Министерство образования и науки РФ
Федеральное агентство по образованию
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«РОСТОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Утверждено на заседании
кафедры теоретической механики
29 апреля 2008г.

# Сложное движение точки и твердого тела

Методические указания для студентов очного обучения

Ростов-на-Дону

2008

**УДК 531.01**
**Сложное движение точки и твердого тела**: Методические указания для студентов очного обучения. – Ростов н/Д: Рост. гос. строит. ун-т., 2008.- 14 с.
Предназначены для студентов очного отделения РГСУ. Даны основные определения, формулировки теорем, разъясняются трудные для усвоения понятия.

Составитель: канд.физ.-мат. наук, О.В. Явруян

Редактор Т.М. Климчук
Темплан 2007 г., поз.155

Подписано в печать 31.05.07.Формат 60×84/16.
Бумага писчая. Ризограф. Уч.-изд. л. 1,3.
Тираж 100 экз. Заказ

Редакционно-издательский центр
Ростовского государственного строительного университета
344022, Ростов-на-Дону,
ул. Социалистическая, 162

## 1. Сложное движение точки

Рассмотрим движение точки М, движущейся относительно некоторой подвижной системы отсчета Oxyz, которая в свою очередь перемещается по отношению к неподвижной (основной) системы координат $O_1x_1y_1z_1$ (рис.1).

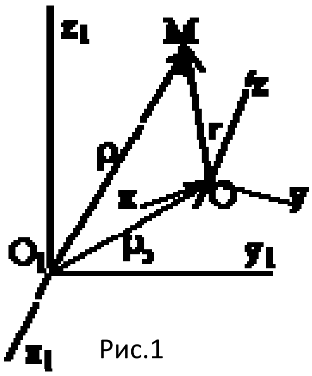

Рис.1

Такое движение, при котором точка одновременно участвует в нескольких движениях называется сложным. Например пассажир, перемещающийся по движущемуся вагону относительно перрона или шар, катящийся по палубе плывущего парохода, относительно берега совершают сложное движение.

Движение, скорость и ускорение точки по отношению к подвижной системе Oxyz называются относительными, а по отношению к основной системе $O_1x_1y_1z_1$ – абсолютным движением.

Движение подвижной системы координат Oxyz относительно неподвижной $O_1x_1y_1z_1$ является для движущейся точки переносным движением, а скорость и ускорение той неизменно связанной с подвижной системой отсчета точки пространства, в которой в данный момент находится движущаяся точка, называются переносными.

Таким образом для изучения относительного движения точки, следует мысленно остановить переносное движение и изучать движение далее по законам и правилам кинематики абсолютного движения точки; аналогично, для изучения переносного движения следует мысленно остановить относительное движение и рассматривать движение по законам кинематики абсолютной точки.

## 1.1 Скорости и ускорения точек при сложном движении.

Установим зависимости между соответствующими скоростями и ускорениями.

Пусть подвижная система Oxyz движется относительно неподвижной $O_1x_1y_1z_1$ как свободное твердое тело. Обозначим скорость и ускорение начала координат O подвижной системы по отношению к осям неподвижной системы через $\vec{v}_O$ и $\vec{\omega}_O$, а мгновенную угловую скорость и ускорение самой системы Oxyz по отношению к тем же осям через $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$.

Рассмотрим точку M (рис. 1), совершающую движение, которое не зависит от движения системы Oxyz. Обозначим через $\vec{\rho}$ и $\vec{r}$ ее абсолютный и относительный радиус-векторы, а через $\vec{\rho}_0$ радиус-вектор точки O. Тогда в любой момент времени $\vec{\rho} = \overrightarrow{O_1M} = \vec{\rho}_0 + \vec{r}$. Причем $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ будет меняться с течением времени в каждой из систем отсчета по разным законам.

Скорость точки M определяется выражением

$$\vec{v} = \frac{d\vec{\rho}}{dt} = \frac{d\vec{\rho}_O}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt}, \tag{1}$$

$$\frac{d\vec{\rho}_O}{dt} = \vec{v}_O, \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} + x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt}$$

где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - единичные векторы подвижной системы координат, которые вращаются вокруг мгновенной оси, поэтому скорость их концов определяются как $\frac{d\vec{i}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{i}, \frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{j}, \frac{d\vec{k}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{k}$. Тогда из выражения (1) находим $\vec{v} = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) + \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$. Введем следующие обозначения: $\vec{v}_e = \vec{v}_O + \vec{\omega} \times \vec{r}$, $\vec{v}_r = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$, где через $\vec{v}_e$ обозначена переносная скорость точки M, через $\vec{v}_r$ ее относительная скорость, таким образом получим **теорему сложения скоростей для точки**:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_e + \vec{v}_r \tag{2}$$

т.е. скорость абсолютного движения точки равна векторной сумме переносной и относительной скоростей.

Для определения ускорения точки М возьмем производную от выражения (2), будем иметь:

$$\vec{w}_a = \frac{d\vec{v}_a}{dt} = \frac{d\vec{v}_e}{dt} + \frac{d\vec{v}_r}{dt}. \tag{3}$$

С учетом выражения для переносной скорости, получим

$$\vec{w}_a = \frac{d\vec{v}_O}{dt} + \frac{d}{dt}(\vec{\omega}\times\vec{r}) + \frac{d\vec{v}_r}{dt} = \frac{d\vec{v}_O}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\frac{d\vec{r}}{dt} + \frac{d\vec{v}_r}{dt}$$

Поскольку

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega}\times\vec{r} + \vec{v}_r, \quad \frac{d\vec{v}_O}{dt} = \vec{w}_O, \quad \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon},$$

$$\frac{d\vec{v}_r}{dt} = \frac{d^2x}{dt}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt}\vec{k} + \frac{dx}{dt}\frac{d\vec{i}}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{d\vec{j}}{dt} + \frac{dz}{dt}\frac{d\vec{k}}{dt} = \frac{d^2x}{dt}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt}\vec{k} + \vec{\omega}\times\vec{v}_r,$$

то выражение для абсолютного ускорения перепишется в виде

$$\vec{w}_a = \vec{w}_O + \vec{\varepsilon}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) + \frac{d^2x}{dt}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt}\vec{k} + 2(\vec{\omega}\times\vec{v}_r). \tag{4}$$

Рассмотрим, что представляют собой слагаемые, входящие в правую часть (4). Величина

$$\vec{w}_r = \frac{d^2x}{dt}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt}\vec{k} \tag{5}$$

есть по определению относительное ускорение. Убедиться в этом можно остановив мысленно переносное движение, т.е. положив

$\vec{\omega} = 0$, $\vec{\varepsilon} = 0$, $\vec{w}_O = 0$, тогда из (4) видно, что полное ускорение совпадает с относительным.

Величина

$$\vec{w}_e = \vec{w}_O + \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

есть переносное ускорение, поскольку, согласно формуле (4), положив в ней $\vec{v}_r = 0, \vec{w}_r = 0$, т.е. мысленно остановив относительное движение, то полное ускорение точки М совпадает с переносным ускорением.

И, наконец, величина

$$\vec{w}_c = 2(\vec{\omega} \times \vec{v}_r),$$

которая не входит ни в относительное, ни в переносное ускорения, называется кориолисовым ускорением.

В результате получаем следующую **теорему о сложении ускорений или теорему Кориолиса**: абсолютное ускорение точки при сложном движении равно геометрической сумме относительного, переносного и кориолисова ускорений

$$\vec{w}_a = \vec{w}_r + \vec{w}_e + \vec{w}_c \tag{6}$$

Кориолисово ускорение появляется только тогда, когда подвижные оси при своем движении вращаются. Таким образом в случае, когда подвижная система движется поступательно, кориолисово ускорение равно нулю. Также, кориолисово ускорение может обращаться в нуль в данный момент времени, $\omega = 0$ или $v_r = 0$, или же $\vec{\omega} \parallel \vec{v}_r$.

В остальных случаях модуль кориолисова ускорения вычисляется по правилу векторного произведения

$$w_c = 2\omega v_r \sin(\vec{\omega}, \vec{v}_r)$$

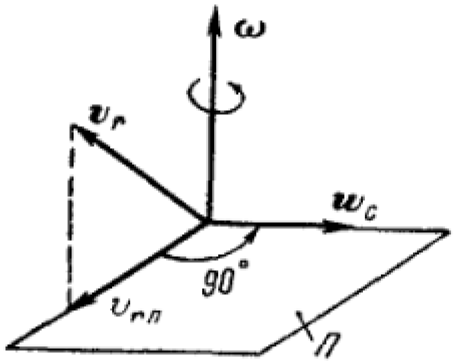

Рис.2.

Для определения направления кориолисова ускорения необходимо спроектировать вектор относительной скорости на плоскость, перпендикулярную к вектору угловой скорости и повернуть полученную проекцию в этой плоскости на $90^{o}$ в сторону вращения $\omega$ - это и будет направление ускорения Кориолиса.

### 1.2 Некоторые применения теоремы Кориолиса

Влияние кориолисова ускорения, возникающего в результате вращательного движения Земли вокруг ее оси, отражается на разнообразных явлениях, которые наблюдаются на земной поверхности.

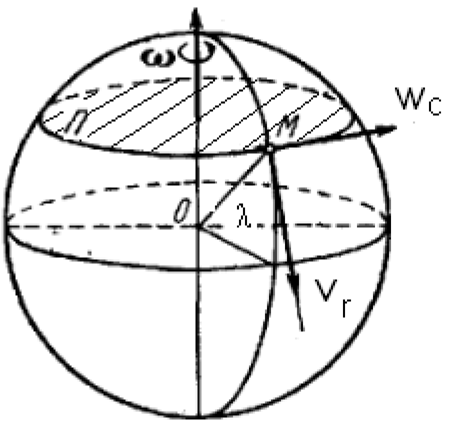

Рис.3.

Рассмотрим, например точку М, движущуюся вдоль меридиана с севера на юг в северном полушарии со скоростью $v_r$ (рис.3). Угловую скорость вращения Земли $\omega$ ($\omega = \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60}$ $c^{-1} =$) направим с учетом вращательного движения Земли вокруг ее оси, т.е. вверх. Найдем модуль и направление кориолисова ускорения, когда точка находится на широте λ.

Относительная скорость образует с угловой скоростью вращения Земли ω угол λ, следовательно, значение кориолисова ускорения определяется как $w_c = 2\omega v_r \sin\lambda$. Для определения направления спроектируем вектор относительной скорости на плоскость π и повернем полученный вектор на $90^{o}$ в сторону вращения $\omega$, в результате получим вектор кориолисова ускорения, направленный на восток по касательной к кругу широты. Легко заметить, что на экваторе кориолисово ускорение исчезает, а в южном полушарии будет направлено на запад.

Вообразим теперь, что точка М – частица воды в реке, протекающей с севера на юг вдоль меридиана в северном полушарии. Из курса физики известно, что ускорение вызывается некоторой силой, следовательно наличие кориолисовых ускорений частиц воды объясняется наличием сил, приложенных к этим частицам и направленных в северном полушарии на восток. Силы эти возникают вследствие взаимодействия между Землей и частицами воды в реке, однако всякому действию соответствует равное по величине и противоположное по направлению противодействие. Следовательно, частицы воды в реке действуют на ее русло с силами, направленными на запад. Вследствие этого реки, текущие в северном полушарии с севера на юг или с юга на север вдоль меридиана, размывают свой правый берег. В южном полушарии – левый берег.

Аналогично можно объяснить и направление пассатов – ветров постоянного направления – вблизи экватора. Массы холодного воздуха текут с севера на юг, образуя огромный атмосферный поток, который как река, отклоняется в северном полушарии на запад. Поэтому наблюдателю, находящемуся вблизи экватора, кажется, что в северном полушарии пассаты имеют направление с севера-востока. В южном полушарии пассаты имеют юго-восточное направление.

## 2. Сложное движение твердого тела

Если тело движется относительно подвижных осей Oxyz, а эти оси совершают одновременно переносное движение по отношению к неподвижным осям $O_1x_1y_1z_1$, то результирующее движение тела называется сложным.

Задача изучения сложного движения состоит в нахождении зависимостей между основными кинематическими характеристиками составляющих движений и сложного движения. Для простоты ограничимся рассмотрением двух составляющих движений.

### 2.1 Сложение поступательных движений

Предположим, что некоторое тело движется поступательно относительно системы координат Oxyz, а эта система в свою очередь движется поступательно относительно системы координат $O_1x_1y_1z_1$.
Совершенно ясно, что абсолютное движение твердого тела в этом случае будет также поступательным.

Так как относительные и переносные скорости всех точек тела будут одинаковы, мы можем непосредственно применить теорему о сложении скоростей. Так же просто решается вопрос о сложении ускорений, поскольку кориолисовы ускорения точек тела равны нулю.

Примером сложного движения, возникающего в результате сложения двух поступательных движений, является движение тележки по борту движущегося автомобиля.

### 2.2 Сложение вращений вокруг двух параллельных осей

Пусть относительное и переносное движения твердого тела являются вращательными с угловыми скоростями $\omega_1$ и $\omega_2$ соответственно, которые параллельны друг другу. Результирующее сложное движение, очевидно, будет плоскопараллельным по отношению к плоскости, перпендикулярной осям, поэтому достаточно рассмотреть движение точек сечения.

Возможны следующие частные случаи такого движения.

1. Случай, когда *оси угловых скоростей параллельны и направлены в одну сторону* (рис. 4). Рассмотрим сечение S (рис. 5), которое пересекает плоскость осей вращений по прямой AB. Определим скорости точек сечения: $v_A = \omega_2 AB$, $v_B = \omega_1 AB$, направлены эти векторы параллельно друг другу в противоположные стороны, тогда точка C будет мгновенным центром скоростей, а соответствующая ось Cc\` - мгновенной осью вращения тела.

Для определения угловой скорости абсолютного вращения тела вокруг оси Cc\`, воспользуемся равенством (соотношение между скоростями и расстояниями их до мгновенного центра скоростей):

$\omega = \dfrac{v_B}{BC} = \dfrac{v_A}{AC}$, из свойства пропорции получим:

$$\omega = \frac{v_B + v_A}{BC + AC} = \frac{v_B + v_A}{AB} = \omega_1 + \omega_2 . \tag{7}$$

2. В случае, когда *оси угловых скоростей параллельны и направлены в разные стороны* (рис. 6). Аналогично предыдущему случаю строим плоскость, перпендикулярную к обеим осям, и рассматриваем прямую AB, по которой эта плоскость пересекается с плоскостью осей. Для определенности рассмотрим случай, когда $\omega_1 > \omega_2$. Векторы скоростей по модулю определяются как $v_A = \omega_2 AB$, $v_B = \omega_1 AB$, параллельны и направлены в одну сторону, тогда, достраивая перпендикуляры к скоростям $v_A$, $v_B$ определяем мгновенный центр скоростей C, причем, из свойства пропорции имеем

$$\omega = \frac{v_B - v_A}{BC - AC} = \frac{v_B - v_A}{AB} = \omega_1 - \omega_2 \tag{8}$$

Таким образом, если тело участвует одновременно в двух направленных в одну или разные стороны вращениях вокруг параллельных осей, то результирующее движение будет мгновенным вращательным с абсолютной угловой скоростью, определяемой по формулам (7) или (8).

3. *Два мгновенных вращения вокруг параллельных осей с одинаковыми по модулю и противоположными по направлению угловыми скоростями* образуют пару мгновенных вращений или *пару вращений.*

Из формулы (8) видно, что при $\omega_2 \to \omega_1$ результирующая угловая скорость стремится к нулю, а мгновенная результирующая ось уходит в бесконечность, отсюда можно заключит, что результирующее движение не будет вращательным. Поскольку $v_A = \omega_2 AB$, $\mathrm{v_B} = \omega_1 \mathrm{AB}$, а $\omega_1 = \omega_2$, имеем $\mathrm{v_A} = \mathrm{v_B}$, следовательно, результирующее движение будет мгновенно поступательным со скоростью, численно равной $\mathrm{v} = \omega_1 \mathrm{AB}$ и направленной перпендикулярно плоскости, проходящей через векторы мгновенных осей вращений $\omega_1$ и $\omega_2$.

Примеров пары вращений служит движение велосипедной педали CD, которое складывается из ее относительного вращения вокруг оси *B,* укрепленной на кривошипе *AB,* и переносного вращения кривошипа вокруг оси *A* (рис. 7). Угловые скорости $\omega_1$ и $\omega_2$ этих вращений по направлению противоположны, а по модулю одинаковы, так как в любой момент времени угол поворота $\varphi_1$, педали относительно кривошипа равен углу поворота $\varphi_2$ кривошипа. Таким образом, эти два вращения образуют пару, и в результате движение педали будет поступательным со скоростью $\mathrm{v} = \omega_2 \mathrm{AB}$.

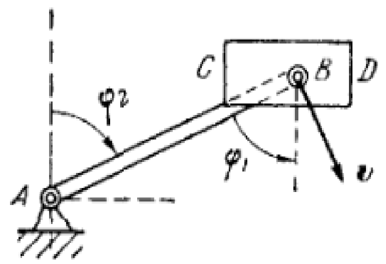

Рис.7.

## 2.3 Сложение вращений вокруг двух пересекающихся осей

Отнесем векторы $\omega_1$ и $\omega_2$ к точке O пересечения мгновенных скоростей и

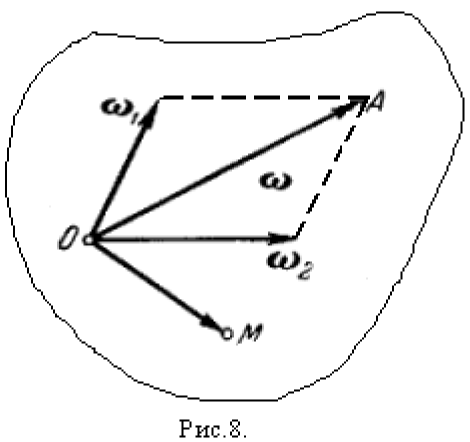

Рис.8.

построим на них параллелограмм (рис. 8). Очевидно, скорость точки О, как точки, лежащей одновременно на обеих осях, будет равна нулю. Нулю также будет равна скорость точки А, поскольку $v_A = \omega_1 \times \overrightarrow{OA} + \omega_2 \times \overrightarrow{OA} = 0$ (т.к. модули обоих слагаемых одинаковы, однако направлены в разные стороны).

Следовательно, результирующее движение будет движением вокруг неподвижной точки О и для каждого момента времени представляет собой элементарный поворот с угловой скоростью $\omega$ вокруг мгновенной оси вращения ОА.

Для определения $\omega$ вычислим скорость какой-нибудь точки М. По теореме о сложении скоростей (2) имеем:

$$v_M = \omega_1 \times \overrightarrow{OM} + \omega_2 \times \overrightarrow{OM} = (\omega_1 + \omega_2) \times \overrightarrow{OM}$$

С другой стороны, поскольку результирующее движение является мгновенным вращением с мгновенной угловой скоростью $\omega$, то

$$v_M = \omega \times \overrightarrow{OM}.$$

Отсюда заключаем, что

$$\omega = \omega_1 + \omega_2. \tag{9}$$

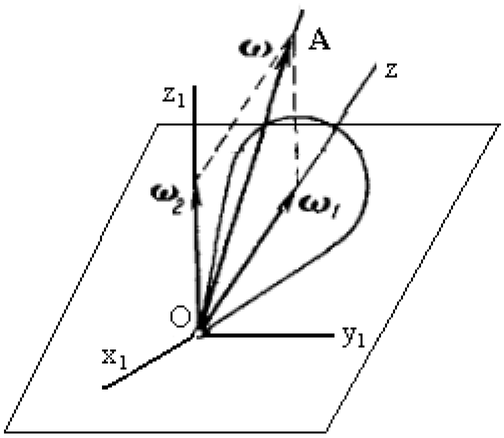

Рис.9.

В качестве примера рассмотрим вращение волчка вокруг своей оси Oz с угловой скоростью $\omega_1$, а сама ось Oz обращается вокруг вертикальной оси $Oz_1$ с угловой скоростью $\omega_2$ (рис. 9). Эти движения, складываясь, дают мгновенное вращение с угловой скоростью $\omega = \omega_1 + \omega_2$ вокруг оси ОА, направленной по диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\omega_1$ и $\omega_2$. Совершаемое волчком движение называется регулярной прецессией; при этом мгновенные оси Oz и OA описывают вокруг вертикали два круговых конуса.

## 2.4 Сложение мгновенной угловой и поступательной скоростей

Пусть теперь твердое тело совершает относительно системы Oxyz мгновенное вращение с угловой скоростью $\omega$, а сама эта система совершает по отношению к неподвижной $O_1x_1y_1z_1$ поступательное движение со скоростью v (или наоборот). Рассмотрим возможные частные случаи.

1. *Поступательная скорость перпендикулярна к мгновенной оси вращения Aa* (рис. 10). Заменим мгновенную поступательную скорость v парой угловых скоростей $(\omega', -\omega')$, где $\omega'=\omega$, располагая пару так, как показано на рисунке 10; при этом плечо пары $d=\frac{v}{\omega}$. Тогда мгновенные вращения вокруг одной и той же оси Aa с угловыми скоростями $\omega$ и $-\omega'=-\omega$ взаимно уничтожатся и останется только мгновенное вращение вокруг мгновенной оси Bb с угловой скоростью $\omega'=\omega$.

Таким образом, результирующее движение будет мгновенным вращением с такой же (по модулю и направлению) угловой скоростью $\omega$, но вокруг мгновенной оси, смещенной в плоскости, перпендикулярной к вектору v, на величину d.

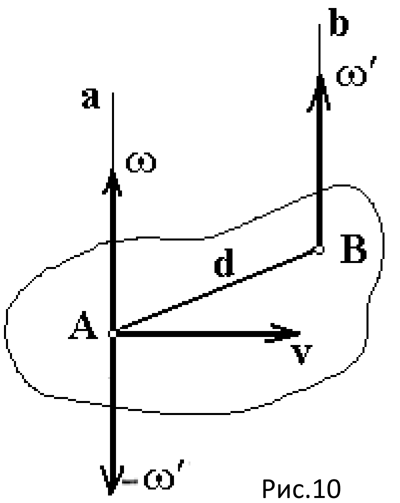

Рис.10

2. *Поступательная скорость параллельна оси вращения*. В этом случае результирующее движение будет винтовым (перманентным), а ось вращения – осью винта. Любая точка тела остается во время движения на поверхности круглого цилиндра, описывая винтовую линию, изображенную на рисунке 11. Расстояние, проходимое точкой за время

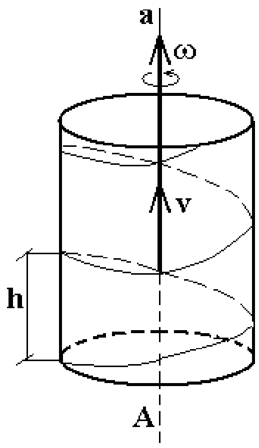


Рис.11

одного оборота T называется шагом h винта, при этом $h = vT$ и $\omega T = 2\pi$, откуда $h = 2\pi \frac{v}{\omega}$.

Скорость точки, находящейся на расстоянии r от оси винта, складывается из поступательной скорости v и перпендикулярной к ней скорости $\omega r$, получаемой во вращательном движении, и по модулю равна

$$v_M = \sqrt{v^2 + \omega^2 r^2}$$

3. *Поступательная скорость образует произвольный угол* α *с мгновенной осью вращения Aa* (рис. 12). Разложим поступательную скорость v на составляющие v', направленную вдоль ω (v'= v cosα), и v'', перпендикулярную к ω (v''= v cosα).

Сложение мгновенной угловой скорости ω и перпендикулярной к ней поступательной скорости v'' дает, согласно случаю 1, вращение с угловой скоростью $\omega' = \omega$ вокруг новой мгновенной оси Bb, лежащей в плоскости, перпендикулярной к v'' и смещенной на расстояние $d = AB = \frac{v''}{\omega} = \frac{v}{\omega} \sin\alpha$

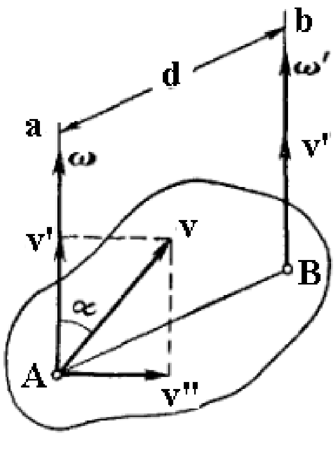


Рис.11

В результате остается движение с угловой скоростью $\omega'$ и поступательное движение со скоростью v', причем, вектора $\omega'$ и v' параллельны, следовательно приходим к случаю 2.

Таким образом, результирующее движение будет мгновенным винтовым движением вокруг оси Bb, отстоящей от оси Aa на расстоянии d.