rightarrow \omega l = 6V_C \Rightarrow V_A = 4V_A.$$

$$4MV_C = S - S_1;$$

$$mV_c = S_1$$

Отсюда $V_c = \frac{S}{4M+m}$, и $\omega = \frac{6S}{l(4M+m)}$.

Задача решена.

Задача 5

Однородный стержень длиной *l* и массой *m* движется поступательно со скоростью ***V*** по гладкой горизонтальной поверхности. В некоторый момент времени стержень ударяется концом В по вертикальной плоскости. В момент удара стержень составляет угол αс поверхностью. При каком значении коэффициента восстановления при ударе *k* следующий удар произойдет плашмя, т.е. под углом 0 градусов.

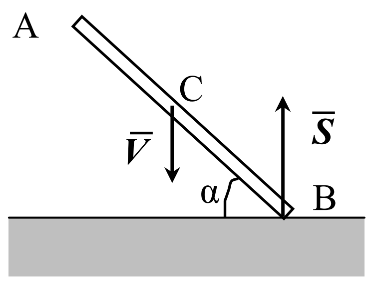

Рис. 9

На рисунке показан стержень в момент удара. Здесь *S* – ударный импульс со стороны поверхности, *V* – скорость стержня до удара. Кроме этого, по условию, угловая скорость стержня до удара равна нулю.После удара, в силу того что ударный импульс параллелен скорости центра масс, скорость центра масс стержня не изменит направления, но изменит величину. Итак, после удара скорость центра масс будет U, а угловая скорость стерня будет ω, и она направленна против хода часовой стрелки. Применим теорему об изменении кинетического момента при ударе. В случае удара в качестве центра можно взять любую точку. При этом нужно помнить, что кинетический момент тела относительно некоторого центра О равен кинетическому моменту относительно центра масс плюс момент относительно центра О произведения массы тела на скорость центра масс.

До удара$K_B^{\text{нач}} = mV\frac{l}{2}cos\alpha$.

После удара $K_B^{\text{кон}} = I_B\omega + mU\frac{l}{2}cos\alpha$.

Момент ударного импульса относительно точки В равен нулю, следовательно:

$$K_B^{\text{нач}} = K_B^{\text{кон}}$$

Учтем, что $I_B = \frac{ml^2}{12}$, после некоторых преобразований это даст выражение:

$$(V - U)cos\alpha = \frac{\omega l}{6}.$$

Рассмотрим точку В.

$\bar{V}_B = \bar{U} + \bar{V}_{BC}$, здесь $V_{BC} = \omega\frac{l}{2}$.

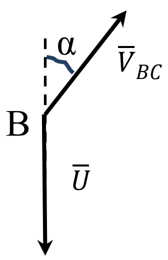

Рис. 10

Проекция скорости точки В на вертикаль равна

$V_{BC}cos\alpha - U$или$\omega\frac{l}{2}cos\alpha - U$

Отсюда

$$k = \frac{\omega\frac{l}{2}cos\alpha - U}{V}.$$

$$\omega\frac{l}{2} = \frac{U + kV\,.}{cos\alpha}$$

Далее

$$\frac{U + kV}{cos\alpha} = 3(V - U)cos\alpha,$$

$$U(1 + 3cos^2\alpha) = V(3cos^2\alpha - k).$$

$$\frac{U}{V} = \frac{3cos^2\alpha - k}{1 + 3cos^2\alpha}.$$

После удара центр стержня движется с постоянной скоростью U, и угловая скорость его постоянна. Следовательно, для того чтобы следующий удар произошел плашмя необходимо чтобы

$$\begin{cases} \omega t = \alpha \\ Ut = \dfrac{lsin\alpha}{2} \end{cases}$$

Здесь t – время между первым и вторым ударами. Исключим время.

$$\frac{\omega l}{2} = U\frac{\alpha}{sin\alpha},$$

$$\frac{U + kV}{cos\alpha} = U\frac{\alpha}{sin\alpha}.$$

Отсюда

$$\frac{U}{V} = \frac{ksin\alpha}{\alpha cos\alpha - sin\alpha}$$

Далее

$$\frac{3cos^2\alpha - k}{1 + 3cos^2\alpha} = \frac{ksin\alpha}{\alpha cos\alpha - sin\alpha}$$

Отсюда выражаем k.

$$k = \frac{3cos^2\alpha \cdot (\alpha cos\alpha - sin\alpha)}{3cos^2\alpha + \alpha cos\alpha}$$

Задача решена.

Задача 6

На гладкой плоскости, наклоненной под углом $\boldsymbol{\alpha}$ к горизонту, вертикально расположен стержень массы m и длины ***2l***, имеющий на концах небольшие утолщения. Стержень начинает движения из состояния покоя.

Найти ударные импульсы на концах стержня, если коэффициент восстановления при ударе равен $\boldsymbol{k}$.

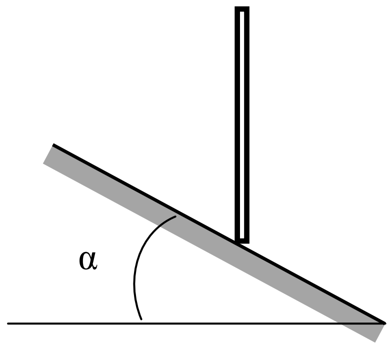

Рис. 11

Рассмотрим вначале период времени от начала движения до удара.

Возьмем стержень в произвольном положении.

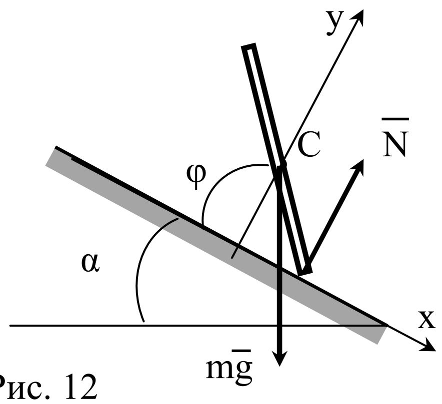

Рис. 12

Здесь N – реакция основания, mg– сила веса.

Составим уравнение движения центра масс в проекции на осьх.

$$m\ddot{x} = mg \cdot sin\alpha$$

Итак проекция ускорения на ось x– величина постоянная.

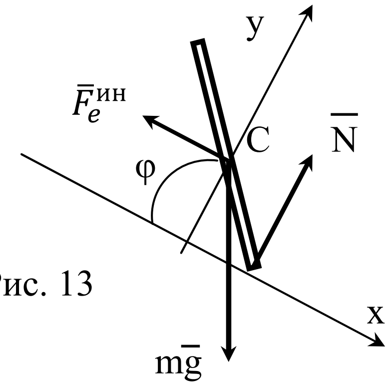

Рис. 13

Пусть наши оси двигаются поступательно вдоль оси x с ускорением, равным проекции ускорения центра масс на ось x.

Теперь мы рассматриваем относительное движение стержня. Так как подвижная система координат движется поступательно, то кориолисово ускорение любой точки стержня равно нулю, а переносные ускорения всех частиц одинаковы и их равнодействующая $\bar{F}_e^{ин}$ будет приложена в точке С, как показано на чертеже. При движении точки в подвижной системе координат точка С будет перемещаться вдоль оси y.

Применим теорему об изменении кинетической энергии.

$$T_1 - T_0 = A_{01}$$

T_0– кинетическая энергия в начале движения, по условию равна нулю.

T_1– кинетическая энергия в конце движения. Так как в момент падения стержня мгновенный центр скоростей будет находится в правом конце стержня то

$$T_1 = \frac{I\omega^2}{2}, \qquad I = \frac{m(2l)^2}{3} = \frac{4ml^2}{3}.$$

A_{01} – сумма работ всех действующих сил в относительном движении.

$$A_{01} = mgl\ cos\alpha$$

Сила инерции и сила N не совершают работы, поскольку они перпендикулярны перемещениям точек приложения.

$$\frac{2ml^2\omega^2}{3} = mgl\ cos\alpha$$

Отсюда

$$\omega = \sqrt{\frac{3gcos\alpha}{2l}}.$$

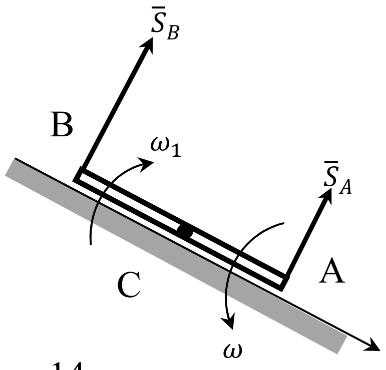

Рис. 14

Рассмотрим теперь удар. Стержень вращается относительно точки А. Перед ударом угловая скорость равнаω, после удара ω_1.

Из теоремы об изменении количества движения при ударе получим:

$$m\omega_1 l + m\omega l = S_A + S_B.$$

Теорема об изменении кинетического момента относительно оси, проходящей через точку А даёт:

$$I_B\omega_1 + I_B\omega \quad = 2lS_B$$

Здесь $I_B = \frac{4ml^2}{3}$. Так как коэффициент восстановления равен *k*:

$$\omega_1 l = k\omega \quad l$$

Из этих равенств находим:

$$S_B = \frac{2ml\omega}{3}(1 + k),$$

$$S_A = \frac{ml\omega}{3}(1 + k).$$

Решение найдено.

Литература

1. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. Высшая школа, 2010 г., 416 с.
2. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. Лань, 2010 г., 720 с.