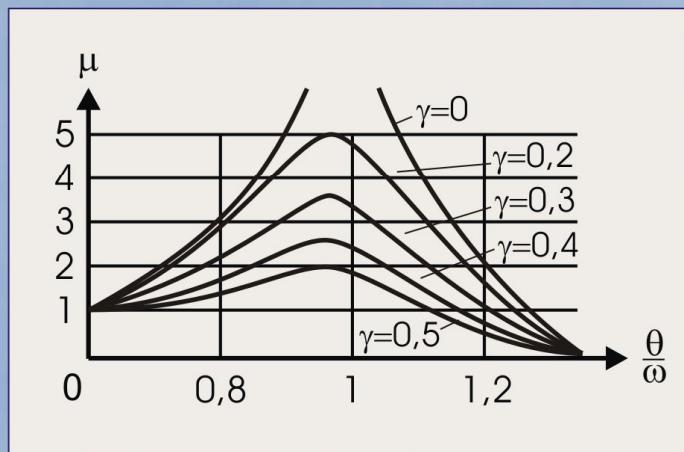


Р.А. Шакирзянов, Ф.Р. Шакирзянов

ДИНАМИКА И УСТОЙЧИВОСТЬ СООРУЖЕНИЙ



**Казань
2015**

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**КАЗАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АРХИТЕКТУРНО-
СТРОИТЕЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

Р.А. Шакирзянов, Ф.Р. Шакирзянов

**ДИНАМИКА И УСТОЙЧИВОСТЬ
СООРУЖЕНИЙ**

Учебное пособие

Казань
2015

УДК 624.042.8

ББК 38.112

Ш17

Шакирзянов Р.А., Шакирзянов Ф.Р.

Ш17 Динамика и устойчивость сооружений: Учебное пособие. – 2-е перераб. изд. / Р.А. Шакирзянов, Ф.Р. Шакирзянов. – Казань: Изд-во Казанск. гос. архитектур.-строит. ун-та, 2015. – 120 с.

ISBN

Печатается по решению Редакционно-издательского совета Казанского государственного архитектурно-строительного университета.

Учебное пособие написано в соответствии с Федеральными государственными образовательными стандартами и учебными планами по направлению «Строительство» для подготовки магистров и бакалавров на основе многолетнего опыта, накопленного на кафедре механики КазГАСУ.

В пособии излагаются теоретические основы расчета сооружений на динамические воздействия и устойчивость. Уделяется внимание практическим методам расчета сооружений и современным матричным методам. Теоретические материалы сопровождаются примерами расчета и вопросами для самоконтроля знаний.

Табл. 8; илл. 68; библи. 20 наименов.

Рецензенты:

Доктор физ.-матем. наук, профессор кафедры механики КазГАСУ

Р.А. КАЮМОВ;

Директор НПЦ «Мосты» **И.С. ГАБИДУЛЛИН**

УДК 624.042.8

ББК 38.112

ISBN

© Казанский государственный архитектурно-строительный университет, 2015

© Шакирзянов Р.А., Шакирзянов Ф.Р., 2015

ВВЕДЕНИЕ

Динамика и устойчивость сооружений являются важнейшими разделами строительной механики. Многолетний опыт проектирования и эксплуатации сооружений показывает, что для обеспечения их надежности недостаточно проведения только расчетов на прочность при статическом нагружении. В истории известны немало крупных катастроф и разрушений, произошедших из-за недоучета при проектировании динамических явлений и потери устойчивости сооружения или его частей.

В настоящее время сооружения все больше усложняются, интенсивность работы машин и механизмов, расположенных на них или рядом с ними, все увеличивается. Тенденция к экономии строительных материалов зачастую приводит к уменьшению прочностных и жесткостных свойств сооружений. Кроме традиционных строительных материалов в строительную практику внедряются новые, еще не до конца изученные материалы. По этим и другим причинам возрастает вероятность разрушения сооружений от колебаний и потери устойчивости. Вместе с тем, кроме обеспечения прочности и жесткости сооружений, к ним часто предъявляются требования по учету влияния колебаний на точные технологические процессы и на людей. Поэтому расчеты сооружений на колебания и устойчивость является важными и актуальными задачами.

Однако, в сегодняшних учебных программах постоянно уменьшается число часов, отводимых для изучения динамики и устойчивости сооружений. В результате этого усложняется задача ознакомления будущего специалиста с теоретическими основами, методами, алгоритмами и приемами расчета сооружений на колебания и устойчивость.

Настоящее учебное пособие написано с учетом этих соображений. В нем изложены как классические основы, так и современные методы расчета сооружений на динамические воздействия и устойчивость с применением компьютерных технологий, знать, уметь и владеть которыми должны будущие бакалавры и магистры.

Пособие состоит из 4 глав и логически связанных двух частей:

- 1) динамика сооружений (1-3 главы);
- 2) устойчивость сооружений (4 глава).

В конце каждой главы даются вопросы для самоконтроля.

Глава 1

ВВЕДЕНИЕ В ДИНАМИКУ СООРУЖЕНИЙ

1.1. Колебания вокруг нас

Колебания являются одной из наиболее распространенных форм движения. Колеблются ветви деревьев, металлическая пластинка, зажатая одним концом в тисках, качели, вагоны на рессорах при движении. Колеблются здания и сооружения от ветра, землетрясений, работы различных машин и оборудования. Наши сердца бьются, легкие колеблются, во время ходьбы ноги совершают колебательные движения. Человеческая речь невозможна без колебаний языка. Колеблются даже атомы, из которых мы состоим. Распространение света, звука, гравитационных волн также имеют колебательный характер.

С точки зрения человека колебания могут быть и полезными, и вредными. Они используются человеком для радио- и телепередач, в часах, в вибрационных транспортерах и ситах, для заливки бетона в опалубку с помощью вибраторов и т.д. С другой стороны, происходят колебания зданий, мостов, самолетов и др., которые вызывают дополнительные напряжения и деформации сооружений, оказывают вредное воздействие на людей. Непрерывный рост скоростей движения, мощности машин и оборудования приводят к возрастанию уровня колебаний сооружений, увеличению опасности их разрушения.

Достаточно интенсивные колебания могут привести к серьезным последствиям. Именно так случилось с вантовым мостом через Такоумский пролив (штат Вашингтон, США) в 1940 году, когда мост начал интенсивно раскачиваться от ветра постоянной скорости, и после часа таких колебаний часть проезжего полотна отломилась и рухнула в воду (рис. 1.1).

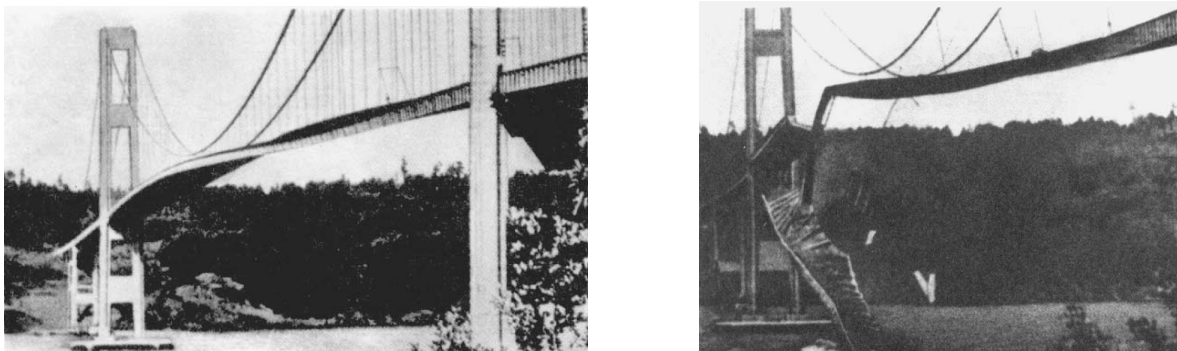


Рис. 1.1

Напряжения при колебаниях имеют знакопеременный характер, потому они могут вызывать усталость материала, из которого изготовлено сооружение. Это, в свою очередь, приводит к разрушению отдельных элементов сооружения и, как следствие, к авариям. Наиболее разрушительное действие колебаний наблюдается при землетрясениях и взрывах.

Изучение колебаний имеет важное практическое значение, так как позволяет использовать положительные свойства колебаний в технике и технологии, избежать нежелательных последствий колебаний путем ограничения их уровня. Лишь на базе глубокого изучения различных видов колебаний можно установить оптимальные пропорции элементов конструкций. Только на основе теории колебаний могут быть решены важные практические проблемы динамики сооружений.

1.2. Предмет и задачи динамики сооружений

Динамика сооружений изучает механические колебания сооружений. При этом важное место отводится причинам возникновения этих колебаний и последствиям их воздействия.

Динамика сооружений является наукой, занимающейся разработкой принципов и методов расчета сооружений на воздействие различных динамических нагрузок.

Целью динамического расчета сооружений является обеспечение их несущей способности при совместном действии статических и динамических нагрузок, а также ограничение уровня колебаний для исключения вредного влияния колебаний на людей и на технологические процессы.

Динамический расчет проводится для проверки допустимости внутренних усилий и перемещений с точки зрения выполнения требований прочности, жесткости и выносливости, санитарно-гигиенических норм, технологии производства. При невыполнении допустимых норм возникает необходимость в уменьшении уровня колебаний.

Решение задач динамики представляет собой сложную проблему. В отличие от статического расчета, при изучении колебаний приходится учитывать дополнительный фактор – время. Это приводит к неоднозначности решения, т.к. перемещения, деформации и напряжения становятся переменными во времени. Важной отличительной чертой задач динамики является учет сил инерции.

Динамический расчет сооружения состоит из нескольких этапов:

- определение динамических характеристик материала;
- определение динамических степеней свободы;
- теоретический расчет на колебания;
- оценка возможности возведения или эксплуатации сооружения.

Ограничим круг задач динамики сооружений наиболее приоритетными и рассмотрим четыре задачи динамики:

- 1) определение частот и форм собственных колебаний;
- 2) проверка на резонанс;
- 3) проверка динамической прочности;
- 4) проверка динамической жесткости.

1.3. Сооружение как колебательная система

Для упрощения расчетов различных объектов на колебания вводится понятие колебательной системы. Это позволяет рассматривать разные по природе (физические, механические и др.) колебания с единых позиций и использовать для их изучения единый математический аппарат.

В данном учебном пособии термин *колебательная система* будет означать сооружение, в котором, в результате нарушения равновесия, возникают те или другие колебания. Такие колебательные системы могут быть диссипативными и консервативными.

Диссипативные системы – это системы, в которых происходит диссипация, т.е. рассеяние энергии. В реальных сооружениях рассеивание энергии происходит всегда.

Полная энергия колеблющегося сооружения всегда больше его энергии без колебаний. Поэтому, в соответствии со вторым законом термодинамики, при отсутствии притока энергии колебания сооружения должны прекратиться. Действительно, в природе происходит именно так. При колебаниях сооружения возникают силы внутреннего трения в материале, в сочленениях и опорах, которые приводят к нагреву сооружения, т.е. к переходу механической энергии в тепловую. Последняя, как избыточная энергия, рассеивается в окружающее пространство. Соппротивление воздуха при колебаниях также уменьшает энергию колебательной системы. Поэтому, если нет внешнего воздействия, через некоторое время колебания сооружения прекращаются. Отсюда следует вывод: *для правильного расчета сооружений на колебания их следует рассматривать как диссипативные системы*. Однако решение задач динамики сооружений в такой постановке является сложной проблемой. Во-первых, потому что причин для рассеяния энергии много. Во-вторых, законы, учитывающие рассеяние энергии, сложны и до конца не выяснены. И, наконец, получаемые с их учетом уравнения движения являются сложными для решения. Поэтому рассеянием энергии колебательной системы часто пренебрегают.

Система, в которой рассеянием энергии пренебрегают, называется *консервативной системой*. Простейшей моделью консервативной колебательной системы является масса m , подвешенная на пружине жесткости r (рис. 1.2 а).

Если отвести эту массу от положения равновесия на расстояние a (рис. 1.2 б) и отпустить, она под воздействием силы упругости пружины $R=ar$ станет двигаться вверх с некоторым ускорением и дойдет до положения первоначального состояния. Но в этот момент масса уже приобретет некоторую скорость и, вследствие инерции, будет продолжать движение. При этом пружина начнет сжиматься, а на массу начнет действовать постепенно возрастающая сила упругости

пружины, направленная вниз. Скорость массы начнет убывать, и, в конце-концов, она остановится (рис. 1.2 в). В этом положении сжатая пружина будет действовать на массу m с максимальной силой, направленной вниз. После мгновенной остановки масса начнет двигаться вниз и, перейдя через положение равновесия, вернется в точку, откуда начала свое движение. Так завершается один цикл колебания, а за ним следуют другие. В отличие от диссипативных систем, в консервативных системах циклы колебаний не отличаются друг от друга.

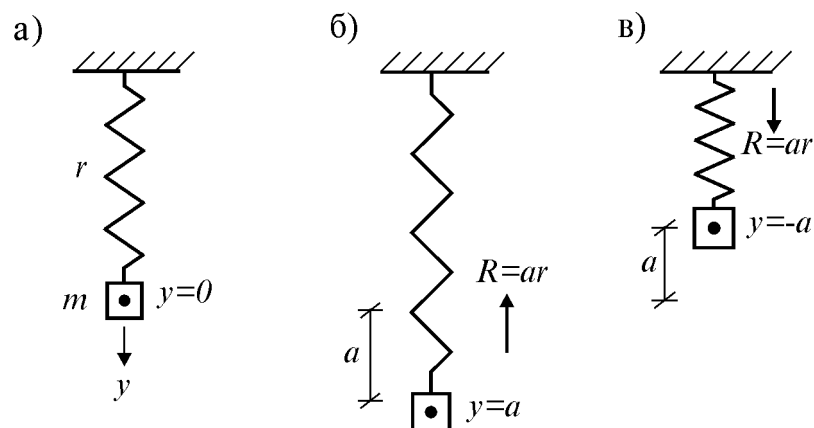


Рис. 1.2

Простейшей диссипативной системой, моделирующей наличие сил сопротивления, является масса с пружиной и вязким элементом (рис. 1.3). Ее вязкий элемент c , сопротивляющийся колебаниям, называется демпфером. Поэтому диссипативную систему называют *системой с демпфированием*. Иногда ее называют *системой с затуханием*. В системах с демпфированием циклы колебаний отличаются друг от друга.

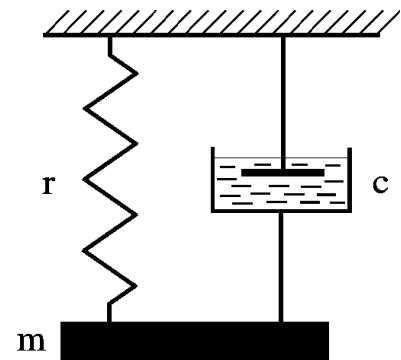


Рис. 1.3

Основными отличительными признаками колебательной системы от неколебательной являются вид дифференциальных уравнений, число степеней свободы и наличие форм колебаний.

Дифференциальные уравнения движения колебательной системы отличаются от уравнений статики присутствием членов, учитывающих инерционные силы. Эти уравнения могут быть линейными и нелинейными. В соответствии с этим различают линейные и нелинейные колебания. Колебания реальных колебательных систем всегда нелинейные. Однако их, в определенных пределах, можно описать линейными дифференциальными уравнениями.

1.4. Виды динамических нагрузок

Для определения реакции систем при динамических нагрузках используются два принципиально разных подхода – детерминированный и недетерминированный подходы. Выбор одного из них зависит от способов воздействия и изменения нагрузки.

Когда изменение нагрузки во времени хорошо известно, ее называют **детерминированной нагрузкой**. При такой нагрузке обычно можно установить изменение перемещений колебательной системы во времени в соответствии с изменением нагрузки. Другие параметры, такие как напряжения, деформации, внутренние усилия и др., могут быть определены на втором этапе расчета по результатам вычисления перемещений.

Если изменение нагрузки во времени известно не полностью, но может быть установлено с некоторой вероятностью, ее называют **случайной динамической нагрузкой**. Случайная нагрузка может быть определена только статистически, а перемещения от нее могут быть описаны только как вероятные. Поэтому при недетерминированной нагрузке изменение перемещений во времени не вычисляют, а другие величины (напряжения, внутренние усилия и др.) определяют непосредственно из статического расчета.

В отличие от статических, динамические нагрузки изменяются во времени: по величине, направлению, положению. Они сообщают массам ускорения, вызывают появление инерционных сил и могут привести к сильным колебаниям сооружения, а в итоге – к их разрушению.

Рассмотрим основные виды детерминированных нагрузок. К ним относятся периодические, импульсные и подвижные нагрузки.

Периодические нагрузки – это нагрузки, прикладываемые к сооружениям через определенный период. Источником возникновения периодических нагрузок являются различные машины и механизмы (электродвигатели, вентиляторы, центрифуги, грохоты, металлообрабатывающие станки, дробилки, насосы и др.). Если эти машины и механизмы жестко закреплены на сооружении и имеют неуравновешенные вращающиеся части, при их работе возникают **гармонические нагрузки** (нагрузки, изменяющиеся по закону синуса или косинуса). Их часто называют **вибрационными нагрузками**.

В качестве примера рассмотрим консольную балку с установленным на ней работающим двигателем (рис. 1.4 а).

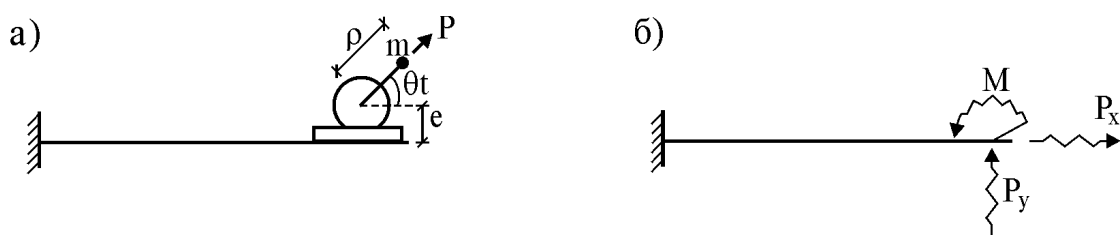


Рис. 1.4

При вращении неуравновешенной части двигателя с угловой скоростью θ возникает центробежная сила (сила инерции)

$$P = m\theta^2\rho, \quad (1.1)$$

где m – величина неуравновешенной массы, ρ – ее эксцентриситет.

Угловая скорость вращения определяется по формуле

$$\theta = \frac{\pi N}{30}, \quad (1.2)$$

где N – число оборотов двигателя в одну минуту.

Приводя силу P к главной центральной оси балки, получаем гармонические составляющие P_x , P_y главного вектора P и главный момент M (рис. 1.4 б):

$$P_x = P \cos \theta t, \quad P_y = P \sin \theta t, \quad M = Pe \cos \theta t. \quad (1.3)$$

Существует ряд машин и механизмов с возвратно-поступательным движением (поршневые компрессоры и насосы, дробилки, штамповочные машины), передающих на сооружение **периодическую негармоническую нагрузку**. Такую нагрузку с помощью рядов Фурье можно разложить на сумму гармонических нагрузок. Например, нагрузку, изображенную на рис. 1.5 а, можно приближенно представить в виде суммы только трех членов ряда Фурье – трех гармонических нагрузок (рис. 1.5 б); при этом получаем форму нагрузки, близкую к исходной (рис. 1.5 в).

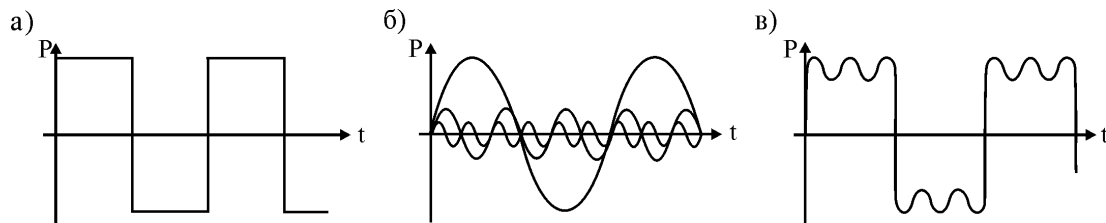


Рис. 1.5

Импульсные нагрузки создаются взрывом, падающими грузами или частями силовых установок: молотов, копров и др. Они характеризуются кратковременным или мгновенным действием (рис. 1.6 а).

Кратковременные импульсы (рис. 1.6 б) определяются величиной, формой и продолжительностью действия импульса. **Мгновенные импульсы** (рис. 1.6 в) определяются только величиной импульса.

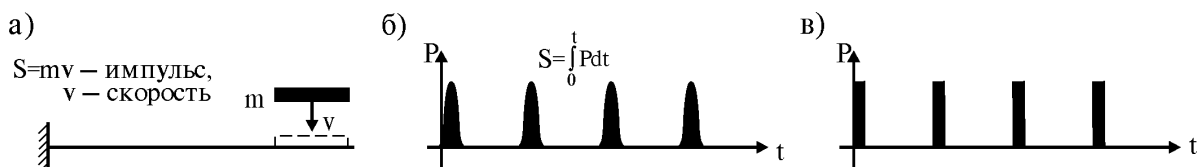


Рис. 1.6

Подвижные нагрузки – это нагрузки, положение которых меняется с течением времени. Например, нагрузки от железнодорожного состава, автомобилей и др. являются подвижными нагрузками.

Динамические нагрузки могут быть и **комбинированными**. К примеру, таковой является ударно-вибрационная нагрузка от копра.

К недетерминированным нагрузкам относятся ветровые, взрывные и сейсмические нагрузки. У таких нагрузок какой-то один или несколько параметров (направление, время, интенсивность воздействия, частота и др.) являются неопределенными. Например, ветер характеризуется нерегулярным направлением и беспорядочным изменением скорости во времени. Интенсивность нагрузки, действующей при землетрясении, может быть не только чрезвычайно большой, но и весьма нерегулярной. На рис. 1.7 приведена акселерограмма ускорений основания при сейсмической нагрузке.

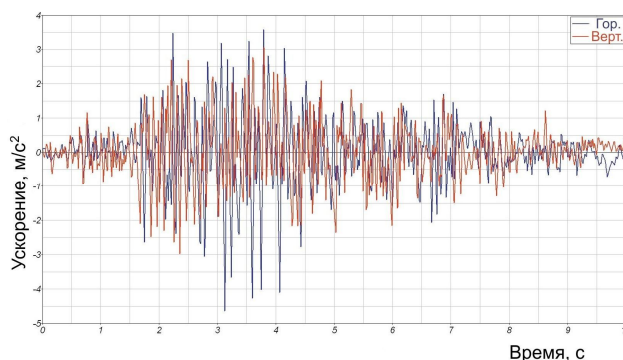


Рис. 1.7

1.5. Основные виды и характеристики колебаний

При колебаниях происходит периодический переход одного вида энергии в другой, когда потенциальная энергия U (энергия, определяемая положением системы) переходит в ее кинетическую энергию K (энергию движения) и наоборот.

Если в консервативную систему внешняя энергия не поступает, то сумма ее потенциальной и кинетической энергий $U+K$ остается постоянной. Колебания таких систем считаются незатухающими. Когда в систему поступает внешняя энергия, то ее колебания нарастают. Если же энергия системы уменьшается (например, из-за трения), колебания затухают.

Наглядное представление колебательного процесса можно получить, если построить график колебаний отдельной массы системы в координатах $y-t$ (y – перемещение, t – время). На рис. 1.8 показаны соответствующие **нарастающие**, **незатухающие** и **затухающие** колебания.

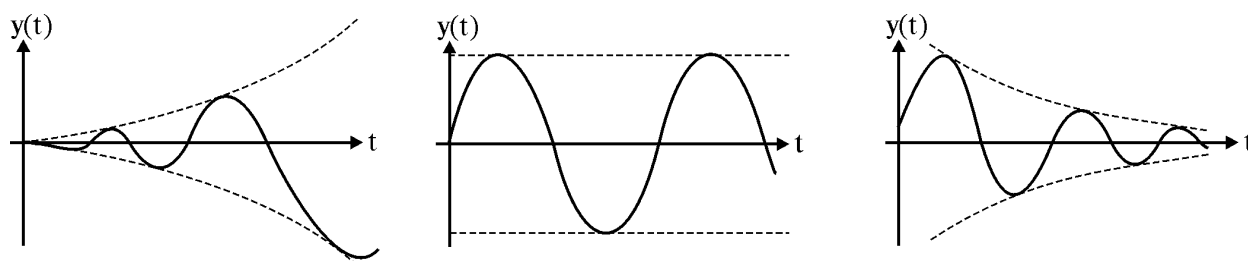


Рис. 1.8

Важной характеристикой колебательного процесса является форма колебаний. **Форма колебаний** определяется перемещениями точек колебательной системы в фиксированный момент времени относительно положения равновесия. Простейшие формы колебаний можно наблюдать. Например, можно видеть как качаются провода между столбами линии электропередач, струна музыкального инструмента, заземленная одним концом ученическая линейка и т.д. При построении формы колебаний, полученной расчетным путем, находят положение точек сооружения в фиксированный момент времени и соединяют их плавной кривой.

Если внешним воздействием нарушить равновесие колебательной системы, и затем прекратить это воздействие, она начнет совершать колебания относительно первоначального положения равновесия. Такие колебания называются **свободными**. Свободные колебания зависят от внутренних характеристик системы и от начальных условий (смещений, скоростей, ускорений) в момент снятия внешнего воздействия.

В реальных условиях свободные колебания затухают. Это связано с уменьшением энергии диссипативной системы за счет внешнего и внутреннего трения. Энергия консервативной системы не убывает, поэтому ее свободные колебания не должны затухать. Такие незатухающие колебания консервативной системы называются **собственными колебаниями**. Это название связано с тем, что формы и частоты собственных колебаний определяются только собственными характеристиками системы (распределением масс, жесткостей, геометрией, типом опор и т.д.). Т.к. консервативных систем в природе не существует, то и собственные колебания возможны только теоретически.

Большое практическое значение имеет изучение **периодических колебаний**, удовлетворяющих условию

$$y(t) = y(t + T), \quad (1.4)$$

где T – **период колебаний**, т.е. время одного колебания.

Периодические колебания характеризуются круговой частотой, технической частотой и амплитудой колебаний. **Круговая (циклическая) частота ω** – это число колебаний за 2π секунды. **Техническая частота f** (или просто **частота**) – это число колебаний за одну секунду. Их можно определять по формулам

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad (\text{измеряется в рад/с}), \quad (1.5)$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (\text{измеряется в Гц}). \quad (1.6)$$

Амплитуда колебаний – это половина общего размаха колебаний:

$$a = (y_{\max} - y_{\min}) / 2. \quad (1.7)$$

Периодические колебания, которые совершаются по законам

$$y(t) = a \sin(\omega t + \varphi) \quad \text{или} \quad y(t) = a \cos(\omega t + \varphi) \quad (1.8)$$

называются *гармоническими колебаниями*. Величина в скобках $\omega t + \varphi$ называется *фазой колебаний*, а φ – *начальной фазой колебаний*.

Если колебательная система находится под воздействием переменных возмущающих сил, вызванные ими колебания называются *вынужденными*. Вынужденные колебания зависят от параметров колебательной системы и внешнего воздействия.

В технике широко используется термин *вибрация*. Он является синонимом термина “колебание” и используется в том случае, когда колебания имеют относительно малую амплитуду и не слишком низкую частоту.

1.6. Степени свободы и расчетная модель колебательной системы

Число степеней свободы в динамике сооружений называется минимальное число независимых геометрических параметров, необходимых для определения положения всех масс колебательной системы. Число степеней свободы в динамике, в отличие от статики сооружений, определяется с учетом деформаций элементов.

Любое сооружение можно рассматривать как систему с распределенным по нему бесконечным числом элементарных масс. Поэтому оно является системой с бесконечно большим числом динамических степеней свободы. Расчет сооружений в такой постановке является сложной задачей, обычно ее используют для расчета колебаний лишь простейших систем – балок, пластин и некоторых типов оболочек.

Во многих технических расчетах, допуская некоторую погрешность, колебательную систему с бесконечно большим числом динамических степеней свободы можно заменить системой с дискретно расположенными массами (т.е. с массами, сосредоточенными в характерных сечениях). Все остальные участки сооружения рассматриваются как безмассовый скелет, сохраняющий упругие свойства сооружения. Такая дискретная массовая модель сооружения является динамической системой с конечным числом степеней свободы.

Дискретизацию массовой модели сооружения можно проводить по-разному и получать различные решения. Поэтому точность решения задачи во многом зависит от правильного выбора расчетной модели. Иногда, вводя только несколько сосредоточенных масс, удается достаточно точно описать простейшие колебания. Если этого сделать нельзя, то увеличение числа степеней свободы приближает результат к точному решению, но резко возрастает объем вычислений. Поэтому для выбора оптимальной расчетной модели требуется большая квалификация и опыт расчетчика.

Сосредоточенные массы обычно располагают в местах размещения различных грузов, машин, оборудования и воздействия больших

динамических нагрузок. Если таковых нет, то массы системы распределяют как сосредоточенные массы вдоль элементов и в характерных узлах системы. Для получения величин сосредоточенных масс часто используют энергетический подход: они вычисляются из условия равенства кинетических энергий заданной системы и ее дискретной модели. Полученные таким образом массы называются **приведенными массами**.

Каждая сосредоточенная масса в плоскости обладает тремя степенями свободы: двумя взаимно-перпендикулярными поступательными перемещениями и одним поворотом относительно центра тяжести. Если моментом инерции вращения такой массы пренебречь, получим **точечную массу**. Точечная масса обладает двумя степенями свободы. Число динамических степеней свободы n системы, состоящей из сосредоточенных и точечных масс, будет

$$n = 3n_c + 2n_t, \quad (1.9)$$

где n_c – число сосредоточенных масс, n_t – число точечных масс.

Вводя различные предпосылки (например, считая продольные деформации стержней равными нулю), число динамических степеней свободы можно уменьшить.

Для выявления динамических степеней свободы с учетом всех предпосылок необходимо представить схему деформированного состояния системы, и в нем сосредоточенные массы закреплять жесткими связями так, чтобы исключить их возможные перемещения. Тогда направления реакций во введенных связях покажут степени свободы сосредоточенных масс, а их количество будет определять число динамических степеней свободы системы.

Рассмотрим примеры определения числа степеней свободы.

1. На рис. 1.9 а показана шарнирно-опертая балка постоянного сечения. Она является системой с бесконечным числом степеней свободы, так как положение бесконечного числа элементарных масс dm определяется бесконечным числом перемещений $y(x)$. Если всю массу балки сосредоточить в одной точке (рис. 1.9 б), получим систему с одной степенью свободы. Положение ее массы m определяется одним параметром – y_m . Если массу балки распределить в три точки (рис. 1.9 в),

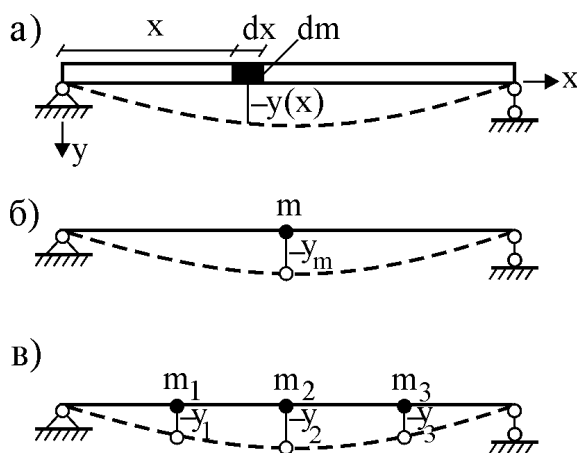


Рис. 1.9

получим систему с тремя массами m_1, m_2, m_3 . Тогда число динамических степеней свободы системы будет равно трем, т.к. три параметра y_1, y_2, y_3 определяют положение всех сосредоточенных масс.

2. Рассмотрим водонапорную башню (рис. 1.10 а) и одноэтажную раму (рис. 1.10 в). Основная масса этих сооружений расположена наверху. Поэтому при изучении горизонтальных колебаний их можно рассматривать как системы с одной степенью свободы (рис. 1.10 б, г).

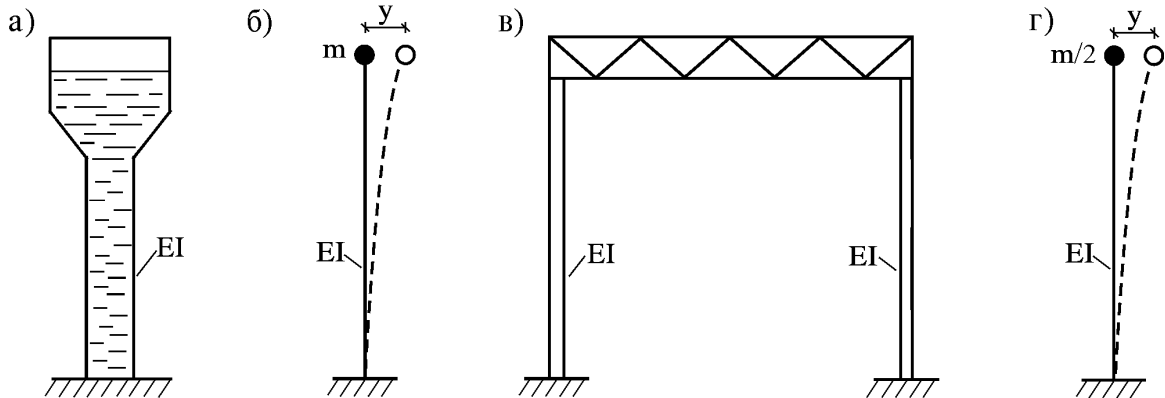


Рис. 1.10

3. Дымовую трубу с равномерно распределенной массой (рис. 1.11 а) нельзя рассматривать как систему с одной степенью свободы, так как это приводит к большим погрешностям. Ее следует рассматривать как систему с бесконечным или, приближенно, с конечным, но достаточно большим числом степеней свободы (рис. 1.11 б).

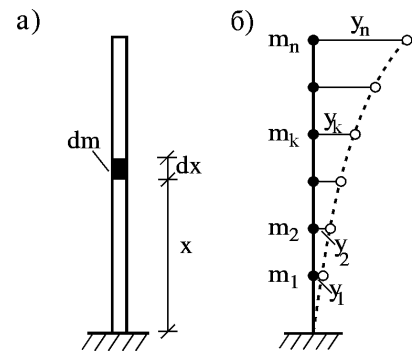


Рис. 1.11

4. Не изгибаемую во время колебаний балку, несущую три сосредоточенные массы m_1, m_2, m_3 (рис. 1.12), можно принять за систему с одной степенью свободы, т.к. перемещения всех масс полностью определяются одним параметром – углом поворота балки φ .

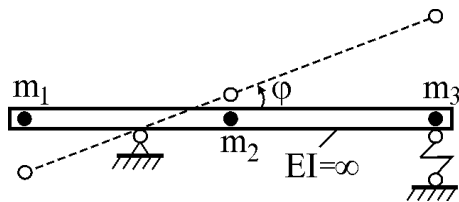


Рис. 1.12

5. Оборудование, расположенное на сооружении, может иметь не только большой вес, но и большие размеры. В таких случаях приходится учитывать инерцию их вращения, а положение масс определять их линейными перемещениями и углами поворота. Например, для рамы (рис. 1.13 а), в которой продольными деформациями пренебрегаем, положения масс m_1, m_2, m_3 будут определяться перемещениями x_1, x_2, x_3, y_3 и углами поворотов $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Поэтому число степеней свободы рамы будет равно семи.

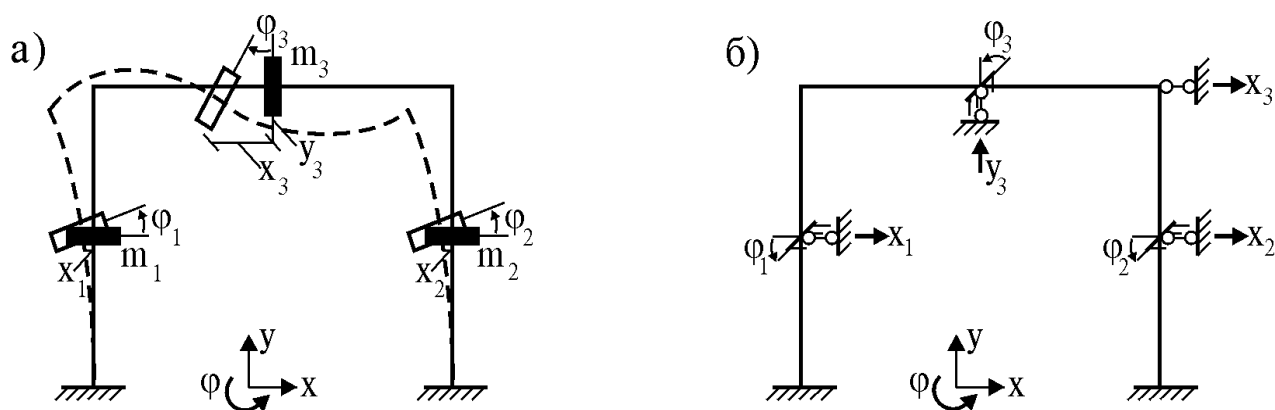


Рис. 1.13

На рис. 1.13 б показано, как исключить перемещения масс рамы введением связей. Число введенных связей равно семи. Следовательно, $n=7$. Направления реакций во введенных связях показывают степени свободы масс.

1.7. Динамические характеристики строительных материалов

Как было установлено выше, учет динамических характеристик сооружения как единой системы следует проводить на основе установления законов распределения масс, жесткостей и правильного выбора динамических степеней свободы.

Нельзя обойтись и без правильного учета динамических характеристик материалов, из которого сооружение изготавливается. К таким важным характеристикам относятся динамическая жесткость, внутреннее трение, выносливость строительных материалов.

1.7.1. Динамическая жесткость

Эксперименты показывают, что средние значения динамической жесткости материала близки статической жесткости, определяемой в пределах упругой работы материала как произведение динамического модуля упругости на геометрическую характеристику поперечного сечения.

На самом деле динамические модули упругости строительных материалов несколько выше статических. Здесь сказываются многие факторы: при колебаниях отсутствует ползучесть, меньше влияют трещины и др. особенности материала. Однако их учет вызывает большие трудности. Поэтому при кратковременных периодических колебаниях модули упругости строительных материалов принимают равными статическим.

1.7.2. Внутреннее трение

Обычно предполагается, что в идеальном материале внутреннего трения нет, а связь между силами P_0 и перемещениями y_0 системы из идеального материала является линейной (рис. 1.14 а). А в системах из обычного материала, из-за неоднородности ее структуры, внутреннее трение всегда присутствует. Поэтому при колебаниях сооружений энергия колебаний необратимо поглощается и рассеивается во внешнюю среду из-за внутреннего трения как в самом материале, так и трения проскальзывания в соединениях элементов и опор, а также внутреннего трения в деформируемом основании. Внутреннее трение играет важную благоприятную роль, так как приводит к затуханию свободных колебаний.

К сожалению, внутреннее трение весьма трудно учитывать. Поэтому при изучении гармонических колебаний зависимость между силами и перемещениями часто принимают в виде замкнутой кривой – эллипса (рис. 1.14 б), которую называют *петлей гистерезиса*.

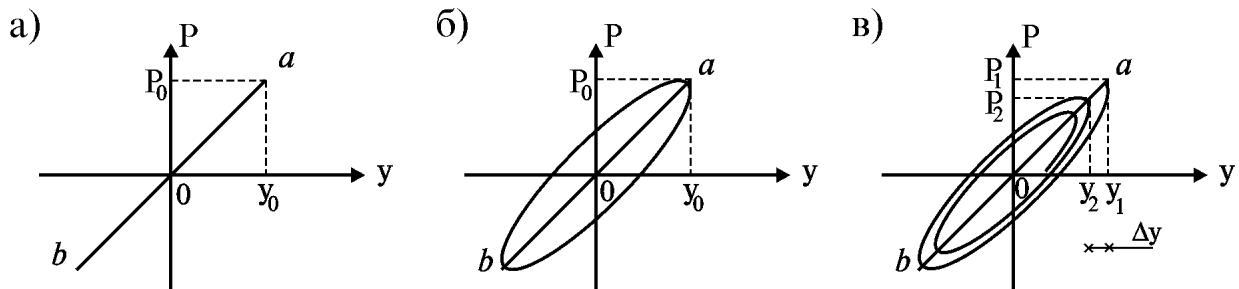


Рис. 1.14

При свободных колебаниях связь между силами и перемещениями принимают в виде эллиптической спирали (рис. 1.14 в). Рассеяние энергии системы за счет внутреннего трения в таком случае определяется изменением площади петли гистерезиса ΔW (рис. 1.14 б). Отношение этой площади как работы сил трения за один цикл деформации к площади треугольника Oay_0 , определяющей работу упругих сил W за четверть цикла, называется *коэффициентом поглощения энергии*:

$$\psi = \frac{\Delta W}{W}. \quad (1.10)$$

В динамике вводят еще один параметр – *коэффициент неупругого сопротивления* γ , равный отношению амплитуды неупругой деформации Δy (рис. 1.14 в) к величине упругой деформации:

$$\gamma = \frac{\Delta y}{y}. \quad (1.11)$$

По результатам экспериментов принимается, что $\gamma = \psi / 2\pi$. Некоторые значения коэффициента γ , определенные экспериментально для разных материалов и инерционных сил, приведены в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Значения коэффициента неупругого сопротивления γ

| Амплитудные значения инерционной силы (кг) | Железобетон | Кирпичная кладка | Дерево | Сталь прокатная |
|--|-------------|------------------|--------|-----------------|
| < 100 | 0,05 | 0,04 | 0,03 | 0,01 |
| ≥ 100 | 0,1 | 0,08 | 0,05 | 0,025 |

1.7.3. Выносливость

Колебания сооружения приводят к возникновению знакопеременных напряжений. Если эти напряжения достаточно велики, то уже через небольшое число колебаний в материале возникают трещины. Это явление называется **усталостью материала**. Усталость материала опасна тем, что из-за разрушения отдельных элементов могут разрушаться отдельные части или даже все сооружение.

Способность материала противостоять усталости, то есть выдерживать переменные циклические напряжения определенного уровня, называется **выносливостью материала**. При уменьшении величины знакопеременного напряжения число выдерживаемых циклов увеличивается. Наибольшую абсолютную величину циклического напряжения, которую выдерживает материал без разрушения при сколь угодно большом числе циклов, называют **пределом выносливости материала**. Обозначим его σ_e . Если величина знакопеременного напряжения составляет $1/4 \div 1/3$ допускаемого статического напряжения $[\sigma_{ст}]$, т.е. $\sigma_e = (1/4 \div 1/3)[\sigma_{ст}]$, усталость материала обычно не наступает.

Выносливость материала определяют опытным путем. Затем строят диаграмму Вёлера – график разрушающего напряжения (рис. 1.15). Из этого

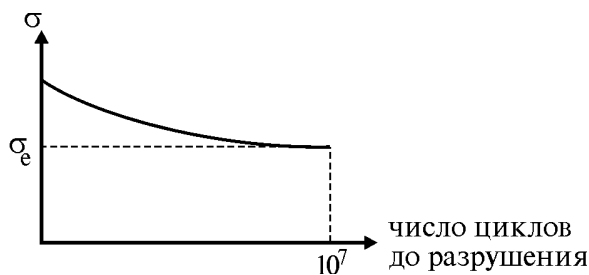


Рис. 1.15

Колебания сооружения обычно изучаются относительно его положения статического равновесия. Поэтому характер изменения напряжений в этом случае имеет вид (рис. 1.16), где

- $\sigma_{ст}$ – постоянное напряжение от статической нагрузки;
- $\sigma_{дин}$ – амплитуда знакопеременного напряжения.

графика по числу циклов колебаний определяют предел выносливости σ_e , или по максимальным знакопеременным напряжениям определяют число циклов колебаний до разрушения. По числу циклов колебаний можно определить ресурс (время службы) материала.

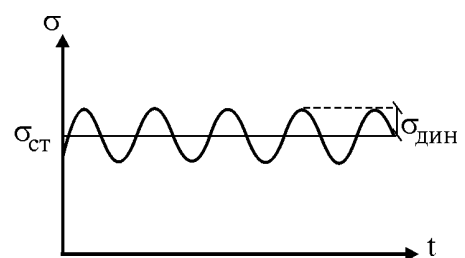
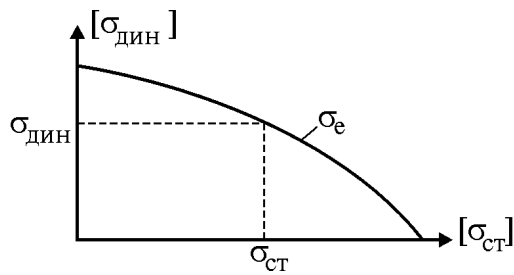


Рис. 1.16

С возрастанием $\sigma_{ст}$ уменьшается допускаемое значение знако-



переменного напряжения $[\sigma_{дин}]$. Приведенный на рис. 1.17 график иллюстрирует зависимость обоих факторов $\sigma_{ст}$ и $\sigma_{дин}$ друг от друга. По этому графику находят одну из двух величин – $[\sigma_{ст}]$ по $[\sigma_{дин}]$ и наоборот.

Рис. 1.17

Следует отметить, что выносливость всего сооружения может быть намного меньше выносливости материала, т.к. сказывается наличие концентраторов напряжений (отверстий, сварных швов, царапин и надиров), коррозия материала и др.

1.8. Воздействие колебаний на человека

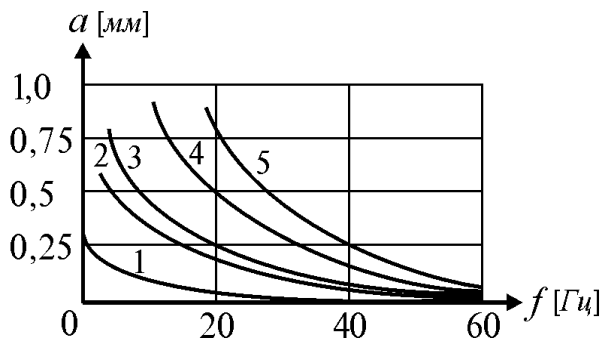
Различают два фактора воздействия колебаний на человека:

- 1) физиологическое – при колебаниях всего тела или отдельных его частей;
- 2) психологическое – при колебаниях предметов, находящихся в поле зрения.

Превышение некоторого уровня колебаний может оказаться неприятным, вызывать утомление, снизить производительность труда и даже вызвать вибрационную болезнь. Поэтому определение допустимого уровня колебаний, связанных с их воздействием на человека, является важной задачей.

Человек чрезвычайно чувствителен к колебаниям и способен ощущать очень малые колебания с амплитудой порядка 0,001-0,0001 мм. При этом чем больше частота, тем меньше амплитуда ощущаемых колебаний. Например, при частоте 100 Гц человек почти не ощущает колебания с амплитудой 0,1 мм, а при частоте 3000 Гц он чувствует даже колебания с амплитудой 0,001 мм.

Общее представление о восприимчивости человека к вибрациям дают кривые, изображенные на рис. 1.18. Это семейство кривых получено при оценке чувствительности тела человека к вертикальным колебаниям. Области 1÷5, указанные там, имеют следующий смысл:



Вибрации:

- 1 - едва ощутимы;
- 2 - сильно ощутимы;
- 3 - раздражают;
- 4 - трудно переносимы;
- 5 - вызывают болезненное состояние.

Рис. 1.18

Конечно, эти кривые являются только качественными и не могут дать

полной картины чувствительности человека к вибрациям. Это связано с тем, что имеются существенные различия между людьми. Кроме того, чувствительность человека к вибрациям зависит от направления, места приложения, интенсивности и продолжительности действия вибрационной нагрузки.

Разработаны санитарно-гигиенические нормы действия вибраций на человека. Например, некоторые допустимые амплитуды вибраций, действующих на человека в течение восьмичасовой рабочей смены в производственных условиях, приведены в табл. 1.2.

Таблица 1.2

Допустимые амплитуды вибраций, действующих на человека в течение восьмичасовой рабочей смены в производственных условиях

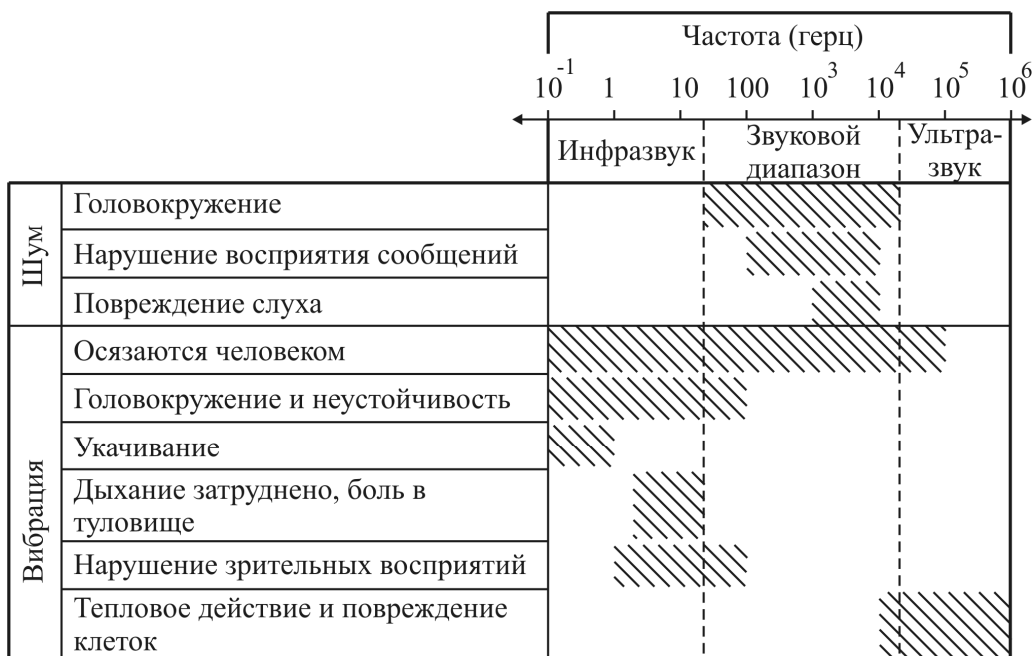
| f , Гц | 2 | 5 | 10 | 20 | 40 | 80 |
|----------|------|------|-------|--------|--------|--------|
| a , мм | 1,28 | 0,16 | 0,045 | 0,0225 | 0,0113 | 0,0056 |

Превышение этих норм приводит к вибрационной болезни человека.

При оценке биологического действия колебаний на человека наиболее важной характеристикой является частота. Некоторое представление о биологических эффектах воздействия колебаний на человека различных частот дает табл. 1.3.

Таблица 1.3

Биологические эффекты воздействия колебаний на человека*



* Шум означает вибрацию воздушного происхождения

Обеспечить безопасный для человека уровень колебаний часто бывает труднее, чем создать конструкцию необходимой прочности при воздействии динамических нагрузок.

1.9. Методы динамики сооружений

Напряженно-деформированное состояние (НДС) колеблющегося сооружения постоянно меняется с течением времени. Чтобы проследить эти изменения, составляются дифференциальные уравнения колебаний.

Существуют различные методы получения таких уравнений, каждый из которых имеет свои преимущества при решении задач определенного класса. Рассмотрим некоторые из них.

1.9.1. Кинестатический метод

В этом методе уравнения колебаний системы составляются на основе *принципа Даламбера*, согласно которому уравнения динамического равновесия можно получить из уравнений статического равновесия добавлением инерционных сил. Как известно, сила инерции J по величине равна произведению массы на ускорение:

$$J = m \ddot{y} = m \frac{d^2 y}{dt^2} \quad (1.12)$$

и направлена в противоположную ускорению сторону. Здесь m – масса, y – перемещение, $\ddot{y} = d^2 y / dt^2$ – ускорение, t – время.

Для наглядности рассмотрим простейший случай, когда консольная балка нагружена сосредоточенной силой P (рис. 1.19 а).

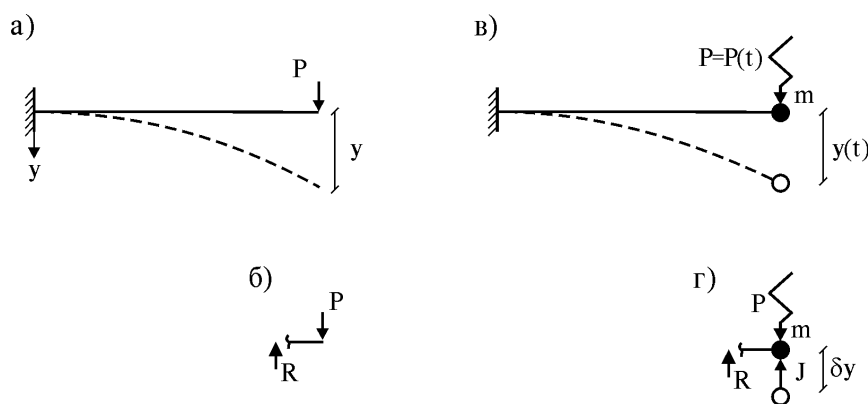


Рис. 1.19

Условие статического равновесия вырезанного элемента (рис. 1.19 б) запишем в виде

$$P - R = 0, \quad (1.13)$$

где сила упругости балки R направлена против вектора перемещения y .

Теперь представим, что вместо статической силы к той же консоли приложена динамическая сила $P=P(t)$ (рис. 1.19 в). Вводя инерционную силу $J = m\ddot{y}$ (рис. 1.19 г), направленную против вектора ускорения, получим

$$P - R - J = 0 \quad (1.14)$$

или

$$m \ddot{y} + R = P. \quad (1.15)$$

Это уравнение представляет собой уравнение динамического равновесия массы m . От уравнения статического равновесия (1.13) оно отличается наличием инерционной силы J . Однако равновесие сил в уравнении (1.15) условно, так как система под действием внешней силы P , силы упругости R и инерционной силы J находится в движении с ускорением \ddot{y} центра массы m . Поэтому уравнение (1.15) называется **уравнением движения**. Решение этого уравнения (или системы таких уравнений в более сложных случаях) представляет собой важный этап динамического расчета сооружений.

1.9.2. Кинематический метод

Когда в сооружении имеются одновременно сосредоточенные и распределенные массы, записать уравнения равновесия сложно. Тогда используется кинематический метод, основанный на **принципе возможных перемещений**: работа всех сил системы на ее возможных перемещениях равна нулю.

Пусть в рассмотренной балке (рис. 1.19 а) δy – возможное, т.е. допускаемое связями малое перемещение. Каждая сила на этом перемещении совершает работу. Работа всех сил (рис. 1.19 г) будет:

$$P\delta y - R\delta y - J\delta y = 0. \quad (1.16)$$

Это уравнение является общим уравнением динамики, так как позволяет изучать движение любой механической системы с одной степенью свободы. Если его представить в виде

$$(P - R - J)\delta y = 0 \quad (1.17)$$

и разделить на $\delta y \neq 0$, с учетом $J = m\ddot{y}$ приходим к уравнению движения системы, полностью совпадающему с уравнением (1.15) кинетостатического метода.

1.9.3. Использование принципа Гамильтона

Принцип Гамильтона является наиболее общим принципом механики. Его суть состоит в следующем: для действительного движения системы так называемое действие по Гамильтону S постоянно:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt = \text{const.} \quad (1.18)$$

Здесь $L = K - U$ – функция Лагранжа; K – кинетическая, U – потенциальная энергии системы.

Для консервативных систем принцип Гамильтона может быть преобразован в уравнение Лагранжа второго рода:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0. \quad (1.19)$$

В нашем примере

$$K = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \dot{y}^2, \quad U = Qy,$$

где $v = \dot{y}$ – скорость, $Q = R - P$ – обобщенная (суммарная) сила, действующая на массу m . После подстановки этих выражений в уравнение Лагранжа получим уравнение совпадающее с (1.15).

Итак, уравнение движения динамической системы может быть получено любым из этих трех методов. Самым простым из них является кинестатический метод, отличающийся от статического метода добавлением инерционных сил по принципу Даламбера. Для сложных систем, особенно систем с распределенными массами, для которых составление уравнений равновесия затруднительно, могут использоваться кинематический метод или принцип Гамильтона. Выбор метода для конкретной задачи зависит от типа динамической системы и определяется самим расчетчиком.

1.9.4. Энергетический метод

При решении задач о собственных колебаниях упругих консервативных систем часто используется закон сохранения механической энергии, согласно которому сумма потенциальной и кинетической энергий колебательной системы постоянна во времени:

$$U + K = \text{const.} \quad (1.20)$$

Такой подход часто называют *энергетическим методом*.

ВОПРОСЫ

1. Какова разница между числом степеней свободы в статике и динамике сооружений?
2. Чем отличаются собственные колебания от свободных колебаний?
3. Определите число степеней свободы систем с точечными массами (рис. 1.20), пренебрегая массами и продольными деформациями стержней.

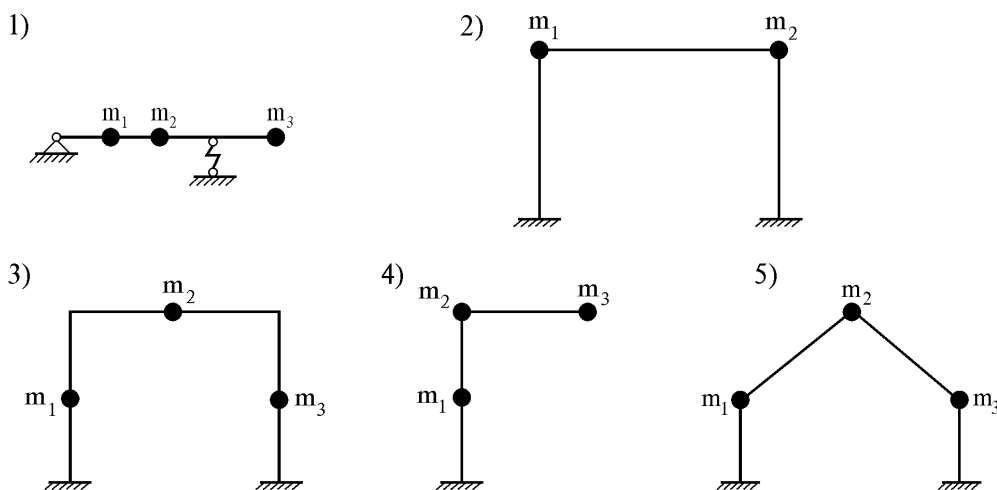


Рис. 1.20

Глава 2

КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ С ОДНОЙ СТЕПЕНЬЮ СВОБОДЫ

Система с одной динамической степенью свободы является простейшей колебательной системой. Методы ее расчета используются при расчете систем с большим числом степеней свободы.

2.1. Вывод уравнения движения

Пусть на невесомую балку с точечной массой m действует динамическая нагрузка $P=P(t)$, вызывающая колебания балки (рис. 2.1 а). Пренебрегая продольными колебаниями балки (считая продольные деформации малыми), изучим только вертикальные колебания массы. В таком случае балку можно считать колебательной системой с одной степенью свободы.

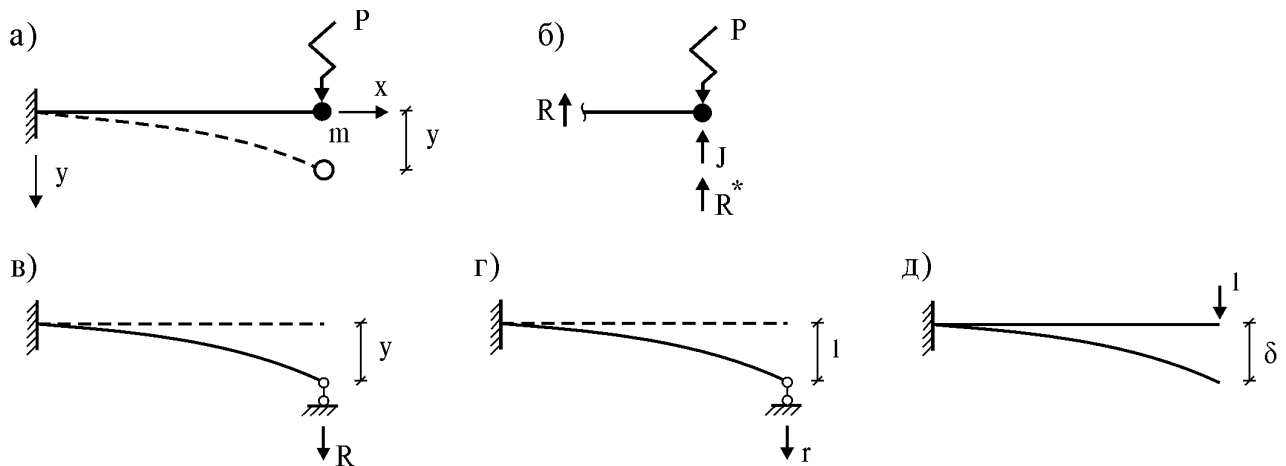


Рис. 2.1

Рассмотрим движение массы относительно ее исходного положения равновесия. Для этого воспользуемся кинестатическим методом, добавляя в уравнение статического равновесия инерционную силу (рис. 2.1 б):

$$P - J - R - R^* = 0, \quad (2.1)$$

Здесь $J = m\ddot{y}$ – сила инерции, R – сила упругости балки, R^* – сила сопротивления среды движению массы.

Силу упругости R можно определять из решения задачи статики в двух формах – в форме метода перемещений и в форме метода сил.

Вначале применим метод перемещений. С этой целью в свободном правом конце балки введем вертикальную связь, и дадим ей такое же перемещение y , какое возникает при колебаниях (рис. 2.1 в). Реакция этой связи будет равна силе отпора балки R . Если балка упругая, эта сила пропорциональна отклонению балки:

$$R = ry, \quad (2.2)$$

где r – упругая характеристика балки, называемая **жесткостью**. Она равна реакции в связи при ее смещении на единицу (рис. 2.1 г).

Подставив в (2.1) выражения сил инерции и упругости, получим уравнение вынужденных колебаний системы с одной степенью свободы в форме метода перемещений:

$$m\ddot{y} + ry + R^* = P. \quad (2.3)$$

Иногда его называют уравнением колебаний в прямой форме.

Для использования метода сил рассмотрим другое состояние балки, когда в направлении колебаний массы приложена единичная сила (рис. 2.1 д). Перемещение этой точки под действием единичной силы называется **податливостью**. Обозначим его буквой δ . На основании теоремы о взаимности работ, возможная работа сил состояния “г” (рис. 2.1 г) на перемещениях состояния “д” (рис. 2.1 д) равна возможной работе сил состояния “д” на перемещениях состояния “г”, т.е.

$$r \cdot \delta = 1 \cdot 1.$$

Отсюда получаем уравнение связи между жесткостью и податливостью

$$r = 1/\delta. \quad (2.4)$$

Подставим его в уравнение (2.3). После деления на m получим

$$\ddot{y} + \frac{1}{m\delta}y + \frac{R^*}{m} = \frac{P}{m}.$$

Если обозначить

$$\frac{1}{m\delta} = \omega^2, \quad (2.5)$$

получаем уравнение вынужденных колебаний системы с одной степенью свободы в форме метода сил (уравнение колебаний в обратной форме):

$$\ddot{y} + \omega^2 y + \frac{R^*}{m} = \frac{P}{m}. \quad (2.6)$$

Полученные уравнения движения системы с одной степенью свободы в формах метода перемещений (2.3) и метода сил (2.6) позволяют вести расчет простейших сооружений на колебания. Выбор конкретного метода зависит от особенностей системы и определяется самим расчетчиком.

2.2. Собственные колебания

Если в рассматриваемой колебательной системе (рис. 2.1 а) внешнюю силу исключить, т.е. принять $P=0$ и не учитывать демпфирование (силы сопротивления среды $R=0$), можно изучать ее собственные колебания. Тогда уравнение (2.6) принимает вид

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0. \quad (2.7)$$

Общее решение этого уравнения будет

$$y = A \sin \omega t + B \cos \omega t. \quad (2.8)$$

Постоянные интегрирования A и B определим из начальных условий.

Пусть в начальный момент времени (при $t=0$) известны начальное отклонение y_0 и начальная скорость v_0 , т.е. $y(0)=y_0$, $v(0)=v_0$. Тогда

$$\begin{aligned} \text{при } t=0 \text{ имеем: } \quad y_0 &= A \sin 0 + B \cos 0, \\ v_0 &= \dot{y}(0) = A\omega \cos 0 - B\omega \sin 0. \end{aligned}$$

Из этих уравнений определяем

$$B=y_0, \quad A=\frac{v_0}{\omega}. \quad (2.9)$$

Подставляя их в (2.8), получаем закон, определяющий собственные колебания системы при начальном отклонении y_0 и начальной скорости v_0 :

$$y = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + y_0 \cos \omega t. \quad (2.10)$$

Если в общее решение (2.8) сделать подстановки

$$A = a \cos \varphi, \quad B = a \sin \varphi, \quad (2.11)$$

то оно примет вид

$$y = a \sin(\omega t + \varphi). \quad (2.12)$$

Значит, собственные колебания системы совершаются по гармоническому закону с частотой ω и начальной фазой φ . При этом последняя определяет, какую часть амплитуды составляет начальное перемещение.

С другой стороны, из (2.11) получаем

$$A^2 + B^2 = a^2, \quad B/A = \operatorname{tg} \varphi.$$

Если учесть (2.9), из них получаются формулы для определения амплитуды и начальной фазы колебаний:

$$a = \sqrt{y_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}; \quad \varphi = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\omega y_0}{v_0}. \quad (2.13)$$

Из этих формул видно, что амплитуда a и начальная фаза φ зависят от начальных условий (начального отклонения y_0 и начальной скорости v_0).

Пусть G – собственный вес массы m , g – ускорение свободного падения, а $y_{\text{ст}}$ – прогиб (перемещение) точки, где расположена масса, от ее веса. Тогда можно записать

$$m = G/g, \quad G \cdot \delta = y_{\text{ст}}, \quad (2.14)$$

и, учитывая выражения (2.5) и (2.4), получаем формулы для определения круговой частоты колебаний:

$$\omega^2 = \frac{l}{m\delta} = \frac{r}{m} = \frac{g}{y_{\text{ст}}}. \quad (2.15)$$

Определим период колебаний. Для этого заметим, что колебания повторяются, когда фаза колебаний $\omega t + \varphi$ увеличивается на 2π , т.е. когда

$$\omega t + \varphi + 2\pi = \omega(t+T) + \varphi.$$

Отсюда получаем формулы для определения периода и частоты колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}; \quad f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (2.16)$$

Период и частота являются основными динамическими характеристиками колебательной системы. Запишем различные выражения для определения периода и технической частоты собственных колебаний:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{m\delta} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{r}} = 2\pi\sqrt{\frac{y_{ст}}{g}}, \quad [с]; \quad (2.17)$$

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{m\delta}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{r}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{y_{ст}}}, \quad [Гц]. \quad (2.18)$$

Число колебаний в одну минуту определяется по формуле

$$N = 60f = \frac{30}{\pi} \sqrt{\frac{g}{y_{ст}}}. \quad (2.19)$$

Полагая в ней $g=9,81 \approx \pi^2$, получим

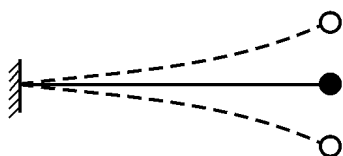
$$N = \frac{30}{\sqrt{y_{ст}}}. \quad (2.20)$$

Этой формулой часто пользуются на практике.

При изучении крутильных колебаний (т.е. при вращении массы вокруг центра тяжести), в формулы (2.15)-(2.18) вместо массы m следует подставить ее момент инерции относительно оси вращения. Под податливостью δ в этом случае подразумевается угол закручивания точки с массой от приложенного единичного момента.

Формула (2.12) определяет закон движения массы при собственных колебаниях системы с одной степенью свободы (рис. 2.2 а). Построенный график ее движения (рис. 2.2 б) показывает, что эти колебания являются незатухающими.

а)



б)

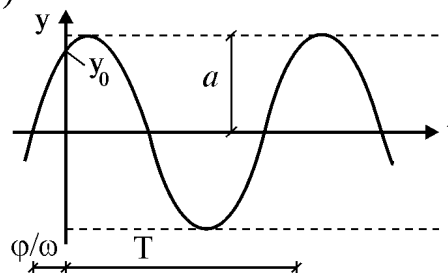


Рис. 2.2

Полученные результаты свидетельствуют о том, что в системах без демпфирования свободные колебания являются собственными колебаниями. Можно сделать и следующие выводы:

- 1) частота и период зависят только от физических характеристик системы, и не зависят от начального возмущения;
- 2) амплитуда и начальная фаза колебаний зависят от начальных условий возникновения колебаний;
- 3) частота собственных колебаний увеличивается при увеличении жесткости системы и уменьшении массы.

Пример 1. Найти круговую, техническую частоты и период собственных колебаний балки с точечной массой m , заданным весом G (рис. 2.3 а) при следующих данных: $l=10$ м; $E=2 \cdot 10^{11}$ Па; $I=2000$ см⁴; $G=4800$ Н. Весом и продольной деформацией балки пренебречь.

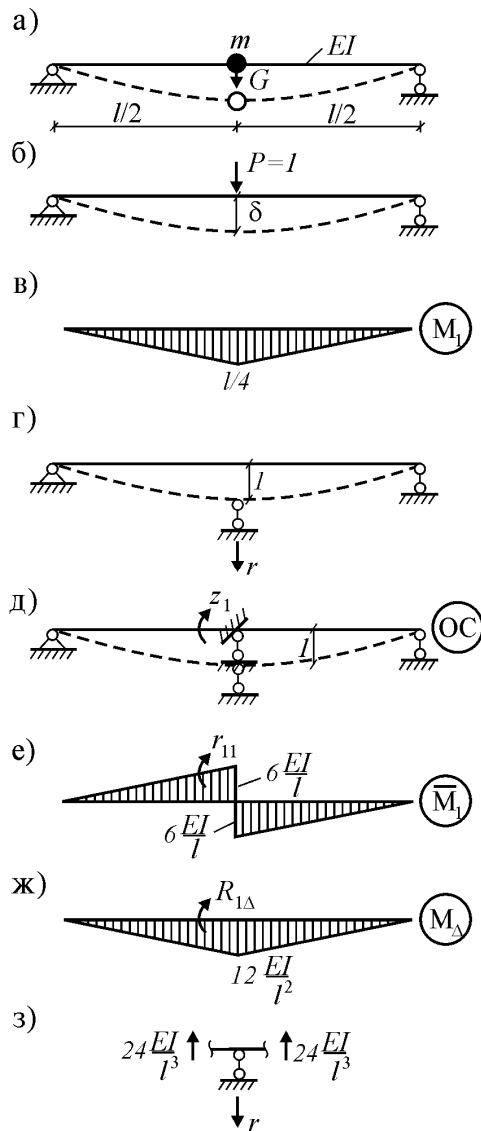


Рис. 2.3

Решение. При данных условиях балка является системой с одной степенью свободы, т.к. положение массы m при ее колебаниях определяется только вертикальным перемещением.

Решим задачу двумя методами.

а) Использование метода сил

Частоту собственных колебаний определим по формуле $\omega = \sqrt{l/m\delta}$, где δ – податливость точки с массой в единичном состоянии (рис. 2.3 б). Величину δ найдем по формуле Мора с использованием единичной эпюры M_1 (рис. 2.3 в):

$$\delta = \sum \int \frac{M_1^2}{EI} = \frac{l/2}{6} \cdot \left(0 \cdot 0 + 4 \cdot \frac{l}{8} \cdot \frac{l}{8} + \frac{l}{4} \cdot \frac{l}{4} \right) \cdot \frac{1}{EI} \times 2 = \frac{l^3}{48EI}.$$

Тогда $\omega = \frac{1}{\sqrt{m\delta}} = \sqrt{\frac{48EI}{ml^3}}.$

б) Использование метода перемещений

Частоту собственных колебаний найдем по формуле $\omega = \sqrt{r/m}$, а жесткость балки r в точке с массой – как реакцию в жесткой опоре, введенной в направлении степени свободы при ее смещении на единицу (рис. 2.3 г). Эту реакцию

непосредственно определить нельзя, так как полученная система является кинематически неопределимой. Поэтому применим метод перемещений, выбирая основную систему (рис. 2.3 д), строя эпюры моментов \overline{M}_1 в единичном состоянии от единичного угла поворота $Z_1=1$ (рис. 2.3 е) и грузовом состоянии M_Δ от осадки опоры, равной единице (рис. 2.3 ж). Каноническое уравнение будет:

$$r_{11}Z_1 + R_{1\Delta} = 0.$$

Так как $R_{1\Delta} = 0$, то $Z_1 = 0$, и эпюра моментов от единичной осадки (рис. 2.3 г) определяется по формуле $M = \overline{M}_1 Z_1 + M_\Delta = M_\Delta$. Тогда по эпюре M_Δ и рис. 2.3 з получаем величину жесткости: $r = 48EI/ml^3$. Подставив его в подходящую формулу из (2.15), получим результат, совпадающий с найденной частотой по методу сил.

Если принять $m = G/g \approx 4800/10 = 480$ [кг], получим:

$$\omega = \sqrt{\frac{48EI}{ml^3}} = \sqrt{\frac{48 \cdot 2 \cdot 10^{11} \cdot 2000 \cdot 10^{-8}}{480 \cdot 10^3}} = 20 \text{ [с}^{-1}\text{]};$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \approx \frac{6,28}{20} = 0,31 \text{ [с]};$$

$$f = \frac{1}{T} \approx \frac{1}{0,31} = 3,2 \text{ [Гц]}.$$

При решении этой задачи заметно преимущество метода сил. Для других задач может быть выгодно использование метода перемещений.

Пример 2. Найти частоту собственных колебаний рамы из стержней постоянной жесткости EI с одной точечной массой m (рис. 2.4).

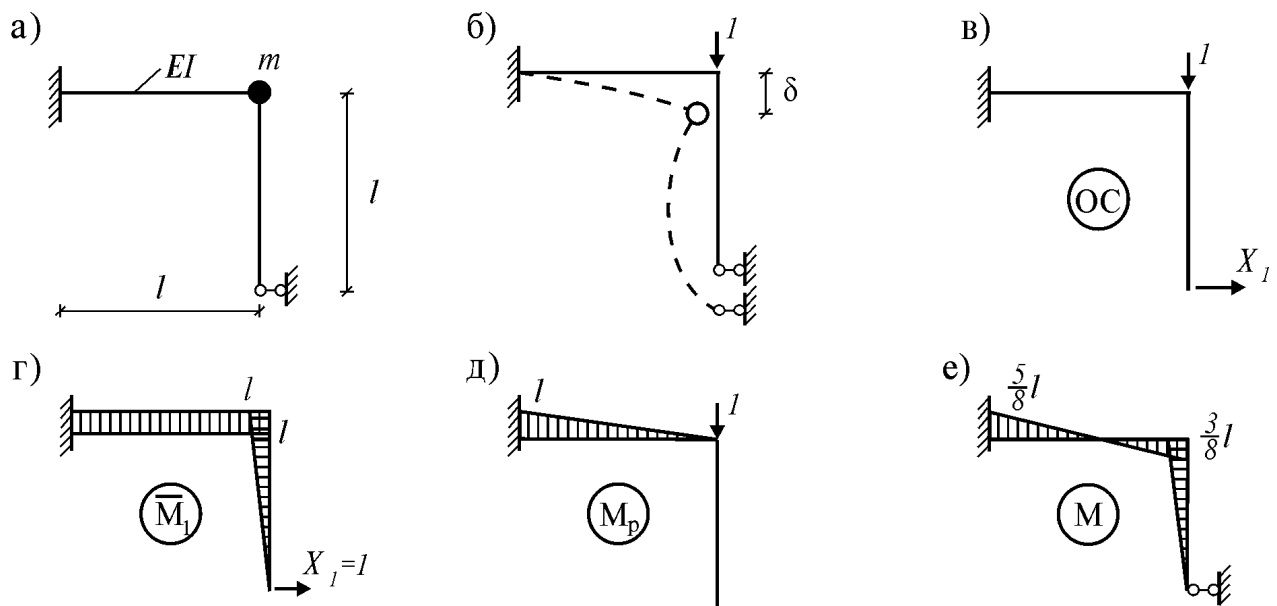


Рис. 2.4

Решение. Пренебрегая массой рамы и продольными деформациями ее элементов, приходим к колебательной системе с одной степенью свободы, в которой масса m совершает вертикальные колебания.

Воспользуемся формулой $\omega = \sqrt{1/m\delta}$, в которой податливость δ является перемещением массы в направлении степени свободы при воздействии единичной силы (рис. 2.4 б). Ее можно вычислить перемножением эпюры моментов от этой единичной силы на эту же эпюру по формуле Мора. Но, так как рама статически неопределима, для построения этой эпюры воспользуемся методом сил.

Для этого выберем основную систему (ОС) по методу сил (рис. 2.4 в), запишем каноническое уравнение $\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0$ и построим эпюры моментов в единичном и грузовом состояниях \overline{M}_1 (рис. 2.4 г) и M_P (рис. 2.4 д). После подсчета коэффициентов и решения канонического уравнения, по формуле $M = \overline{M}_1 X_1 + M_P$ получаем эпюру моментов от единичной силы (рис. 2.4 е). Теперь, умножая эту эпюру на себя, вычислим искомую податливость δ . Однако в статически неопределимых системах перемещения можно вычислять и по-другому – перемножением эпюры в статически неопределимой системе M (рис. 2.4 е) на эпюру в статически определимой системе M_P (рис. 2.4 д):

$$\delta = \sum \int \frac{M M_P}{EI} = \frac{l}{6EI} \left(\frac{5}{8} \cdot l \cdot l + 4 \cdot \frac{l}{8} \cdot \frac{l}{2} + 0 \cdot 0 \right) = \frac{7}{48} \frac{l^3}{EI}.$$

Тогда

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m\delta}} = \sqrt{\frac{48EI}{7ml^3}}.$$

2.3. Свободные колебания

Колебаниям сооружения оказывает сопротивление внутреннее трение, возникающее в связях между элементами и в самих элементах. Закономерности внутреннего трения пока изучены недостаточно. Поэтому для его учета используются различные гипотезы. Например, по *гипотезе линейно-вязкого трения* сила внутреннего трения R^* принимается пропорциональной скорости деформации v (рис. 2.5):

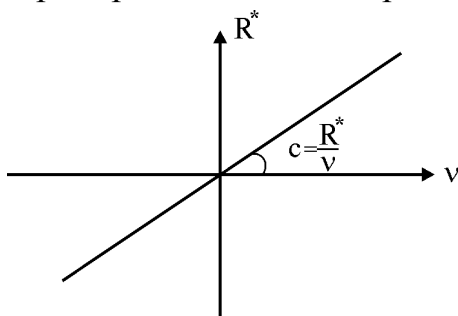


Рис. 2.5

$$R^* = cv = c\dot{y}. \quad (2.21)$$

Принятый здесь коэффициент пропорциональности c называется *коэффициентом демпфирования*.

Так как эта гипотеза впервые была выдвинута Фойгтом, ее часто называют *гипотезой Фойгта*.

Недостатком гипотезы линейно-вязкого трения является то, что коэффициент демпфирования c не является физической постоянной материала и зависит от распределения масс и жесткостей колебательной системы, а вследствие этого зависит и от частоты колебаний.

При подстановке (2.21) в общее уравнение колебаний системы с одной степенью свободы (2.6) при свободных колебаниях по условию $P=0$ получаем

$$\ddot{y} + \frac{c}{m} \dot{y} + \omega^2 y = 0.$$

Если обозначить

$$\alpha = c/2m,$$

дифференциальное уравнение свободных колебаний системы с одной степенью свободы получится в виде

$$\ddot{y} + 2\alpha \dot{y} + \omega^2 y = 0. \quad (2.22)$$

Введенный здесь коэффициент α называется **коэффициентом затухания**. В отличие от коэффициента демпфирования c , коэффициент затухания α является постоянным для конкретного материала и обычно определяется из эксперимента.

Между рассмотренным в 1-ой главе коэффициентом неупругого сопротивления (см. формулу 1.11) и коэффициентом затухания α существуют зависимости

$$\gamma = 2\alpha/\omega, \quad \alpha = \gamma \omega/2. \quad (2.23)$$

Теперь перейдем к решению уравнения (2.22).

Его общее решение будем искать в форме Эйлера: $y = Ae^{kt}$. После его подстановки получим характеристическое уравнение

$$k^2 + 2k\alpha + \omega^2 = 0, \quad (2.24)$$

корни которого $k_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}$. Следовательно, общее решение уравнения (2.22) зависит от соотношений между α и ω .

Рассмотрим три возможных случая.

2.3.1. Малое демпфирование ($\alpha < \omega$)

В этом случае корни характеристического уравнения (2.24) комплексно-сопряженные. Поэтому общее решение будет

$$y = e^{-\alpha t} (A \sin \omega_d t + B \cos \omega_d t),$$

где $\omega_d = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}$ называется **частотой демпфированной системы**.

Если сделать подстановки $A = a_d \cos \varphi_d$, $B = a_d \sin \varphi_d$, получим уравнение свободных колебаний системы с одной степенью свободы, учитывающей демпфирование:

$$y = a_d e^{-\alpha t} \sin(\omega_d t + \varphi_d). \quad (2.25)$$

При известных начальных условиях $y(0)=y_0$, $v(0)=v_0$ амплитуда и начальная фаза колебаний будут

$$a_d = \sqrt{y_0^2 + \left(\frac{\alpha y_0 + v_0}{\omega_d}\right)^2}; \quad \varphi_d = \arctg \frac{\omega_d y_0}{\alpha y_0 + v_0}.$$

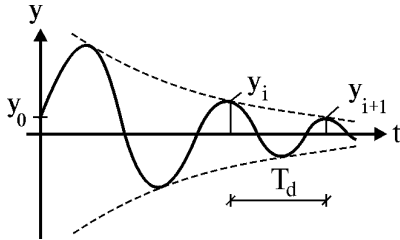


Рис. 2.6

Из графика функции (2.25) видно (рис. 2.6), что при малом демпфировании колебания происходят с постоянной частотой ω_d и периодом $T_d = 2\pi/\omega_d$, а амплитуды колебаний все время уменьшаются, т.е. колебания постепенно затухают.

Быстроту затухания колебаний можно оценить, если найти отношение амплитуд через один период:

$$\frac{y_i}{y_{i+1}} = \frac{a_d e^{-\alpha t}}{a_d e^{-\alpha(t+T_d)}} = e^{\alpha T_d}.$$

Итак, амплитуда колебаний убывает по экспоненциальной прогрессии, и тем быстрее, чем больше α . Натуральный логарифм этого отношения называется **логарифмическим декрементом затухания колебаний**:

$$\delta_d = \ln \frac{y_i}{y_{i+1}} = \alpha T_d. \quad (2.26)$$

Для различных материалов и сооружений быстрота затухания колебаний различна, что видно из следующей таблицы.

Таблица 2.1

Быстрота и логарифмический декремент затухания колебаний

| Типы сооружений | Железобетонные | Кирпичные | Деревянные | Здания | Метал. башни, мачты | Металлические | Метал. облегч. покрыт. |
|-----------------|----------------|-----------|------------|--------|---------------------|---------------|------------------------|
| y_i/y_{i+1} | 1,37 | 1,28 | 1,17 | 1,17 | 1,17 | 1,08 | 1,06 |
| δ_d | 0,314 | 0,25 | 0,157 | 0,157 | 0,157 | 0,078 | 0,063 |

Быстрота затухания колебаний зависит также от состояния сооружения, качества материала, уровня напряженности элементов и т.д. Величину δ_d определяют экспериментально.

Так как $\omega_d = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}$, то частота колебаний демпфированной системы ω_d меньше частоты собственных колебаний ω . В то же время, в обычных строительных конструкциях α бывает значительно меньше ω .

Поэтому часто принимают $\omega_d \approx \omega$. Естественно, период затухающих колебаний T_d больше периода собственных колебаний T . Однако при малых α его также можно принять равным периоду собственных колебаний системы, т.е. $T_d \approx T$. Следовательно, при определении частот, периодов и форм свободных колебаний многих сооружений, с целью упрощения расчетов, демпфирование можно не учитывать. Но это недопустимо при определении перемещений, скоростей и ускорений, которые уменьшаются быстро, и тем скорее, чем больше α .

2.3.2. Критическое демпфирование ($\alpha = \omega$)

В этом случае корни характеристического уравнения (2.24) вещественны и равны: $k_{1,2} = -\alpha = -\omega$. Поэтому общее решение уравнения (2.22) запишется так:

$$y = e^{-\omega t} (A + Bt).$$

Если по начальным условиям $y(0) = y_0$ и $v(0) = v_0$ определить постоянные A и B , то уравнение колебаний примет вид

$$y = e^{-\omega t} [y_0(1 + \omega t) + v_0 t]. \quad (2.27)$$

Каково бы ни было значение выражения в скобках этой формулы, при $t \rightarrow \infty$ перемещение y будет стремиться к нулю. График функции имеет вид, представленный на рис. 2.7. Как видно из него, при критическом демпфировании отклоненная масса асимптотически приближается к исходному положению. Следовательно, движение такой системы после ее начального возбуждения будет неколебательным и постепенно угасающим. Его называют

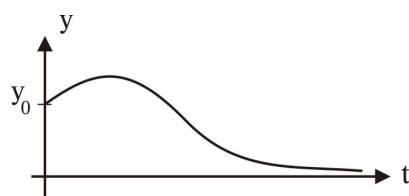


Рис. 2.7

апериодическим движением.

2.3.3. Большое демпфирование ($\alpha > \omega$)

В этом случае корни характеристического уравнения вещественны и отрицательны. Поэтому общее решение уравнения будет

$$y = e^{-\alpha t} (A \operatorname{sh} \omega' t + B \operatorname{ch} \omega' t),$$

где $\omega' = \sqrt{\alpha^2 - \omega^2}$. Если учесть граничные условия, получим

$$y = e^{-\alpha t} \left(\frac{v_0}{\omega'} \operatorname{sh} \omega' t + y_0 \operatorname{ch} \omega' t \right). \quad (2.28)$$

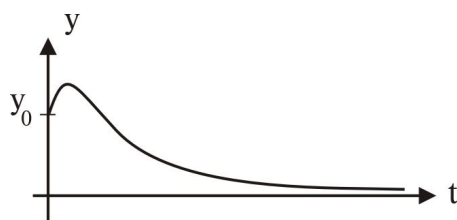


Рис. 2.8

И здесь, каково бы ни было значение выражения в скобках, при $t \rightarrow \infty$ перемещение $y \rightarrow 0$. Его график представлен на рис. 2.8.

Как видим, и при большом демпфировании колебания отсутствуют, и колебательная система совершает аperiodическое движение.

Итак, при изменении демпфирования от малого к большому свободные колебания системы прекращаются. Значит, критическое демпфирование определяет минимальную величину демпфирования, при котором колебания не могут возникнуть.

В обычных сооружениях демпфирование незначительно. Большое демпфирование имеют лишь сооружения, в которых имеются специальные устройства – демпферы (вязкие элементы с большим сопротивлением) для исключения нежелательных колебаний. Величину минимального сопротивления демпферов, необходимых для введения в систему, вычисляют из условия критического демпфирования $\alpha = \omega$.

Случаи критического и большого демпфирования в дальнейшем рассматривать не будем.

2.4. Вынужденные колебания без демпфирования

Когда колебательная система без демпфирования с одной степенью свободы совершает вынужденные колебания под воздействием динамической силы $P=P(t)$, дифференциальное уравнение ее движения получается из (2.6) при $R^*=0$:

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \frac{P}{m}. \quad (2.29)$$

Оно является неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами. Его общее решение можно представить в виде суммы общего решения однородного уравнения $y_{од}$ и частного решения неоднородного уравнения $y_{ч}$:

$$y = y_{од} + y_{ч}. \quad (2.30)$$

Однородное уравнение совпадает с уравнением собственных колебаний (2.7), поэтому его общее решение совпадает с общим решением уравнения собственных колебаний (2.10), т.е.

$$y_{од} = y_{соб} = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + y_0 \cos \omega t. \quad (2.31)$$

Частное решение неоднородного уравнения $y_{ч}$ зависит от динамической нагрузки в правой части. Удобным методом его получения является представление нагрузки как системы мгновенных импульсов.

2.4.1. Действие мгновенного импульса

Пусть находящаяся в покое колебательная система с массой m в момент времени τ подвергается действию мгновенного импульса S (рис. 2.9 а). Это воздействие вызовет свободные колебания системы, которые,

если не учитывать демпфирование, можно считать собственными колебаниями. Поэтому примем

$$y = a \sin(\omega t + \varphi). \quad (2.32)$$

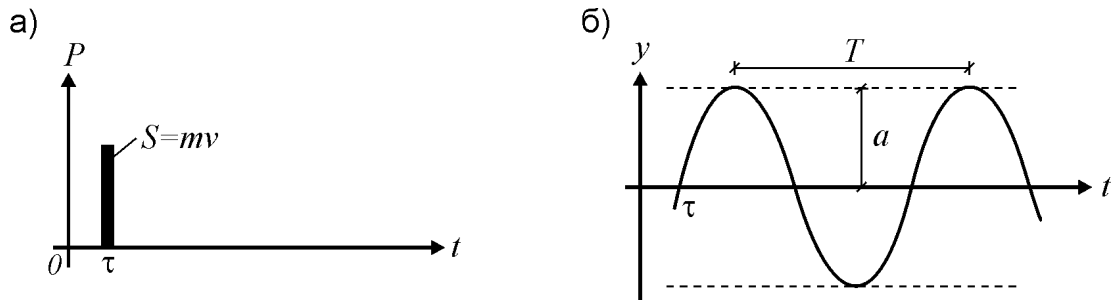


Рис. 2.9

Мгновенный импульс не успевает изменить положение массы, поэтому $y_{t=\tau} = 0$. Однако, действуя как импульс, он сообщает массе начальную скорость $v_{t=\tau} = S/m$. По этим начальным условиям из (2.32) определим амплитуду и начальную фазу колебаний:

$$a = S/m\omega, \quad \varphi = -\omega\tau.$$

Тогда уравнение (2.32) принимает вид

$$y = \frac{S}{m\omega} \sin \omega(t - \tau). \quad (2.33)$$

Значит, колебания массы m будут происходить с собственной частотой ω и периодом T собственных колебаний системы. График этого движения представлен на рис. 2.9 б.

2.4.2. Действие системы импульсов

Если в моменты $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k$ на систему действуют несколько мгновенных импульсов S_1, S_2, \dots, S_k , то на основе принципа суперпозиции (независимости действия сил), перемещение массы будет определяться суммой перемещений от каждого импульса. С учетом (2.33), получим

$$y = \frac{1}{m\omega} \sum_{i=1}^k S_i \sin[\omega(t - \tau_i)]. \quad (2.34)$$

Наиболее невыгодным, оказывающим наибольшее воздействие на систему, является периодическое действие импульсов.

Пусть импульсы равной величины S действуют через период T_s (рис. 2.10 а). Если момент (время) начала действия первого импульса принять $\tau_1 = 0$, то момент приложения i -го импульса будет $\tau_i = (i-1)T_s$. Тогда имеем

$$y = \frac{S}{m\omega} \sum_{i=1}^k \sin \omega[t - (i-1)T_s].$$

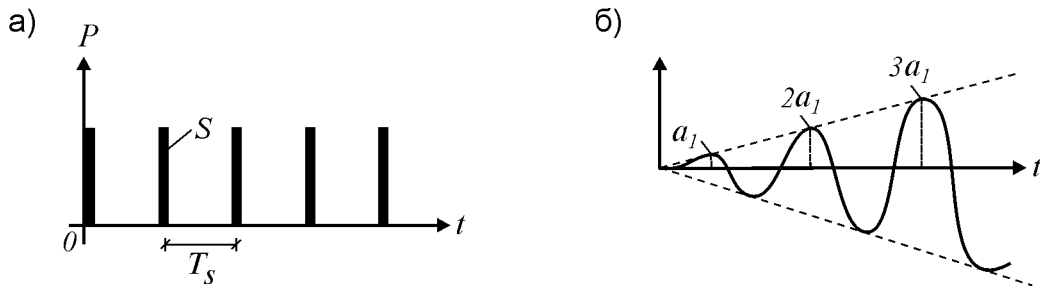


Рис. 2.10

Если период действия импульсов равен периоду собственных колебаний (т.е. $T_s = T = 2\pi / \omega$), то уравнение движения массы будет определяться формулой

$$y = \frac{S}{m\omega} \sum_{i=1}^k \sin[\omega t - (i-1)2\pi] = \frac{S}{m\omega} \sum_{i=1}^k \sin \omega t = k \frac{S}{m\omega} \sin \omega t.$$

Из него следует, что амплитуда колебаний зависит от числа импульсов k :

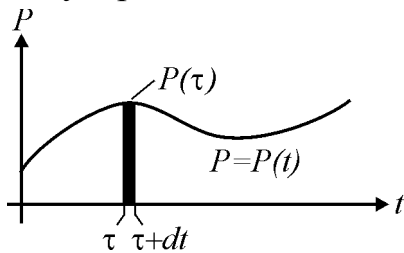
$$a = k \frac{S}{m\omega} = ka_1, \quad \text{где } a_1 = \frac{S}{m\omega}, \quad k - \text{число импульсов.}$$

График этого движения представлен на рис. 2.10 б.

Таким образом, при действии импульсов с постоянной частотой, равной частоте собственных колебаний системы, амплитуда колебаний равномерно и неограниченно растет. Совпадение частоты возмущающей силы с собственной частотой и сопровождающие его явления называются **резонансом**. При резонансных колебаниях сооружения возникают большие деформации и напряжения, что может привести к разрушениям.

2.4.3. Действие произвольной нагрузки

Для определения частного решения неоднородного дифференциального уравнения (2.29) при действии произвольной силы $P=P(t)$, эту силу представим как непрерывное действие бесконечно большого числа мгновенных импульсов (рис. 2.11). Принимая в формуле (2.34) $S_i = P(\tau)d\tau$ и интегрируя в интервале времени $0 \div t$, получим



$$y = \frac{1}{m\omega} \int_0^t P(\tau) \sin \omega(t-\tau) d\tau. \quad (2.35)$$

Рис. 2.11

Он называется **интегралом Дюамеля**.

Так как это есть частное решение дифференциального уравнения (2.29), а общее решение однородного уравнения определяется по формуле (2.31), то общее решение всего уравнения будет

$$y = y_{\text{своб}} + \frac{1}{m\omega} \int_0^t P(\tau) \sin \omega(t-\tau) d\tau. \quad (2.36)$$

Первое слагаемое $y_{\text{соб}}$ в этом выражении соответствует собственным колебаниям системы, а второе – вынужденным колебаниям.

Таким образом, масса совершает сложное движение, состоящее из суммы двух колебаний. Однако, из-за наличия внутреннего трения (в реальных системах – сооружениях – оно всегда присутствует) свободные колебания затухают. Поэтому через некоторое время после начала колебаний свободными колебаниями можно пренебречь и считать, что в дальнейшем система совершает только чисто вынужденные колебания, определяемые выражением (2.35).

2.4.4. Действие вибрационной нагрузки

Рассмотрим вибрационную нагрузку, изменяющуюся по закону $P(t) = P_0 \sin \theta t$. Если подставить эту функцию в (2.35), получим выражение

$$y = \frac{I}{m\omega} \int_0^t P_0 \sin \theta \tau \cdot \sin \omega(t - \tau) d\tau.$$

Его интегрирование дает следующий результат

$$y = \frac{P_0}{m\omega(\theta^2 - \omega^2)} (\theta \sin \omega t - \omega \sin \theta t). \quad (2.37)$$

Первое слагаемое в правой части этой формулы $\theta \sin \omega t$ соответствует собственным колебаниям с частотой ω , а второе слагаемое представляет чисто вынужденные колебания с частотой вибрационной силы θ .

В обычных сооружениях собственные колебания быстро затухают и после нескольких колебаний остаются лишь вынужденные колебания. Этот процесс называется **установлением колебаний**. После установления колебаний система колеблется лишь с частотой возмущающей силы:

$$y = \frac{P_0 \sin \theta t}{m(\omega^2 - \theta^2)} = \frac{P(t)}{m(\omega^2 - \theta^2)}. \quad (2.38)$$

Преобразуем эту формулу. Так как

$$\omega^2 = \frac{I}{m\delta}, \text{ то } \frac{I}{m} = \omega^2 \delta, \quad \frac{P_0}{m} = \omega^2 \delta P_0 = \omega^2 y_{\text{ст}}.$$

Здесь $\delta P_0 = y_{\text{ст}}$ – статический прогиб под действием силы P_0 . Тогда

$$y = \frac{P_0 \sin \theta t}{m(\omega^2 - \theta^2)} = \frac{\omega^2 y_{\text{ст}} \sin \theta t}{\omega^2 - \theta^2} = \frac{y_{\text{ст}}}{1 - (\theta / \omega)^2} \sin \theta t. \quad (2.39)$$

По этой формуле можно заключить, что, в зависимости от частоты, вибрационная нагрузка может оказывать большее воздействие чем статическая нагрузка. С целью изучения этого явления вводится понятие **коэффициента динамичности** μ , который показывает, во сколько раз максимальное отклонение от динамической нагрузки больше отклонения от ее статического действия:

$$\mu = \frac{y_{\text{дин}}^{\text{max}}}{y_{\text{ст}}}. \quad (2.40)$$

Если этот коэффициент известен, то расчет на динамическую нагрузку $P(t) = P_0 \sin \theta t$ можно заменить расчетом на статическую нагрузку $P = \mu P_0$.

Коэффициент динамичности вибрационной силы определяется из (2.39):

$$\mu = \frac{y_{\text{дин}}^{\text{max}}}{y_{\text{ст}}} = \frac{1}{1 - (\theta / \omega)^2}. \quad (2.41)$$

Эта формула используется при малых частотах вибрационной силы, когда $\theta < \omega$. При больших частотах, когда $\theta > \omega$, получаем

$$y = -\frac{y_{\text{ст}}}{(\theta / \omega)^2 - 1} \sin \theta t = \frac{y_{\text{ст}}}{(\theta / \omega)^2 - 1} \sin(\theta t - \pi).$$

Значит, в этом случае

$$\mu = \frac{1}{(\theta / \omega)^2 - 1}. \quad (2.42)$$

Анализ формулы (2.38) позволяет сделать некоторые выводы:

1) когда $\theta < \omega$, знак отклонения y совпадает со знаком силы P , поэтому вибрационная сила и вызванное ею перемещение массы находятся в одной фазе;

2) когда $\theta > \omega$, то знак отклонения будет противоположен знаку силы, т.е. возмущающая сила P и перемещение y будут в противофазе;

3) когда частота вынуждающей силы приближается к частоте собственных колебаний, т.е. $\theta \rightarrow \omega$, то амплитуда колебаний неограниченно возрастает: $y \rightarrow \infty$. Такой случай соответствует резонансу.

Однако, вывод о неограниченном возрастании перемещений был получен без учета затухания колебаний. В действительности, из-за наличия

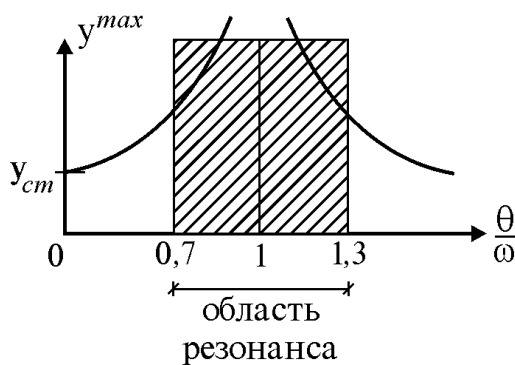


Рис. 2.12

демпфирования, этого не будет. Этот вывод не справедлив и потому, что в области больших деформаций становится непригодным решение теории линейных колебаний. Поэтому резонанс следует рассматривать как случай, когда значительно возрастает амплитуда колебаний (рис. 2.12). И это может стать опасным для прочности сооружения.

Согласно нормам, в период установившегося режима работы машин нужно стремиться к тому, чтобы частоты θ и ω отличались друг от друга не менее чем на 30%, т.е. чтобы их отношение не лежало в интервале

$$0,7 \leq \frac{\theta}{\omega} \leq 1,3. \quad (2.43)$$

2.4.5. Действие внемассовой нагрузки

Приложение динамической нагрузки в системе вне массы (рис. 2.13 а) является более общим случаем рассмотренного вопроса. Такая задача решается путем замены действующей внемассовой силы $P(t)$ на эквивалентную ей заменяющую силу $P_m(t)$ (рис. 2.13 б).

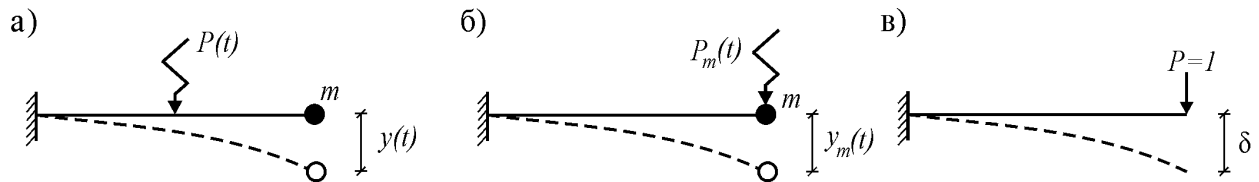


Рис. 2.13

Заменяющая сила $P_m(t)$ должна дать такое же перемещение массы m , что и сила $P(t)$, т.е. должно быть $y(t) = y_m(t)$. С другой стороны, $y_m(t) = P_m(t) \cdot \delta$, где δ – податливость балки в точке расположения массы m (рис. 2.13 в). Тогда внемассовая нагрузка приводится к заменяющей силе

$$P_m(t) = \frac{y(t)}{\delta}. \quad (2.44)$$

2.4.6. Кинематическое возмущение опор

Рассмотрим балку с массой m (рис. 2.14 а), правая опора которой перемещается по известному закону $\Delta(t)$.

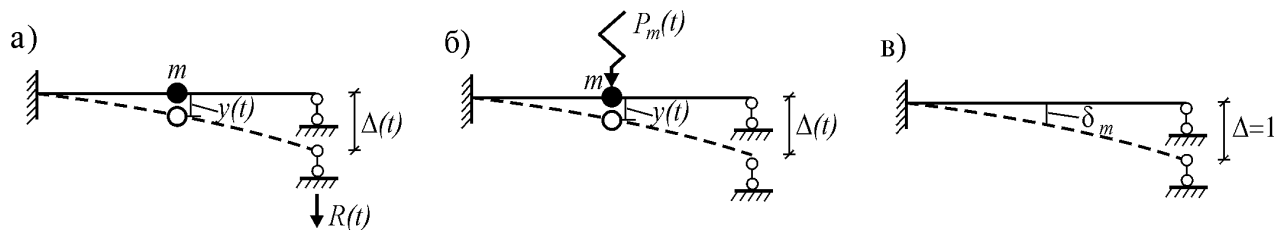


Рис. 2.14

Условно можно считать, что балка совершает вынужденные колебания под действием реакции $R(t)$ в опоре при ее смещении на $\Delta(t)$. Тогда, на основании формулы (2.44), внемассовую силу $R(t)$ можно заменить силой

$$P_m(t) = \frac{y(t)}{\delta},$$

приложенной к массе (рис. 2.14 б).

Перемещение $y(t)$ найдем по методу перемещений, рассматривая единичное состояние балки (рис. 2.14 в) при $\Delta = 1$. Если δ_m – перемещение массы m , то

$$y(t) = \delta_m \cdot \Delta(t).$$

Тогда заменяющая сила, эквивалентная смещению $\Delta(t)$, будет

$$P_m(t) = \frac{\delta_m}{\delta} \cdot \Delta(t).$$

Подставляя ее в (2.36), получим

$$y = y_{\text{соб}} + \frac{1}{m\omega} \int_0^t \frac{\delta_m}{\delta} \cdot \Delta(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau.$$

С учетом того, что $1/m\delta = \omega^2$, окончательно получаем

$$y = y_{\text{соб}} + \omega \delta_m \int_0^t \Delta(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau. \quad (2.45)$$

Рассмотрим частный случай кинематического возбуждения по гармоническому закону

$$\Delta(t) = \Delta_0 \sin \theta t, \quad (2.46)$$

где Δ_0 – амплитудное значение смещения опоры, θ – частота кинематического возбуждения. Подставляя (2.46) в (2.45), имеем

$$y = y_{\text{соб}} + \omega \delta_m \int_0^t \Delta_0 \sin \theta \tau \cdot \sin \omega(t - \tau) d\tau. \quad (2.47)$$

После интегрирования и ряда преобразований получим

$$y = y_{\text{соб}} + \frac{\delta_m \Delta_0}{1 - \theta^2 / \omega^2} \left(\sin \theta t - \frac{\theta}{\omega} \sin \omega t \right). \quad (2.48)$$

При длительных колебаниях влиянием собственных колебаний (перемещением $y_{\text{соб}}$ и вторым слагаемым в скобках) можно пренебречь. Тогда перемещение массы и действующая на нее инерционная сила будут

$$y = \frac{\delta_m \Delta_0}{1 - \theta^2 / \omega^2} \sin \theta t = \mu \delta_m \Delta_0 \sin \theta t, \quad (2.49)$$

$$J = m \theta^2 y. \quad (2.50)$$

2.5. Вынужденные колебания с учетом демпфирования

Если внутреннее трение идеализируется по гипотезе Фойгта ($R^* = c\dot{y} = 2m\alpha \dot{y}$), то дифференциальное уравнение вынужденных колебаний системы с одной степенью свободы (2.6) принимает вид

$$\ddot{y} + 2\alpha \dot{y} + \omega^2 y = \frac{P}{m}. \quad (2.51)$$

Его решение равно сумме общего решения однородного уравнения (без правой части) и частного решения неоднородного уравнения (с правой частью):

$$y = y_{\text{од}} + y_{\text{ч}}. \quad (2.52)$$

Однородное уравнение совпадает с (2.22), его решение нам известно.

Частное решение неоднородного уравнения зависит от действующей нагрузки. За основу его получения примем теорию мгновенного импульса. При этом ограничимся лишь рассмотрением малого демпфирования (когда $\alpha < \omega$), наиболее характерного для сооружений. Затем более подробно рассмотрим воздействие вибрационной нагрузки.

2.5.1. Действие мгновенного импульса

После действия мгновенного импульса S в момент времени τ в системе начнутся свободные колебания с начальными условиями

$$y_{t=\tau} = 0, \quad v_{t=\tau} = \dot{y}_{t=\tau} = S/m. \quad (*)$$

Решение уравнения свободных колебаний для случая $\alpha < \omega$ нами было получено и имеет вид (2.25):

$$y = a_d e^{-\alpha t} \sin(\omega_d t + \varphi_d), \quad \text{где } \omega_d = \sqrt{\omega^2 - \alpha^2}.$$

Поэтому

$$\dot{y} = a_d e^{-\alpha t} [\omega_d \cos(\omega_d t + \varphi_d) - \alpha \sin(\omega_d t + \varphi_d)].$$

Используя начальные условия (*), получаем

$$\varphi_d = -\omega_d \tau; \quad a_d = S e^{\alpha \tau} / m \omega_d.$$

С учетом этого, уравнение движения системы будет

$$y = \frac{S}{m \omega_d} e^{-\alpha(t-\tau)} \sin[\omega_d(t-\tau)]. \quad (2.53)$$

Из него следует, что колебания происходят с постоянной частотой ω_d и зависят от коэффициента затухания α .

2.5.2. Действие произвольной нагрузки

Общее решение однородного дифференциального уравнения нам известно. Определяя частное решение неоднородного уравнения, силу $P = P(t)$ представим как сумму бесконечно большого числа мгновенных импульсов (рис. 2.11). Принимая в (2.53) $S = P(\tau)d\tau$ и интегрируя в интервале $(0 \div t)$, получим интеграл Дюамеля в виде

$$y_{\text{ч}} = \frac{I}{m \omega_d} \int_0^t P(\tau) e^{-\alpha(t-\tau)} \sin[\omega_d(t-\tau)] d\tau. \quad (2.54)$$

Тогда полное перемещение массы определится выражением

$$y = a_d e^{-\alpha t} \sin(\omega_d t + \varphi_d) + \frac{I}{m \omega_d} \int_0^t P(\tau) e^{-\alpha(t-\tau)} \sin[\omega_d(t-\tau)] d\tau. \quad (2.55)$$

Если подынтегральная функция в (2.55) интегрируема аналитически, то реакция сооружения определяется непосредственно. Для случаев, когда функция $P(t)$ задается сложной функцией или графически, эта задача

решается приближенно, используя различные численные методы. Например, периодическую функцию можно заменить ее разложением в ряд Фурье:

$$P(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos 2\pi k \frac{t}{T} + b_k \sin 2\pi k \frac{t}{T} \right).$$

Здесь T – период функции нагрузки, а его коэффициенты будут:

$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt, \quad a_k = \frac{2}{T} \int_0^T P(t) \cos 2\pi k \frac{t}{T} dt, \quad b_k = \frac{2}{T} \int_0^T P(t) \sin 2\pi k \frac{t}{T} dt.$$

В разложении функции принято бесконечное число членов, что соответствует точному решению. Удерживая в суммах только конечное число k членов, получают приближенное выражение функции P .

2.5.3. Действие вибрационной нагрузки

При действии вибрационной нагрузки $P(t) = P_0 \sin \theta t$ дифференциальное уравнение вынужденных колебаний (2.51) принимает вид

$$\ddot{y} + 2\alpha \dot{y} + \omega^2 y = \frac{P_0}{m} \sin \theta t. \quad (2.56)$$

Определение его частного решения из интеграла Дюамеля (2.54) достаточно сложно. Задача упрощается, если решение искать в форме $y_{\text{ч}} = C \sin(\theta t + \varphi_1)$. Действительно, если подставить его в дифференциальное уравнение (2.56), приравнять выражения, содержащие $\sin \theta t$ и $\cos \theta t$ в левой и правой частях уравнения, начальная фаза φ_1 и амплитуда колебаний C будут:

$$\varphi_1 = \arctg \frac{2\alpha\omega}{\theta^2 - \omega^2}, \quad C = \frac{P_0}{m \sqrt{(\theta^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\theta^2}}.$$

Учитывая, что через некоторое время после начала колебаний собственные колебания прекращаются и что $P_0/m = \omega^2 y_{\text{ст}}$, решение уравнения вынужденных колебаний упрощается и принимает вид:

$$y = y_{\text{ч}} = C \sin(\theta t + \varphi_1) = \frac{\omega^2 y_{\text{ст}}}{\sqrt{(\theta^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\theta^2}} \sin(\theta t + \varphi_1). \quad (2.57)$$

Из анализа формулы (2.57) можно сделать некоторые выводы:

- 1) после установления вынужденные колебания совершаются с частотой возмущающей силы;
- 2) амплитуда вынужденных колебаний не зависит от начальных условий;
- 3) при вынужденных колебаниях системы с демпфированием всегда имеет место сдвиг фазы φ_1 между действующей силой P и перемещением y .

В соответствии с (2.57) определяется коэффициент динамичности:

$$\mu = \frac{y_{\text{дин}}^{\text{max}}}{y_{\text{ст}}} = \frac{\omega^2}{\sqrt{(\theta^2 - \omega^2)^2 + 4\alpha^2\theta^2}}. \quad (2.58)$$

При резонансе, т.е. когда частота вибрации равна частоте собственных колебаний ($\theta = \omega$), с учетом (2.23) имеем

$$\mu = \omega / 2\alpha = 1 / \gamma. \quad (2.59)$$

Наибольшего значения этот коэффициент достигает при $\theta^2 = \omega^2 - 2\alpha^2$:

$$\mu_{\text{max}} = \frac{\omega^2}{2\alpha\sqrt{\omega^2 - \alpha^2}} = \frac{1}{\gamma\sqrt{1 - \gamma^2/4}}. \quad (2.60)$$

Разница между результатами по формулам (2.58) и (2.60) незначительна.

Графики изменения коэффициента динамичности μ при разных значениях коэффициента неупругого сопротивления γ показаны на рис. 2.15.

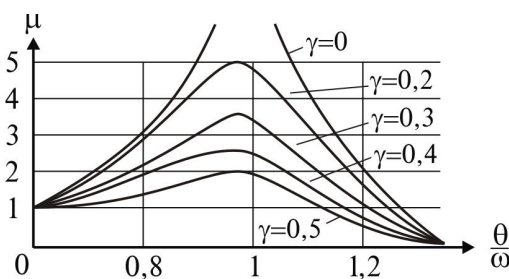


Рис. 2.15

Из формулы (2.60) и графика μ следует, что в системах с демпфированием:

1) амплитуды колебаний имеют конечную величину;

2) вне пределов резонансно-опасной зоны ($\theta/\omega \leq 0,7$ и $\theta/\omega \geq 1,3$) демпфирование мало влияет на коэффициент динамичности;

3) в резонансно-опасной зоне ($0,7 \leq \theta/\omega \leq 1,3$) демпфирование существенно влияет на амплитуду колебаний, если $\gamma < 0,4$; при проектировании сооружений желательно избегать этой зоны, подбирая соотношения размеров и жесткостей отдельных элементов или вводя специальные виброгасители и т.п.

Пример 3. На стальной двутавровой балке находится работающий двигатель весом $G=200$ кг (рис. 2.16 а), создающий при $N=2000$ об/мин вибрационную нагрузку с амплитудным значением $P_0=10$ кг. Решить четыре задачи динамики при следующих данных: балка двутавровая № 60 с моментом инерции $I=76806$ см⁴ и моментом сопротивления изгибу $W=2560$ см³, модуль упругости $E=2 \cdot 10^6$ кг/см², допускаемое напряжение $[\sigma]=1600$ кг/см².

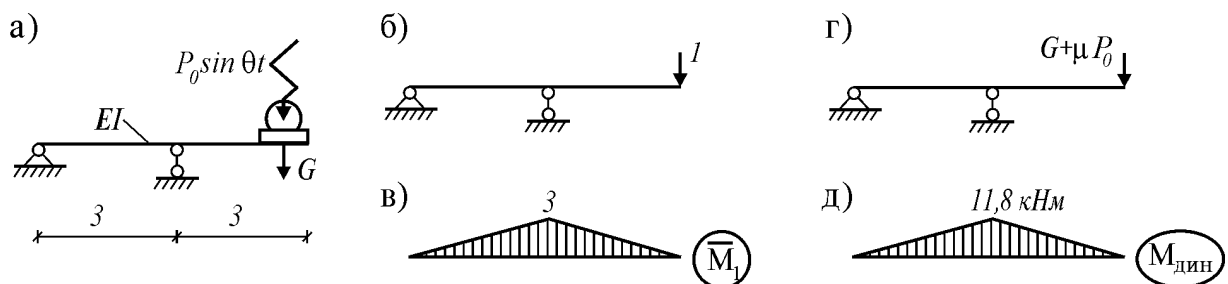


Рис. 2.16

Решение. Представим исходные данные в системе СИ: $G=1960 \text{ Н}$; $P_0=98 \text{ Н}$; $E=19,6 \cdot 10^{10} \text{ Н/м}^2$; $I=7,68 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4$; $W=2,56 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3$; $[\sigma]=1,57 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$.

1. Начнем с решения 1-ой задачи динамики – определения частоты собственных колебаний. Вычислим ее по формуле $\omega = \sqrt{g/y_{\text{ст}}}$, а статический прогиб $y_{\text{ст}}$ найдем путем рассмотрения единичного состояния (рис. 2.16 б), построения в нем единичной эпюры \bar{M} (рис. 2.16 в). Тогда

$$\delta = \sum \int \frac{\bar{M}^2}{EI} dx = \frac{3}{6} (4 \cdot 1,5^2 + 3^2) \frac{1}{EI} \times 2 = \frac{18}{EI} = \frac{18}{19,6 \cdot 10^{10} \cdot 7,68 \cdot 10^{-4}} = 1,19 \cdot 10^{-7} [\text{м}]$$

$$\text{Значит, } \omega = \sqrt{\frac{g}{y_{\text{ст}}}} = \sqrt{\frac{g}{G\delta}} = \sqrt{\frac{9,8}{1960 \cdot 1,19 \cdot 10^{-7}}} = 204,5 \text{ [с}^{-1}\text{]}.$$

2. Для решения 2-ой задачи динамики (проверки системы на резонанс) вычислим круговую частоту вращения двигателя:

$$\theta = \frac{\pi N}{30} = \frac{3,14 \cdot 2000}{30} = 209,4 \text{ [с}^{-1}\text{]}.$$

Тогда имеем

$$\frac{\theta}{\omega} = \frac{209,4}{204,5} = 1,024.$$

Так как $0,7 \leq \theta/\omega \leq 1,3$, по условию (2.43) колебания происходят в резонансно-опасной зоне. Значит, решение задач динамики надо продолжить, и из-за возможного возникновения больших амплитуд колебаний и напряжений их следует вычислять с учетом демпфирования.

3. Решение 3-ей задачи динамики – проверку системы на прочность начнем с обращения к табл. 1.1, из которой следует, что при амплитуде нагрузки $P_0 < 100 \text{ кг}$ коэффициент неупругого сопротивления для стали равен $\gamma = 0,01$. Тогда из формулы (2.23) определяем $\alpha = \gamma\omega/2 = 1,0225$, а из (2.58) имеем $\mu = 20,14$.

Если не учтем демпфирование, по формуле (2.42) имеем

$$\mu = \frac{1}{(\theta/\omega)^2 - 1} = \frac{1}{1,024^2 - 1} = 20,58.$$

Как и следовало ожидать, при малом демпфировании (когда $\gamma < 0,4$) и вне резонансно-опасной зоны учет демпфирования мало влияет на величину коэффициента динамичности. При резонансе (когда $\theta = \omega$) по формуле (2.59) получили бы

$$\mu = \frac{\omega}{2\alpha} = \frac{204,5}{2 \cdot 1,0225} = 100.$$

Динамическая эпюра моментов в балке будет складываться из суммы статического момента от веса двигателя G и момента от вибрационной

силы, приведенной к статической силе посредством коэффициента динамичности: $P_{\text{вибр}}^{\text{max}} = \mu P_0$ (рис. 2.15 г). Тогда получаем (рис. 2.16 д):

$$M_{\text{дин}} = M_{\text{ст}} + M_{\text{вибр}}^{\text{max}} = (G + \mu P_0) \bar{M}.$$

Максимальное напряжение в балке будет

$$\sigma_{\text{дин}}^{\text{max}} = \frac{(G + \mu P_0) \bar{M}_{\text{дин}}^{\text{max}}}{W} = \frac{(1960 + 20,14 \cdot 98) \cdot 3}{2,56 \cdot 10^{-3}} = 4,66 \cdot 10^6 \text{ (Н/м}^2\text{)}.$$

Предполагая, что данная конструкция будет долго эксплуатироваться, примем допустимое динамическое напряжение намного меньше статического:

$$[\sigma_{\text{дин}}] = \frac{1}{3} [\sigma_{\text{ст}}] = \frac{1}{3} \cdot 1,57 \cdot 10^8 = 5,23 \cdot 10^7 \text{ (Н/м}^2\text{)}.$$

Тем не менее, условие прочности балки выполняется: $\sigma_{\text{дин}}^{\text{max}} < [\sigma_{\text{дин}}]$.

4. Решим 4-ю задачу динамики – проверим систему на допустимость амплитуд вибраций. Если предположить, что максимальная амплитуда колебаний будет на свободном конце консоли, получим

$$y_{\text{вибр}}^{\text{max}} = \mu P_0 \delta = 20,14 \cdot 98 \cdot 1,19 \cdot 10^{-7} = 2,35 \cdot 10^{-4} \text{ (м)} = 0,235 \text{ (мм)}.$$

Так как частота вращения двигателя $f = N/60 = 2000/60 = 33,3$ (Гц), то из табл. 1.2 следует, что амплитуда колебаний превышает допустимую. Значит, человек рядом с работающим двигателем работать не сможет.

ВОПРОСЫ

1. Как изменится частота и период собственных колебаний, если изменить: а) жесткость, б) массу системы?

2. В чем состоит явление резонанса?

3. Какова роль внутреннего сопротивления при свободных и вынужденных колебаниях?

4. Определить частоту собственных колебаний рамы постоянной жесткости EI с точечной массой m (рис. 2.17), пренебрегая массой стержней и демпфированием.

5. Построить эпюру динамических моментов $M_{\text{дин}}$ для балки постоянной жесткости EI (рис. 2.18) при действии вибрационной силы $P_0 \sin \theta t$ с частотой

$$\theta = \sqrt{EI / ma^3}.$$

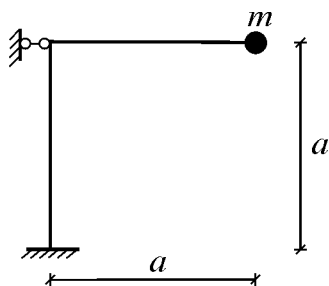


Рис. 2.17

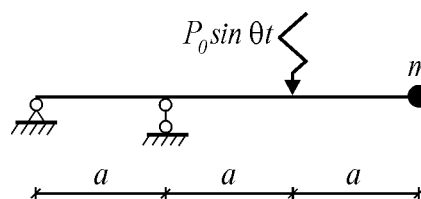


Рис. 2.18

Глава 3

КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМ СО МНОГИМИ СТЕПЕНЯМИ СВОБОДЫ

3.1. Вывод уравнения движения

Рассмотрим невесомую балку с n точечными массами (рис. 3.1 а). Учитывая только вертикальные колебания масс, получим колебательную систему с n степенями свободы. Действие на балку динамических нагрузок $P_1=P_1(t), \dots, P_n=P_n(t)$ вызовет колебания балки и, как следствие, противодействие инерционных сил $J_1 = m_1 \ddot{y}_1, \dots, J_n = m_n \ddot{y}_n$, сил упругости балки R_1, \dots, R_n и сил R_1^*, \dots, R_n^* , включающих силы сопротивления внешней среды и внутреннего неупругого сопротивления. Тогда каждую из масс (например i -ю массу m_i) можно рассматривать находящейся в условиях динамического равновесия под влиянием действующих на нее сил (рис. 3.1 б):

$$R_i + J_i + R_i^* - P_i = 0. \quad (3.1)$$

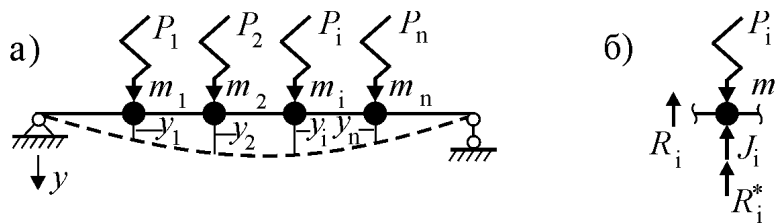


Рис. 3.1

Силы упругости R_i в этих уравнениях можно определять как методом перемещений, так и методом сил. Поэтому решение задачи о колебаниях можно искать и в прямой форме (используя метод перемещений), и в обратной форме (используя метод сил).

3.1.1. Использование метода перемещений

Согласно методу перемещений, введем фиктивные опоры $1, 2, \dots, n$, исключаящие перемещения в направлении степеней свободы (рис. 3.2 а).

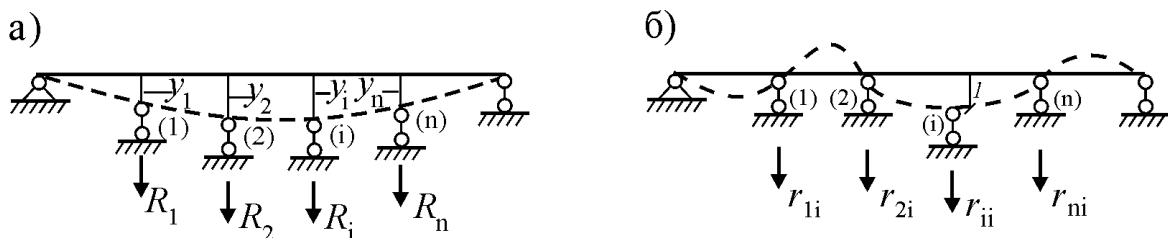


Рис. 3.2

Чтобы полученная неразрезная балка была эквивалентна заданной балке, необходимо чтобы их деформации и внутренние усилия были равны. Поэтому при перемещениях, возникающих в процессе колебаний по направлениям степеней свободы y_1, y_2, \dots, y_n , реакции в опорах должны

где \mathbf{m} – матрица масс (для точечных масс она диагональная), \mathbf{r} – матрица жесткости (она симметрическая: $r_{ik} = r_{ki}$), \mathbf{y} – вектор перемещений, \mathbf{P} – вектор внешних сил, \mathbf{R}^* – вектор сил сопротивления.

Тогда система уравнений (3.3) примет вид

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{r}\mathbf{y} + \mathbf{R}^* = \mathbf{P} \quad (3.4)$$

и по виду совпадает с уравнением (2.3). Ее будем называть **матричным уравнением колебаний системы с n степенями свободы в форме метода перемещений**.

Следует отметить, что для получения матрицы масс \mathbf{m} необходимо определять величины масс, участвующих в колебаниях по каждой степени свободы системы, а для получения матрицы жесткости \mathbf{r} необходимо рассматривать n единичных состояний (задавая единичные перемещения) и в каждом из них определять реакции по степеням свободы.

3.1.2. Использование метода сил

Для этого будем считать, что возникающие при колебаниях силы упругости R_1, \dots, R_n вызывают перемещения y_1, \dots, y_n (рис. 3.3 а).

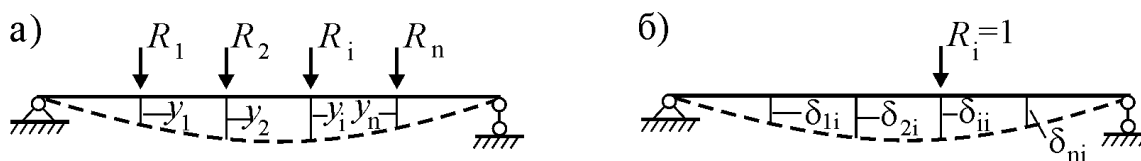


Рис. 3.3

На основании принципа суперпозиции, перемещение в направлении i -ой степени свободы от действия всех сил упругости равно сумме перемещений от отдельных сил:

$$y_i = y_{iR_1} + y_{iR_2} + \dots + y_{iR_n}.$$

Определим эти перемещения. Согласно методу сил, рассмотрим n единичных состояний от единичных сил, приложенных в направлениях степеней свободы. На рис. 3.3 б показано одно из них – i -ое единичное состояние. Указанные перемещения $\delta_{1i}, \dots, \delta_{ni}$, и, в общем случае, перемещения δ_{ks} называются коэффициентами влияния или **податливостями** и определяются по различным направлениям (здесь k – номер направления, s – номер состояния).

Так как в упругих системах

$$y_{iR_1} = \delta_{i1} R_1, \dots, \quad y_{iR_n} = \delta_{in} R_n,$$

предыдущая формула принимает вид

$$y_i = \delta_{i1} R_1 + \delta_{i2} R_2 + \dots + \delta_{in} R_n.$$

Теперь из (3.1) определим силы упругости для всех $i=1 \div n$:

$$R_1 = P_1 - J_1 - R_1^*, \dots, \quad R_n = P_n - J_n - R_n^*.$$

Если подставить их в предыдущую формулу и учесть инерционные силы, получим уравнение

$$y_i + \delta_{i1}(m_1\ddot{y}_1 + R_1^* - P_1) + \delta_{i2}(m_2\ddot{y}_2 + R_2^* - P_2) + \dots + \delta_{in}(m_n\ddot{y}_n + R_n^* - P_n) = 0.$$

Меняя i от 1 до n , можно записать n таких уравнений. Объединяя все эти уравнения, получим систему n дифференциальных уравнений, описывающих колебания системы с n степенями свободы:

$$\delta \mathbf{m} \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{y} + \delta \mathbf{R}^* = \delta \mathbf{P}. \quad (3.5)$$

Полученное уравнение называется *матричным уравнением колебаний системы с n степенями свободы в форме метода сил*, а матрица

$$\delta = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \cdot & \delta_{1n} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \cdot & \delta_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \cdot & \delta_{nn} \end{bmatrix}$$

– *матрицей податливости* и является симметрической матрицей ($\delta_{ij} = \delta_{ji}$). Для ее получения необходимо рассмотреть n единичных состояний и определить перемещения по всем степеням свободы колебательной системы.

От уравнения колебаний в форме метода сил можно перейти к уравнению в форме метода перемещений и наоборот. Чтобы показать это, определим и приравняем между собой две возможные работы: 1) всех сил некоторого единичного состояния (рис. 3.2 б) на перемещениях другого единичного состояния (рис. 3.3 б); 2) и наоборот, сил второго состояния (рис. 3.3 б) на перемещениях первого (рис. 3.2 б). Имеем

$$r_{1i}\delta_{1i} + r_{2i}\delta_{2i} + \dots + r_{ii}\delta_{ii} + \dots + r_{ni}\delta_{ni} = 1 \cdot 1.$$

Такие же уравнения можно записать для всех ($i = 1, \dots, n$) единичных состояний. Если учесть, что $\delta_{ij} = \delta_{ji}$, то все эти уравнения можно объединить в одно матричное уравнение $\mathbf{r} \cdot \delta = \mathbf{E}$, где

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$$

– единичная матрица. Отсюда следует, что $\mathbf{r} = \delta^{-1}$.

Заметим, что это свойство взаимной обратности матриц δ и \mathbf{r} имеет место только в случае одинаковой идеализации сооружения при расчетах методами сил или перемещений. Кроме того, расчетная схема сооружения должна быть геометрически неизменяемой.

Если (3.5) умножить слева на матрицу δ^{-1} , получим

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{y}} + \delta^{-1} \mathbf{y} + \mathbf{R}^* = \mathbf{P}. \quad (3.6)$$

Тогда, с учетом соотношения $\delta^{-1} = \mathbf{r}$, уравнения (3.4) и (3.6) будут эквивалентными.

3.2. Собственные колебания

Уравнение собственных колебаний системы со многими степенями свободы следует из (3.5), если принять $\mathbf{P}=\mathbf{0}$ и $\mathbf{R}^*=\mathbf{0}$ (где $\mathbf{0}$ – нуль-вектор):

$$\delta \mathbf{m} \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{y} = \mathbf{0}. \tag{3.7}$$

Записанное в матричной форме это уравнение представляет собой систему n линейных дифференциальных уравнений. Ее общее решение будем искать в виде суммы n частных решений

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^n \mathbf{y}_i,$$

являющихся простыми гармоническими функциями

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{a}_i \sin(\omega t + \varphi), \quad i = \overline{1, n} \quad (\text{т.е. } i \text{ меняется от } 1 \text{ до } n). \tag{3.8}$$

Здесь ω – круговая частота собственных колебаний, φ – начальная фаза, а не зависящий от времени вектор \mathbf{a}_i определяет форму i -го собственного колебания. Так как колебательная система имеет n степеней свободы, вектора перемещений и форм состоят из n компонент:

$$\begin{bmatrix} y_{i1} \\ y_{i2} \\ \vdots \\ y_{in} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{i1} \\ a_{i2} \\ \vdots \\ a_{in} \end{bmatrix} \cdot \sin(\omega t + \varphi). \tag{3.9}$$

Учитывая (3.8) и что $\ddot{\mathbf{y}}_i = -\omega^2 \mathbf{a}_i \sin(\omega t + \varphi)$, уравнение (3.7) сократим на $\sin(\omega t + \varphi)$ и запишем как

$$-\omega^2 \delta \mathbf{m} \mathbf{a}_i + \mathbf{a}_i = \mathbf{0}$$

или в виде

$$(\mathbf{d} - \lambda \mathbf{E}) \mathbf{a}_i = \mathbf{0}. \tag{3.10}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\mathbf{d} = \delta \mathbf{m} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nn} \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

– динамическая матрица, $\lambda = l / \omega^2$ – собственное значение матрицы.

Тогда (3.10) приводится к задаче на собственные значения

$$(\mathbf{d} - \lambda \mathbf{E}) \mathbf{a}_i = \mathbf{0}, \tag{3.12}$$

которое можно записать как систему линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} (d_{11} - \lambda) a_{i1} + d_{12} a_{i2} + \dots + d_{1n} a_{in} = 0, \\ d_{21} a_{i1} + (d_{22} - \lambda) a_{i2} + \dots + d_{2n} a_{in} = 0, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ d_{n1} a_{i1} + d_{n2} a_{i2} + \dots + (d_{nn} - \lambda) a_{in} = 0. \end{cases} \tag{3.13}$$

Таким образом, при задании закона движения масс (3.8) дифференциальное уравнение колебаний (3.7) становится алгебраическим.

Уравнение (3.12) имеет два типа решения:

1) тривиальное (простейшее) решение $a_{1i}=a_{2i}=\dots=a_{ni}=0$; оно не представляет интереса, так как в этом случае амплитуды колебаний равны нулю, т.е. колебания отсутствуют;

2) неопределенное решение; оно возможно при равенстве нулю определителя системы линейных уравнений (3.13), т.е. когда

$$|\mathbf{d} - \lambda \mathbf{E}| = \det \begin{bmatrix} (d_{11} - \lambda) & d_{12} & \dots & d_{1n} \\ d_{21} & (d_{22} - \lambda) & \dots & d_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & (d_{nn} - \lambda) \end{bmatrix} = 0. \quad (3.14)$$

Это уравнение называется **вековым уравнением**. Оно названо так потому, что подобное уравнение было впервые получено при изучении периодических отклонений движения планет, исчисляемых веками.

Если раскрыть определитель (3.14), получим полином n -ной степени относительно λ с постоянными коэффициентами q_i :

$$\lambda^n - q_1 \lambda^{n-1} + q_2 \lambda^{n-2} - \dots + (-1)^{n-1} q_{n-1} \lambda + (-1)^n q_n = 0. \quad (3.15)$$

Такой полином имеет n корней (среди них могут быть и кратные), которые называются **собственными значениями** матрицы \mathbf{d} . При расчете сооружений обычно все его корни бывают положительными.

Расположим корни полинома в порядке убывания:

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n.$$

Так как $\lambda_i = I / \omega_i^2$, то $\omega_i = \sqrt{I / \lambda_i}$. Поэтому круговые частоты собственных колебаний расположатся в порядке возрастания:

$$\omega_1 \leq \omega_2 \leq \dots \leq \omega_n.$$

Последовательность $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ называется **спектром частот**, а наименьшая частота ω_1 — **основной частотой**. Все частоты, начиная со второй, называются **обертонами**.

Таким образом, система с n степенями свободы имеет n частот собственных колебаний (n собственных частот). Для практических целей обычно достаточно знания нескольких наименьших, т.е. низших частот.

Решение векового уравнения (3.14) легко получить для $n \leq 3$. Но при $n > 3$ получить аналитическое решение трудно. Поэтому задача определения частот и форм собственных колебаний решается специальными численными методами на компьютере.

Каждой частоте собственных колебаний ω_i соответствует свой вектор амплитуд колебаний \mathbf{a}_i . Для его отыскания в систему уравнений (3.13)

следует подставить найденное собственное значение λ_i , т.е. принять $\lambda = \lambda_i$. В таком случае имеем

$$\begin{cases} (d_{11} - \lambda_i) a_{1i} + d_{12} a_{2i} + \dots + d_{1n} a_{ni} = 0, \\ d_{21} a_{1i} + (d_{22} - \lambda_i) a_{2i} + \dots + d_{2n} a_{ni} = 0, \\ \dots\dots\dots \\ d_{n1} a_{1i} + d_{n2} a_{2i} + \dots + (d_{nn} - \lambda_i) a_{ni} = 0. \end{cases} \quad (3.16)$$

Эта система линейных уравнений однородна, а ее определитель равняется нулю. Поэтому вычислить компоненты a_{ki} вектора амплитуд \mathbf{a}_i невозможно. Однако можно определить отношения компонент к одной из них. Так, если поделить все уравнения (3.16) на a_{1i} и обозначить

$$\tilde{a}_{1i} = 1; \quad \tilde{a}_{2i} = \frac{a_{2i}}{a_{1i}}; \quad \tilde{a}_{3i} = \frac{a_{3i}}{a_{1i}}; \quad \dots; \quad \tilde{a}_{ni} = \frac{a_{ni}}{a_{1i}},$$

то получим

$$\begin{cases} (d_{11} - \lambda_i) + d_{12} \tilde{a}_{2i} + \dots + d_{1n} \tilde{a}_{ni} = 0, \\ d_{21} + (d_{22} - \lambda_i) \tilde{a}_{2i} + \dots + d_{2n} \tilde{a}_{ni} = 0, \\ \dots\dots\dots \\ d_{n1} + d_{n2} \tilde{a}_{2i} + \dots + (d_{nn} - \lambda_i) \tilde{a}_{ni} = 0. \end{cases}$$

В этой системе алгебраических уравнений число неизвестных на единицу меньше числа уравнений. Поэтому отбросим одно лишнее уравнение (например, первое) и вынесем свободные члены вправо. Тогда получим систему линейных уравнений с $n-1$ неизвестными $\tilde{a}_{2i}, \tilde{a}_{3i}, \dots, \tilde{a}_{ni}$:

$$\begin{cases} (d_{22} - \lambda_i) \tilde{a}_{2i} + \dots + d_{2n} \tilde{a}_{ni} = -d_{21}, \\ \dots\dots\dots \\ d_{n2} \tilde{a}_{2i} + \dots + (d_{nn} - \lambda_i) \tilde{a}_{ni} = -d_{n1}. \end{cases} \quad (3.17)$$

Решив ее, найдем компоненты i -ой формы собственных колебаний:

$$\tilde{\mathbf{a}}_i = \frac{1}{a_{1i}} \mathbf{a}_i = \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{a}_{2i} \\ \vdots \\ \tilde{a}_{ni} \end{bmatrix}.$$

Последовательно задавая в (3.16) вместо λ собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ и каждый раз решая систему уравнений (3.17), отыщем все n форм $\tilde{\mathbf{a}}_1, \tilde{\mathbf{a}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{a}}_n$ и затем соберем их в единую матрицу форм собственных колебаний:

$$\tilde{\mathbf{a}} = [\tilde{\mathbf{a}}_1 \quad \tilde{\mathbf{a}}_2 \quad \dots \quad \tilde{\mathbf{a}}_n] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \tilde{a}_{21} & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \tilde{a}_{n1} & \tilde{a}_{n2} & \dots & \tilde{a}_{nn} \end{bmatrix}.$$

Формы собственных колебаний можно представить графически, если откладывать компоненты амплитуд колебаний масс колебательной системы (рис. 3.4 а) по соответствующим направлениям степеней свободы в некотором масштабе, и затем соединить их плавной кривой. К примеру, на рис. 3.4 б представлена i -я форма собственных колебаний этой системы.

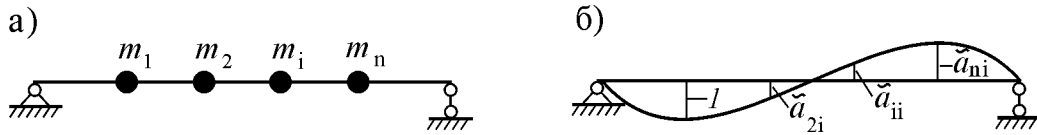


Рис. 3.4

Если полученные формы колебаний $\tilde{\mathbf{a}}_i$ поделить на числа, вычисляемые по формулам $\rho_i = \sqrt{m_1 a_{1i}^2 + m_2 a_{2i}^2 + \dots + m_n a_{ni}^2}$, определяются так называемые **ортонормированные** (относительно матрицы масс) формы собственных колебаний:

$$\hat{\mathbf{a}}_i = \begin{bmatrix} a_{1i}/\rho_i \\ a_{2i}/\rho_i \\ \vdots \\ a_{ni}/\rho_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{a}_{1i} \\ \hat{a}_{2i} \\ \vdots \\ \hat{a}_{ni} \end{bmatrix}.$$

Все ортонормированные формы также можно собрать в единую матрицу:

$$\hat{\mathbf{a}} = [\hat{\mathbf{a}}_1 \quad \hat{\mathbf{a}}_2 \quad \dots \quad \hat{\mathbf{a}}_n].$$

До сих пор мы искали частоты и формы собственных колебаний системы с n степенями свободы из уравнения метода сил. При использовании метода перемещений из (3.4) имеем

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{r}\mathbf{y} = \mathbf{0}. \quad (3.18)$$

С учетом (3.8), отсюда получаем уравнение собственных колебаний в форме метода перемещений:

$$(\mathbf{r} - \omega^2 \mathbf{m})\mathbf{a}_i = \mathbf{0}. \quad (3.19)$$

Полученное матричное уравнение в обычной записи представляет собой систему линейных однородных уравнений относительно амплитуд колебаний:

$$\begin{aligned} (r_{11} - \omega^2 m_1) a_{1i} + r_{12} a_{2i} + \dots + r_{1n} a_{ni} &= 0, \\ r_{21} a_{1i} + (r_{22} - \omega^2 m_2) a_{2i} + \dots + r_{2n} a_{ni} &= 0, \\ \dots & \\ r_{n1} a_{1i} + r_{n2} a_{2i} + \dots + (r_{nn} - \omega^2 m_n) a_{ni} &= 0. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Исключим тривиальное решение $a_{1i} = a_{2i} = \dots = a_{ni} = 0$. Тогда останется неопределенное решение, удовлетворяющее условию

$$\det \begin{bmatrix} (r_{11} - \omega^2 m_1) & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & (r_{22} - \omega^2 m_2) & \dots & r_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & (r_{nn} - \omega^2 m_n) \end{bmatrix} = 0, \quad (3.21)$$

или в матричной форме – определитель

$$\det[\mathbf{r} - \omega^2 \mathbf{m}] = 0. \quad (3.22)$$

Если раскрыть определитель (3.21), получим полином n -ной степени относительно ω^2 , решение которого дает n положительных корней, соответствующих квадратам частот собственных колебаний $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2$.

Для определения форм собственных колебаний \mathbf{a}_i в систему уравнений (3.20) вместо ω^2 следует последовательно подставлять значения $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2$. Эта задача решается аналогично задаче (3.16).

Частоты и формы собственных колебаний системы с n степенями свободы обладают рядом свойств. Перечислим некоторые из них:

1. Сумма всех собственных значений равна сумме элементов d_{ii} динамической матрицы, расположенных на главной диагонали:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = d_{11} + d_{22} + \dots + d_{nn}. \quad (3.23)$$

2. Произведение всех λ_i равно определителю динамической матрицы:

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n = \det \mathbf{d}. \quad (3.24)$$

3. Собственные формы зависят только от параметров динамической системы (ее масс, жесткостей) и не зависят от начальных условий.

4. Вектора собственных форм взаимно-ортогональны относительно матрицы масс, т.е. для любых не совпадающих между собой векторов \mathbf{a}_i и \mathbf{a}_j выполняются условия

$$\mathbf{a}_i^t \mathbf{m} \mathbf{a}_j = 0, \quad (i \neq j). \quad (3.25)$$

Здесь верхний индекс t означает операцию транспонирования матрицы. Условия (3.25) в обычной записи принимают вид

$$m_1 a_{1i} a_{1j} + m_2 a_{2i} a_{2j} + \dots + m_n a_{ni} a_{nj} = 0, \quad (i \neq j).$$

Имеют место и другие условия ортогональности:

$$\mathbf{a}_i^t \mathbf{r} \mathbf{a}_j = 0, \quad (i \neq j); \quad (3.26)$$

$$\mathbf{a}_i^t \mathbf{m} \delta \mathbf{m} \mathbf{a}_j = 0, \quad (i \neq j). \quad (3.27)$$

5. Для ортонормированных форм выполняются условия

$$\hat{\mathbf{a}}^t \mathbf{m} \hat{\mathbf{a}} = \mathbf{E}, \text{ то есть } \hat{\mathbf{a}}_i^t \mathbf{m} \hat{\mathbf{a}}_i = 1 \text{ и } \hat{\mathbf{a}}_i^t \mathbf{m} \hat{\mathbf{a}}_j = 0. \quad (3.28)$$

6. Любые колебания можно представить как линейную комбинацию форм собственных колебаний:

$$\mathbf{y} = \sum_{i=1}^n \mathbf{a}_i z_i = \mathbf{a}_1 z_1 + \mathbf{a}_2 z_2 + \dots + \mathbf{a}_n z_n,$$

где числа z_i называются *нормальными координатами*. Если их объединить в вектор нормальных координат $\mathbf{z} = \{z_1 \ z_2 \ \dots \ z_n\}$, предыдущее соотношение принимает вид

$$\mathbf{y} = \mathbf{a}\mathbf{z}. \quad (3.29)$$

При расчетах систем со многими степенями свободы переход к нормальным координатам осуществляется очень часто. Потому что это позволяет получать n независимых дифференциальных уравнений для отдельных форм колебаний. Суперпозиция решений этих уравнений при известных нормальных координатах z_i по (3.29) позволяет определять перемещения системы при любых колебаниях. Такой подход называется *методом разложения по формам собственных колебаний*.

В качестве примера использования нормальных координат рассмотрим решение уравнения (3.18). Если подставить в него (3.29) и учесть что $\ddot{\mathbf{y}} = \mathbf{a}\ddot{\mathbf{z}}$, то имеем

$$\mathbf{m}\mathbf{a}\ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{r}\mathbf{a}\mathbf{z} = \mathbf{0}.$$

Умножим это уравнение слева на матрицу $(\mathbf{m}\mathbf{a})^{-1} = \mathbf{a}^{-1}\mathbf{m}^{-1}$. Тогда, вводя обозначение

$$\mathbf{a}^{-1}\mathbf{m}^{-1}\mathbf{r}\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega}^2, \quad (3.30)$$

получим матричное дифференциальное уравнение

$$\ddot{\mathbf{z}} + \boldsymbol{\omega}^2 \mathbf{z} = \mathbf{0}, \quad (3.31)$$

где

$$\boldsymbol{\omega}^2 = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & 0 \\ & \omega_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \omega_n^2 \end{bmatrix}$$

является диагональной матрицей, состоящей из квадратов круговых частот собственных колебаний системы.

Уравнение (3.31) распадается на n независимых уравнений

$$\ddot{z}_i + \omega^2 z_i = 0, \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.32)$$

После решения этих уравнений и определения чисел z_i , т.е. нормальных координат, по (3.29) определяются амплитуды колебаний.

3.3. Свободные колебания

Уравнение свободных колебаний в форме метода перемещений получается из (3.4), если положить $\mathbf{P}=\mathbf{0}$:

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{r} \dot{\mathbf{y}} + \mathbf{R}^* = \mathbf{0}. \quad (3.33)$$

Согласно гипотезе Фойгта (гипотезе линейно-вязкого трения), силы внутреннего трения можно представить в виде

$$\mathbf{R}^* = \mathbf{c} \dot{\mathbf{y}}, \quad (3.34)$$

где \mathbf{c} является матрицей демпфирования, а ее элементы c_{ij} представляют собой силы сопротивления в направлении i от единичной скорости в направлении j , если скорости движения по остальным степеням свободы равны нулю. Применяя эту гипотезу, получим уравнение

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{c} \dot{\mathbf{y}} + \mathbf{r} \mathbf{y} = \mathbf{0}, \quad (3.35)$$

решение которого методом разложения по формам собственных колебаний возможно только при двух условиях:

- 1) когда матрица \mathbf{c} диагональная;
- 2) ее элементы являются коэффициентами демпфирования отдельных собственных форм, т.е. когда

$$\alpha_1 = \frac{c_1}{2m_1} = \alpha_2 = \frac{c_2}{2m_2} = \dots = \alpha_n = \frac{c_n}{2m_n} = \alpha. \quad (3.36)$$

При этих условиях имеем

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 2\alpha m_1 & & & 0 \\ & 2\alpha m_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 2\alpha m_n \end{bmatrix} = 2\alpha \mathbf{m},$$

а уравнение (3.35) принимает вид

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{y}} + 2\alpha \mathbf{m} \dot{\mathbf{y}} + \mathbf{r} \mathbf{y} = \mathbf{0}. \quad (3.37)$$

Если умножить это уравнение слева на матрицу $\mathbf{a}^{-1} \mathbf{m}^{-1}$ и далее учесть (3.29) и (3.30), после ряда преобразований получим матричное уравнение, которое распадается на n независимых уравнений:

$$\ddot{z}_i + 2\alpha \dot{z}_i + \omega^2 z_i = 0, \quad (i = \overline{1, n}). \quad (3.38)$$

Поскольку это уравнение аналогично уравнению (2.22), его решение определяется аналогично (2.25):

$$z_i = a_{di} e^{-\alpha t} \sin(\omega_{di} t + \varphi_{di}). \quad (3.39)$$

Здесь $\omega_{di} = \sqrt{\omega_i^2 - \alpha^2}$, а амплитуда свободных колебаний a_{di} и ее фаза φ_{di} определяются из начальных условий. Тогда по формуле (3.29) можно определить перемещения по всем степеням свободы.

Как мы убедились при рассмотрении системы с одной степенью свободы, малое демпфирование (часто имеющее место в реальных

сооружениях) мало влияет на частоту и период свободных колебаний. То же самое имеет место и в системах со многими степенями свободы. К тому же, принятое условие (3.36) не имеет экспериментального обоснования. Поэтому на практике часто обходятся без расчета на свободные колебания и пользуются результатами расчета на собственные колебания. Затухание колебаний учитывается в итоговых формулах типа (3.8) введением функций затухания $e^{-\alpha t}$ для амплитуд. При этом вместо α , как постоянного для всех форм, принимаются различные значения $\alpha_i = \delta_{di} \omega_i / 2\pi$, где δ_{di} – логарифмический декремент затухания колебаний по i -ой форме.

3.4. Вынужденные колебания без демпфирования

Если колебательная система без демпфирования со многими степенями свободы совершает вынужденные колебания под действием системы динамических нагрузок $\mathbf{P} = \{P_1 \ P_2 \ \dots \ P_n\}$, уравнение ее колебаний следует из (3.4) когда $\mathbf{R}^* = \mathbf{0}$:

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{r}\mathbf{y} = \mathbf{P}. \quad (3.40)$$

Изучим только два варианта действующей нагрузки.

3.4.1. Действие произвольной нагрузки

Используя разложение вектора перемещений по собственным формам (3.29), из (3.40) получаем уравнение

$$\mathbf{m}\mathbf{a}\ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{r}\mathbf{a}\mathbf{z} = \mathbf{P}.$$

Умножим его слева на транспонированный вектор i -ой формы собственных колебаний \mathbf{a}_i^t :

$$\mathbf{a}_i^t \mathbf{m} \mathbf{a} \ddot{\mathbf{z}}_i + \mathbf{a}_i^t \mathbf{r} \mathbf{a} \mathbf{z}_i = \mathbf{a}_i^t \mathbf{P}. \quad (3.41)$$

На основании условий ортогональности (3.25) и (3.26), многие члены этого уравнения, за исключением членов относящихся к i -ой форме, исчезнут и останутся ненулевые слагаемые:

$$\mathbf{a}_i^t \mathbf{m} \mathbf{a}_i \ddot{\mathbf{z}}_i + \mathbf{a}_i^t \mathbf{r} \mathbf{a}_i \mathbf{z}_i = \mathbf{a}_i^t \mathbf{P}. \quad (3.42)$$

После ввода обозначений

$$m_i^* = \mathbf{a}_i^t \mathbf{m} \mathbf{a}_i, \quad (3.43)$$

$$r_i^* = \mathbf{a}_i^t \mathbf{r} \mathbf{a}_i, \quad (3.44)$$

$$P_i^* = \mathbf{a}_i^t \mathbf{P}, \quad (3.45)$$

которые называются *обобщенной массой*, *обобщенной жесткостью* и *обобщенной нагрузкой* для n -ой формы в нормальных координатах, то уравнение (3.42) принимает вид простого дифференциального уравнения

$$m_i^* \ddot{z}_i + r_i^* z_i = P_i^*. \quad (3.46)$$

Если умножить (3.19) слева на вектор \mathbf{a}_i^t , можно доказать, что

$$r_i^* = \omega_i^2 m_i^*. \quad (3.47)$$

Поэтому, если подставить его в (3.46) и поделить на число m_i^* , получим

$$\ddot{z}_i + \omega_i^2 z_i = P_i^* / m_i^*. \quad (3.48)$$

Это уравнение решается как (2.29). При использовании ортонормированных форм $\hat{\mathbf{a}}_i$ имеем $m_i^* = 1$.

Так определяются все n нормальных координат z_i . Затем, используя метод разложения по формам собственных колебаний, получаем и общее решение задачи вынужденных колебаний. Как видим, метод позволяет рассчитывать сооружение на действие произвольной динамической нагрузки.

3.4.2. Действие вибрационной нагрузки

Пусть на систему (рис. 3.1 а) действуют вибрационные силы $P_i = \bar{P}_i \sin \theta t$, где θ – круговая частота вибрационной силы, \bar{P}_i – их амплитудные (максимальные) значения. Соберем их в вектор нагрузки

$$\mathbf{P} = \bar{\mathbf{P}} \sin \theta t, \quad (3.49)$$

где вектор $\bar{\mathbf{P}} = \{ \bar{P}_1 \dots \bar{P}_n \}$ содержит амплитудные значения всех сил.

Уравнение вынужденных колебаний в форме метода сил (3.5), когда демпфирование не учитывается ($\mathbf{P}^* = \mathbf{0}$), имеет вид

$$\delta \mathbf{m} \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{y} = \delta \mathbf{P}. \quad (3.50)$$

Так же как и для системы с одной степенью свободы, общее решение этого неоднородного дифференциального уравнения равно сумме общего решения однородного уравнения (уравнения собственных колебаний) и частного решения неоднородного уравнения:

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_{\text{од}} + \mathbf{y}_{\text{ч}} = \mathbf{y}_{\text{соб}} + \mathbf{y}_{\text{вын}}. \quad (3.51)$$

Точно также как в системах с одной степенью свободы, в системах с n степенями свободы свободные колебания быстро затухают. Следовательно, $\mathbf{y}_{\text{соб}} \rightarrow \mathbf{0}$. Поэтому, после установления колебаний, они будут совершаться с частотой вибрационной нагрузки:

$$\mathbf{y} = \bar{\mathbf{y}} \sin \theta t. \quad (3.52)$$

Здесь $\bar{\mathbf{y}} = \{ \bar{y}_1 \dots \bar{y}_n \}$ – вектор амплитуд колебаний.

Так как амплитуды от времени не зависят, то

$$\ddot{\mathbf{y}} = -\theta^2 \bar{\mathbf{y}} \sin \theta t. \quad (3.53)$$

После подстановки (3.49) и (3.53) в (3.50), введения обозначения

$$\delta \bar{\mathbf{P}} = \mathbf{y}_{\text{ст}} = \begin{bmatrix} \bar{y}_{1,\text{ст}} \\ \vdots \\ \bar{y}_{n,\text{ст}} \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

и сокращения полученного уравнения на $\sin \theta t$, получим

$$-\theta^2 \delta \mathbf{m} \bar{\mathbf{y}} + \bar{\mathbf{y}} = \mathbf{y}_{\text{ст}}$$

или

$$(\mathbf{E} - \theta^2 \delta \mathbf{m}) \bar{\mathbf{y}} = \mathbf{y}_{\text{ст}}. \quad (3.55)$$

Последнее уравнение можно решить относительно вектора амплитуд колебаний. Учитывая, что $\delta \mathbf{m} = \mathbf{d}$, получаем

$$\bar{\mathbf{y}} = (\mathbf{E} - \theta^2 \mathbf{d})^{-1} \mathbf{y}_{\text{ст}}. \quad (3.56)$$

Тогда, используя (3.52), можно определить перемещения масс в любой момент времени.

Когда же $\theta = \omega$, уравнение (3.55) решить нельзя, так как определитель системы уравнений обращается в нуль:

$$\det[\mathbf{E} - \theta^2 \mathbf{d}] = \det[\mathbf{E} - \omega^2 \mathbf{d}] = \det\left[\mathbf{E} - \frac{1}{\lambda} \mathbf{d}\right] = -\frac{1}{\lambda} \det[\mathbf{d} - \lambda \mathbf{E}] = 0.$$

Такое возможно, если частота нагрузки θ равна одной из собственных частот $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$. При приближении θ к любой из них происходит резкое увеличение амплитуды колебаний – *резонанс*. Поэтому в системе с n степенями свободы возможны n резонансных состояний (рис. 3.5).

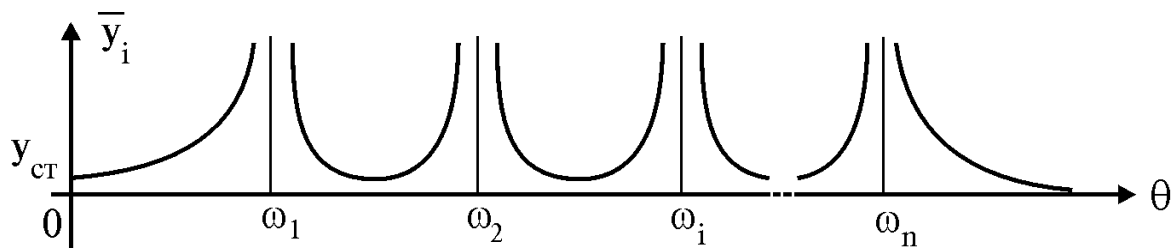


Рис. 3.5

Когда задача решается методом перемещений, при $\mathbf{y} = \bar{\mathbf{y}} \sin \theta t$ из (3.40) получается уравнение

$$(\mathbf{r} - \theta^2 \mathbf{m}) \bar{\mathbf{y}} = \bar{\mathbf{P}}. \quad (3.57)$$

Решая его относительно вектора амплитуд, имеем

$$\bar{\mathbf{y}} = (\mathbf{r} - \theta^2 \mathbf{m})^{-1} \bar{\mathbf{P}}. \quad (3.58)$$

Важным этапом расчета на колебания является проверка динамической прочности сооружения. Эта задача может быть решена, если будут найдены действующие на систему максимальные динамические силы. Определим их из уравнения колебаний в форме метода сил.

Представим действующие на систему силы в обобщенной форме:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{P} - \mathbf{J}, \quad (3.59)$$

где

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ \vdots \\ Q_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_1 \\ \vdots \\ J_n \end{bmatrix}$$

$$\delta_{ii}^* = \delta_{ii} - \frac{I}{m_i \theta^2}, \quad (i = \overline{1, n}). \quad (3.67)$$

Уравнения (3.66) называются **системой канонических уравнений расчета на вибрационную нагрузку**. Решая ее, определяются амплитудные (максимальные) значения инерционных сил J_i . Тогда по формуле (3.59) можно вычислить вектор обобщенных сил, действующих на колебательную систему.

3.4.3. Порядок расчета на вибрационную нагрузку

Рассмотрим порядок динамического расчета балок и рам с точечными массами на воздействие вибрационной нагрузки $\mathbf{P} = \overline{\mathbf{P}} \sin \theta t$. Такой расчет обычно состоит из решения трех задач динамики. Расчет ведется в следующей последовательности.

1. Решается 1-я задача динамики – определяются частоты и формы собственных колебаний. Для этого необходимо:

- выбрать расчетную схему и массовую модель сооружения;
- определить динамические степени свободы и их количество;
- определить величины масс, участвующих в колебаниях по степеням свободы и собрать их в диагональную матрицу масс $\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & \dots & m_n \end{bmatrix}$;
- рассмотреть n единичных состояний от единичных обобщенных сил $Q_i = 1$ (для всех $i = \overline{1, n}$);
- в единичных состояниях построить эпюры моментов \overline{M}_i ;
- вычислить податливости $\delta_{ij} = \overline{M}_i \otimes \overline{M}_j$ и построить матрицу податливости δ ;

– решить вековое уравнение $\det[\mathbf{d} - \lambda \mathbf{E}] = 0$, определить собственные числа λ_i , круговые частоты ω_i , частоты собственных колебаний f_i , периоды колебаний T_i и собственные формы \mathbf{a}_i ;

2. Решается 2-я задача динамики – динамическая система проверяется на резонанс. Возможны два случая:

- если $|\theta - \omega_i| / \omega_i \geq 0,3$, то резонансное состояние далеко и можно ограничиться расчетом на статическое действие нагрузки;
- если $|\theta - \omega_i| / \omega_i < 0,3$, возникает опасность резонанса, поэтому динамический расчет необходимо продолжить.

3. Решается 3-я задача динамики – система проверяется на прочность по формуле $\sigma_{\text{дин}}^{\text{max}} = M_{\text{дин}}^{\text{max}} / W < [\sigma]$. Если сооружение рассчитывается на много циклов действия вибрационной нагрузки ($\approx 10^7$ циклов), то уровень допускаемых напряжений уменьшается и принимается $[\sigma_e] = \frac{1}{4} \div \frac{1}{3} [\sigma_{\text{ст}}]$.

Для построения эпюры $M_{\text{дин}}$ необходимо:

- построить вектор амплитудных значений нагрузки $\overline{\mathbf{P}}$;
- пользуясь единичными эпюрами, построить грузовую эпюру M_p от нагрузки $\overline{\mathbf{P}}$;
- вычислить $\delta_{ii}^* = \delta_{ii} - 1/m\theta^2$ (для всех $i = \overline{1, n}$);
- вычислить вектор статических прогибов $\mathbf{y}_{ст} = \delta \overline{\mathbf{P}}$;
- решить систему канонических уравнений $\delta^* \mathbf{J} = \mathbf{y}_{ст}$ и определить максимальные инерционные силы J_1, J_2, \dots, J_n ;
- определить обобщенные силы $Q_i = P_i - J_i$;
- построить эпюру динамических моментов от совместного действия обобщенных сил Q_i по формуле $M_{дин} = \overline{M}_1 Q_1 + \dots + \overline{M}_n Q_n$. Из этой эпюры определяется значение максимального момента $M_{дин}^{max}$, а по нему проводится проверка на динамическую прочность.

4. При необходимости решается и 4-я задача динамики – система проверяется на жесткость по формуле $y_i < [y_i]$. Перемещения по направлениям степеней свободы масс вычисляются по формуле (3.63). Если нужно определять перемещение в каком-то другом направлении s , не совпадающем ни с одной из принятых степеней свободы, необходимо построить эпюру моментов \overline{M}_s от единичной силы в этом направлении и вычислить перемещение по формуле $y_s = M_{дин} \otimes \overline{M}_s$.

Пример 4. На стальной раме из двутавра №24 находятся два груза с массами $m=1000$ кг и работающий двигатель с $N=200$ об/мин (рис. 3.6). Двигатель создает вибрационную нагрузку, максимальное значение которой $\overline{P}_0=100$ Н. Провести расчет рамы на воздействие вертикальной составляющей вибрационной нагрузки $\overline{P}_0 \sin \theta t$, считая грузы точечными. Собственным весом двигателя и стержней рамы пренебречь.

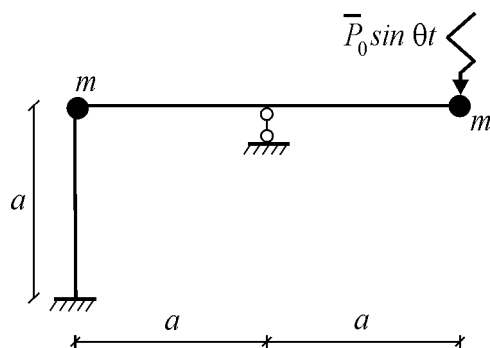


Рис. 3.6

Решение. Определим необходимые исходные данные:

$$\begin{aligned}
 a &= 3 \text{ м}; \quad m = 1000 \text{ кг}; \\
 E &= 2,1 \cdot 10^6 \text{ кг/см}^2 = 2 \cdot 10^{11} \text{ Н/м}^2; \\
 I &= 3460 \text{ см}^4 = 0,346 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4; \\
 EI &= 0,692 \cdot 10^7 \text{ Нм}^2; \\
 W &= 289 \text{ см}^3 = 0,289 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3; \\
 [\sigma] &= 1600 \text{ кг/см}^2 = 1,57 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2; \\
 [\sigma_e] &= 1/4 [\sigma] = 3,92 \cdot 10^7 \text{ Н/м}^2.
 \end{aligned}$$

Расчет ведем по установленному выше порядку.

1. Расчет на собственные колебания

Если не учитывать продольные колебания стержней, то положение двух точечных масс данной рамы будет определяться двумя независимыми параметрами y_1, y_2 (рис. 3.7 а). Следовательно, число динамических степеней системы равно двум.

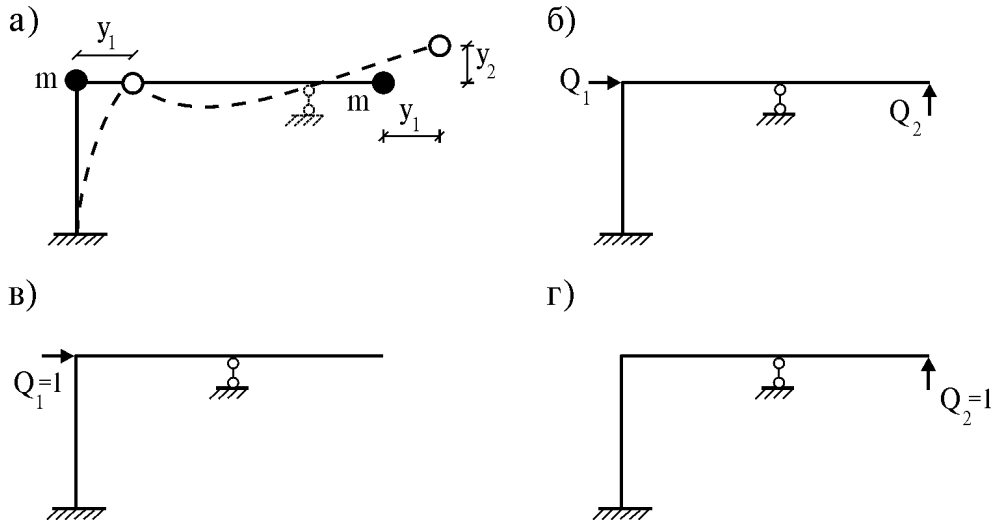


Рис. 3.7

Выберем положительные направления перемещений и обобщенных сил (рис. 3.7 а, б). В направлении первой степени свободы колеблются обе массы, а в направлении второй степени – только одна из масс. Поэтому $m_1 = m + m = 2m$, $m_2 = m$ и матрица масс системы будет

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} = m \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для определения матрицы податливости δ рассмотрим два единичных нагружения системы (рис. 3.7 в, г) и в каждом из них построим эпюры изгибающих моментов. Данная рама статически неопределима, поэтому ее статическую неопределимость раскроем методом сил, как более выгодному в этом случае ($n_{mc} = n_c - 3 = 4 - 3 = 1$, $n_{мп} = n_y + n_l = 2 + 2 = 4$).

Ниже представлены основная система (рис. 3.8 а), единичная эпюра \bar{M}_0 (рис. 3.8 б) и грузовая эпюра M_{p1} (рис. 3.8 в) для 1-го единичного состояния.

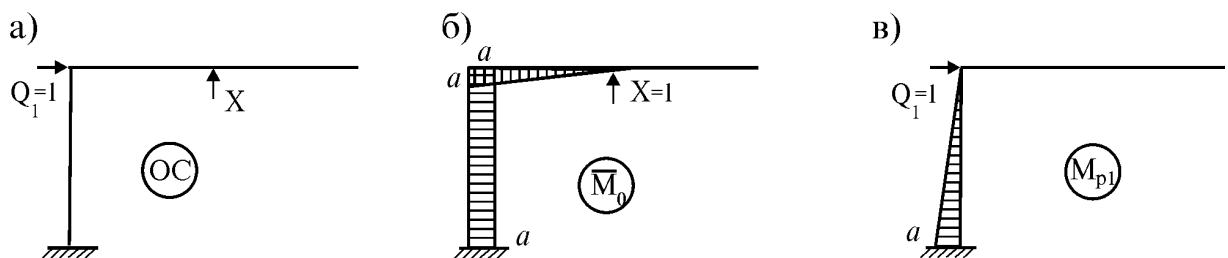


Рис. 3.8

Каноническое уравнение будет $\delta X + \Delta_{P_1} = 0$, его коэффициент $\delta = \overline{M}_0 \otimes \overline{M}_0 = \frac{4 a^3}{3 EI}$ и свободный член $\Delta_{P_1} = \overline{M}_0 \otimes M_{P_1} = -\frac{1 a^3}{2 EI}$.

Тогда $X = -\frac{\Delta_{P_1}}{\delta} = \frac{3}{8}$. По формуле $\overline{M}_1 = \overline{M}_0 X + M_{P_1} = \frac{3}{8} \overline{M}_0 + M_{P_1}$ строим эпюру моментов для первого единичного состояния (рис. 3.9 а). Аналогично строится эпюра второго единичного состояния (рис. 3.9 б).

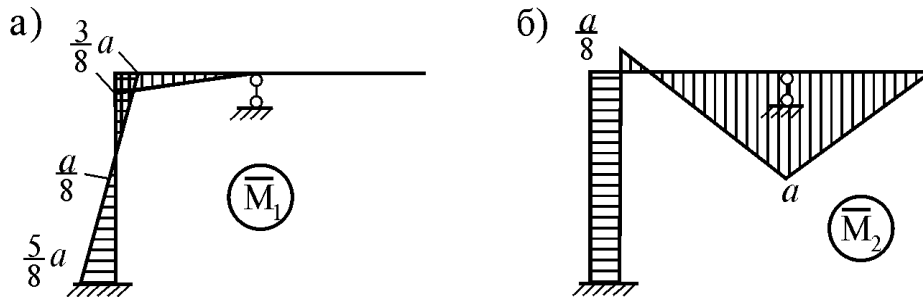


Рис. 3.9

Вычислим элементы матрицы податливости $\delta = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix}$. В статически неопределимой системе их можно вычислить двумя способами:

$$1) \delta_{11} = \overline{M}_1 \otimes \overline{M}_1 \quad \text{или} \quad 2) \delta_{11} = \overline{M}_1 \otimes M_{P_1}.$$

Второй способ проще:

$$\delta_{11} = \overline{M}_1 \otimes M_{P_1} = \frac{a}{6} \left(4 \cdot \frac{a}{8} \cdot \frac{a}{2} + \frac{5}{8} a \cdot a \right) \cdot \frac{1}{EI} = \frac{7 a^3}{48 EI}.$$

$$\text{Аналогично, } \delta_{12} = \delta_{21} = \overline{M}_2 \otimes M_{P_1} = \frac{1 a^3}{16 EI}.$$

Величину последнего элемента матрицы найдем первым способом:

$$\delta_{22} = \overline{M}_2 \otimes \overline{M}_2 = \frac{31 a^3}{48 EI}.$$

$$\text{Тогда } \delta = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} = \frac{a^3}{48 EI} \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 31 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{d} = \delta \mathbf{m} = \frac{ma^3}{48 EI} \begin{bmatrix} 14 & 3 \\ 6 & 31 \end{bmatrix}.$$

Если ввести обозначение $\lambda = \lambda^* \cdot \frac{ma^3}{48 EI}$, то матричное уравнение собственных колебаний $(\mathbf{d} - \lambda \mathbf{E}) \mathbf{a} = \mathbf{0}$ примет вид

$$\begin{bmatrix} 14 - \lambda^* & 3 \\ 6 & 31 - \lambda^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (*)$$

Из векового уравнения $\det[\mathbf{d} - \lambda \mathbf{E}] = 0$ получаем полином

$$\lambda^{*2} - 45\lambda^* + 416 = 0,$$

который имеет два корня $\lambda_1^* = 32$, $\lambda_2^* = 13$.

Определим собственные значения и соответствующие им круговые частоты собственных колебаний:

$$\lambda_1 = \lambda_1^* \cdot \frac{ma^3}{EI} = \frac{32 ma^3}{48 EI}; \quad \lambda_2 = \lambda_2^* \cdot \frac{ma^3}{EI} = \frac{13 ma^3}{48 EI};$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{I}{\lambda_1}} = 1,224 \sqrt{\frac{EI}{ma^3}} = 19,6 (c^{-1}); \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{I}{\lambda_2}} = 1,921 \sqrt{\frac{EI}{ma^3}} = 30,75 (c^{-1}).$$

Для определения форм собственных колебаний систему уравнений (*) запишем в обычном виде:

$$\begin{cases} (14 - \lambda^*) a_1 + 3 a_2 = 0, \\ 6 a_1 + (31 - \lambda^*) a_2 = 0. \end{cases}$$

Если положить $a_1=1$ и исключить первое уравнение, то второе уравнение будет $6 \cdot 1 + (31 - \lambda^*) a_2 = 0$, откуда имеем $a_2 = 6/(\lambda^* - 31)$.

Из этого уравнения определяются ординаты форм собственных колебаний:

– для первой формы при $\lambda^* = \lambda_1^* = 32$ имеем $a_1^{(1)} = 1$, $a_2^{(1)} = 6$;

– для второй формы при $\lambda^* = \lambda_2^* = 13$ имеем $a_1^{(2)} = 1$, $a_2^{(2)} = -0,333$.

Эти формы удовлетворяют условию ортогональности:

$$m_1 a_1^{(1)} a_1^{(2)} + m_2 a_2^{(1)} a_2^{(2)} = 2m \cdot 1 \cdot 1 + m \cdot 6 \cdot (-0,333) = 0.$$

Представим обе формы колебаний графически (рис. 3.10 а, б):

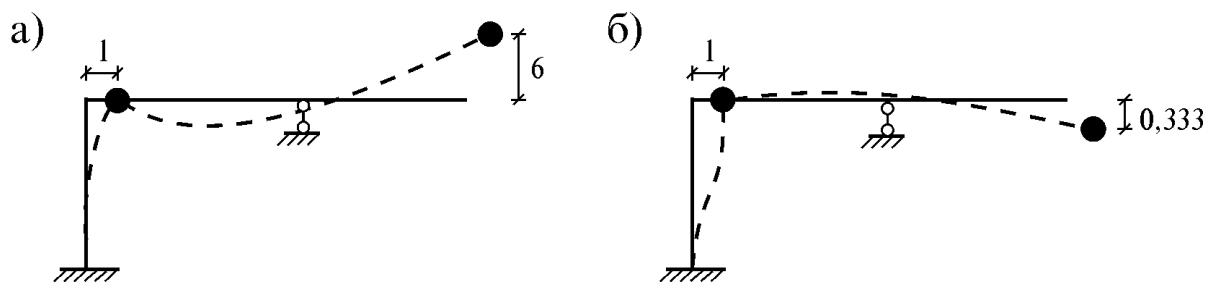


Рис. 3.10

2. Проверка на резонанс

Определим круговую частоту вибрационной силы:

$$\theta = \frac{\pi N}{30} = \frac{3,14 \cdot 200}{30} = 20,93 (c^{-1}).$$

Тогда

$$\frac{|\theta - \omega_1|}{\omega_1} = \frac{|20,93 - 19,6|}{19,6} = 0,068 < 0,3;$$

$$\frac{|\theta - \omega_2|}{\omega_2} = \frac{|20,93 - 30,75|}{30,75} = 0,32 > 0,3.$$

Как видим, близко резонансное состояние. Поэтому и динамический расчет необходимо продолжить. Заранее можно предположить, что форма вынужденных колебаний системы должна соответствовать 1-ой форме.

3. Проверка динамической прочности

С этой целью проведем расчет на вынужденные колебания. Вначале определим вектор амплитудных значений вибрационной нагрузки:

$$\bar{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \bar{P}_1 \\ \bar{P}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{P}_0 \end{bmatrix} = \bar{P}_0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Запишем канонические уравнения расчета на вибрационную нагрузку

$$\begin{cases} \delta_{11}^* J_1 + \delta_{12} J_2 = y_{1,ст}, \\ \delta_{21} J_1 + \delta_{22}^* J_2 = y_{2,ст}. \end{cases}$$

и вычислим их коэффициенты:

$$\delta_{11}^* = \delta_{11} - \frac{1}{m_1 \theta^2} = \frac{7}{48} \frac{a^3}{EI} - \frac{1}{m_1 \theta^2} = -0,571 \cdot 10^{-6};$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{16} \frac{a^3}{EI} = 0,244 \cdot 10^{-6};$$

$$\delta_{22}^* = \delta_{22} - \frac{1}{m_2 \theta^2} = \frac{31}{48} \frac{a^3}{EI} - \frac{1}{m_2 \theta^2} = 0,237 \cdot 10^{-6}.$$

Определим правые части уравнений:

$$\mathbf{y}_{ст} = \begin{bmatrix} y_{1,ст} \\ y_{2,ст} \end{bmatrix} = \delta \bar{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{bmatrix} \cdot \bar{P}_0 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{P}_0 \delta_{12} \\ \bar{P}_0 \delta_{22} \end{bmatrix}.$$

Тогда $y_{1,ст} = \bar{P}_0 \delta_{12} = 100 \cdot 0,244 \cdot 10^{-6} = 24,4 \cdot 10^{-6}$, $y_{2,ст} = \bar{P}_0 \delta_{22} = 237 \cdot 10^{-6}$.

Система канонических уравнений принимает вид

$$\begin{cases} -0,571 J_1 + 0,244 J_2 = 24,4, \\ 0,244 J_1 + 0,237 J_2 = 237, \end{cases}$$

из которой имеем $J_1 = 264$, $J_2 = 718$. Затем определим обобщенные силы:

$$Q_1 = \bar{P}_1 - J_1 = 0 - 264 = -264;$$

$$Q_2 = \bar{P}_2 - J_2 = 100 - 718 = -618.$$

Они показаны на рис. 3.11 а.

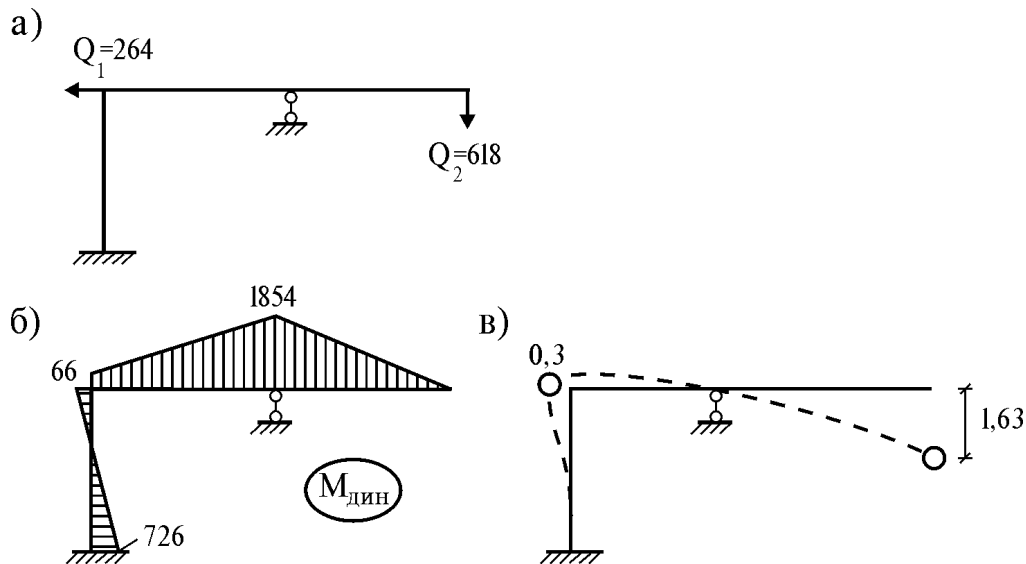


Рис. 3.11

Далее по формуле $M_{\text{дин}} = \bar{M}_1 Q_1 + \bar{M}_2 Q_2 = -264 \cdot \bar{M}_1 - 618 \cdot \bar{M}_2$ строим эпюру наибольших динамических моментов при вынужденных колебаниях рамы (рис. 3.11 б). По этой эпюре определяем максимальное динамическое напряжение:

$$\sigma_{\text{дин}}^{\text{max}} = \frac{M_{\text{дин}}^{\text{max}}}{W} = \frac{1854}{0,289 \cdot 10^{-3}} = 0,64 \cdot 10^7 \text{ (Н/м}^2\text{)}.$$

Как оказалось, $\sigma_{\text{дин}}^{\text{max}} < [\sigma_{\text{дин}}] = 3,92 \cdot 10^7 \text{ (Н/м}^2\text{)}$. Таким образом, условие прочности выполняется.

4. Проверка динамической жесткости

Техническая частота вращения двигателя: $f = \frac{N}{60} = \frac{200}{60} = 3,33 \text{ Гц}$.

Максимальные перемещения масс при колебаниях:

$$y_1 = -\frac{J_1}{m_1 \theta^2} = -\frac{264}{2000 \cdot (20,93)^2} = -0,3 \cdot 10^{-3} \text{ (м)} = -0,3 \text{ (мм)},$$

$$y_2 = -\frac{J_2}{m_2 \theta^2} = -\frac{718}{1000 \cdot (20,93)^2} = -1,63 \cdot 10^{-3} \text{ (м)} = -1,63 \text{ (мм)}.$$

На рис. 3.11,в показана примерная форма колебаний рамы. Как и следовало ожидать, она близка к первой форме собственных колебаний (с точностью до множителя).

Из табл. 1.2 (стр. 19) следует, что если человек во время работы будет постоянно находиться рядом со 2-ой массой (в конце консольной части рамы), то амплитуда колебаний будет превышать допустимую (при частоте $f=3,33 \text{ Гц}$ допустимая амплитуда $a \approx 1 \text{ мм}$).

3.5. Решение задач динамики МКЭ

В настоящее время широкое распространение получил метод конечных элементов (МКЭ) в форме метода перемещений. Модель сооружения в виде системы конечных элементов (КЭ) применима к расчету сооружений любого типа: рамных конструкций (из одномерных элементов), систем типа плит и оболочек (из двумерных элементов) и трехмерных тел.

На первом этапе динамического расчета МКЭ любое сооружение представляется в виде системы конечных элементов, объединенных в узлах. Размеры элементов могут быть произвольными. Перемещения узлов принимаются в качестве обобщенных координат. Перемещения внутренних точек КЭ выражаются через эти обобщенные координаты с помощью интерполяционных функций. С учетом граничных условий КЭ в его узлах определяются функции формы, связывающие перемещения внутренних точек с узловыми перемещениями. В итоге характеристики всего сооружения определяются через характеристики отдельных конечных элементов (матриц жесткостей, масс и др.).

Преимущество такого подхода:

- любое сооружение может быть разбито на произвольное число КЭ;
- уравнения МКЭ получаются мало связанными между собой, поэтому вычислительный процесс упрощается.

В курсе строительной механики все эти этапы были изучены; в нем рассматривались вопросы получения матриц жесткостей конечных элементов (КЭ фермы, плоского изгибного стержневого элемента, треугольного и четырехугольного элементов), переход из местной системы координат в общую, объединение конечных элементов в единый ансамбль, учет граничных условий, получение разрешающего уравнения МКЭ в форме метода перемещений

$$\mathbf{r} \mathbf{y} = \mathbf{P}, \quad (3.68)$$

где \mathbf{r} – матрица жесткости, \mathbf{y} и \mathbf{P} – вектора перемещений и нагрузки.

При решении задач динамики уравнение вынужденных колебаний системы с n степенями свободы в матричной записи имеет вид:

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{r} \mathbf{y} = \mathbf{P}, \quad (3.69)$$

где \mathbf{m} – матрица масс, $\ddot{\mathbf{y}}$ и $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{t})$ – вектора ускорений и нагрузки.

Матрица масс в МКЭ может быть двух видов:

- как матрица сосредоточенных масс,
- как матрица распределенных масс.

С первым видом мы знакомы: это диагональная матрица, элементами которой являются величины сосредоточенных масс.

Получение матрицы распределенных масс аналогично построению матрицы жесткости. Для этого используются интерполяционные функции,

проводится переход из местной системы координат в общую, затем из матриц масс КЭ формируется матрица масс всей системы. Матрица распределенных масс точнее учитывает инерционные характеристики динамической системы. Однако, ее получение и решение уравнения (3.69) требует более сложных и объемных вычислений чем для системы с сосредоточенными массами.

Вектор нагрузки $\mathbf{P} = \mathbf{P}(t)$ также может быть получен двумя методами: 1) статическим методом, 2) методом приведения.

Статический метод основан на определении узловых нагрузок, статически эквивалентных заданной нагрузке.

В методе приведения нагрузка определяется из условия равенства работ внешних и внутренних сил на возможных перемещениях заданной и приведенной систем.

Уравнение (3.69) не учитывает диссипацию (рассеяние энергии) при колебаниях. Однако, в реальных конструкциях это явление всегда присутствует и при прекращении действия внешней нагрузки из-за диссипации происходит быстрое затухание колебаний.

Для учета затухания колебаний часто используется гипотеза Фойгта (гипотеза линейно-вязкого трения), по которой сила внутреннего трения пропорциональна скорости деформации (2.21):

$$R^* = cv = c \dot{y},$$

где c – коэффициент демпфирования. В этом случае уравнение вынужденных колебаний системы с n степенями свободы с учетом диссипации приводится к виду

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{c}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{r}\mathbf{y} = \mathbf{P}, \quad (3.70)$$

где \mathbf{c} – диагональная матрица демпфирования, характеризующая процесс затухания колебаний. Эту матрицу можно получить через матрицы затухания отдельных КЭ.

Напомним, что гипотеза вязкого трения приводит к тому, что затухание зависит от частоты колебания. Но многочисленные эксперименты этого не подтверждают. Поэтому на практике коэффициенты демпфирования принимают пропорциональными массам системы m_i :

$$c_i = 2\alpha m_i,$$

где α – коэффициент затухания, определяемый из эксперимента.

Тогда уравнение (3.70) запишется так:

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{y}} + 2\alpha \mathbf{m}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{r}\mathbf{y} = \mathbf{P}. \quad (3.71)$$

Уравнение свободных колебаний получается из (3.71) и при $\mathbf{P}=\mathbf{0}$ имеет вид, совпадающий с (3.37)

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{y}} + 2\alpha \mathbf{m}\dot{\mathbf{y}} + \mathbf{r}\mathbf{y} = \mathbf{0}. \quad (3.72)$$

В разделе 3.4 было установлено, что в обычных сооружениях при

$\alpha < \omega$ демпфирование мало влияет на частоту и период свободных колебаний. Поэтому при динамическом расчете сооружений МКЭ решение уравнения (3.71) определяется методом разложения решения по формам собственных колебаний.

Кратко рассмотрим схему такого решения:

1) Из уравнения

$$(\mathbf{r} - \omega^2 \mathbf{m})\mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (3.73)$$

определяется сокращенная матрица форм из первых s собственных форм

$$\mathbf{a} = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \dots \quad \mathbf{a}_s]$$

и вектор частот из первых s частот спектра собственных колебаний

$$\boldsymbol{\omega} = \{ \omega_1 \quad \omega_2 \quad \dots \quad \omega_s \}.$$

2) Подставляя в (3.72)

$$\mathbf{y} = \mathbf{a}\mathbf{z},$$

после некоторых преобразований определяются s несвязанных уравнений

$$\ddot{z}_i^2 + 2\alpha\omega_i\dot{z}_i + \omega_i^2 z_i = P_i(t), \quad (i = \overline{1, s}),$$

где $P_i(t) = \mathbf{a}_i \mathbf{P}(t)$ – обобщенная нагрузка.

3) Из этих уравнений определяются обобщенные координаты z_j .

4) Вычисляется вектор перемещений

$$\mathbf{y} = \mathbf{a}\mathbf{z} = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \dots \quad \mathbf{a}_s] \cdot \{ z_1 \quad z_2 \quad \dots \quad z_s \}.$$

5) Определяются упругие силы от динамической нагрузки, возникающие в узлах конечно-элементной модели:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{r}\mathbf{y} - \mathbf{P}. \quad (3.74)$$

6) По упругим узловым силам определяются внутренние усилия, напряжения, деформации, перемещения, т.е. НДС системы.

3.6. Расчет сооружений на сейсмические воздействия

При расчете сооружений на сейсмические воздействия также используются два подхода: расчет на детерминированную и недетерминированную нагрузки.

Как было отмечено в главе 1, детерминированная нагрузка – это нагрузка, у которой известен закон изменения во времени. Например, нагрузки от вибрационных машин с неуравновешенными массами, оборудования с возвратно-поступательным движением являются детерминированными нагрузками. Если изменение нагрузки во времени известно не полностью, но может быть определено с некоторой вероятностью, такая нагрузка является недетерминированной (случайной) динамической нагрузкой. Порывы ветра, взрыв, землетрясения являются недетерминированными нагрузками. Расчет на такие нагрузки заключается в определении НДС от некоторой вероятной нагрузки.

3.6.1. Землетрясения и их характеристики

Землетрясения, особенно в густонаселенных районах, приводят к катастрофическим результатам – разрушению зданий и гибели людей. Воздействие землетрясений на объекты называется сейсмическим воздействием. Изучением особенностей их действия на сооружения занимается инженерная сейсмология (греческое слово *seismos* означает землетрясение).

Землетрясения обусловлены процессами, происходящими в недрах Земли, общие механизмы которых пока недостаточно ясны. Движение тектонических плит (от гр. слова *tectonika* – строитель), горообразование или образование океанических впадин, извержения вулканов и карстовые явления являются основными причинами землетрясений.

Очаги землетрясения длиной в сотни километров порождают сейсмические волны с периодом 50-100 сек. и могут вызвать гигантские цунами. Наиболее опасными для сооружений являются сейсмические волны с периодами 0,1-2 сек.

Землетрясения классифицируются по глубине расположения их очагов и по интенсивности в баллах. В зависимости от горно-геологических условий и удаленности от сейсмических зон, для каждого района устанавливается ожидаемая максимальная интенсивность землетрясения – *сейсмичность*.

Во время землетрясений поверхность Земли испытывает вертикальные и горизонтальные колебания. Вертикальные колебания оказывают существенное воздействие в эпицентре землетрясения, но с удалением от него возрастает роль горизонтальных колебаний.

Интенсивность проявления землетрясения на поверхности Земли, а следовательно его разрушительный эффект, зависит в первую очередь от энергии, выделяющейся при внезапном разрыве материала в очаге и от гипоцентрального расстояния c от очага землетрясения (рис. 3.12):

$$c = \sqrt{\Delta^2 + h^2} . \quad (3.75)$$

Величины Δ и h называются эпицентральным расстоянием и глубиной гипоцентра.

Чем дальше сооружение от очага землетрясения, тем меньше его влияние. Это связано с тем, что землетрясение распространяется как сейсмическая волна. При этом происходят расхождение фронта сейсмической волны, наложение на него отраженных волн, образование в грунте пластических зон, рассеивание энергии колебаний и др. явления.

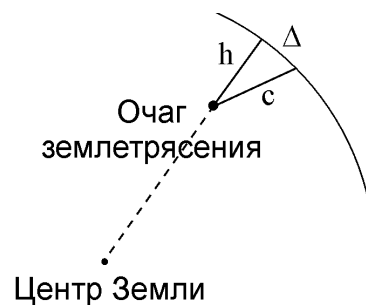


Рис. 3.12)

Энергия деформации, выделяемая очагом землетрясения, характеризуется *магнитудой*

$$M = \lg(A / A_0), \quad (3.76)$$

где A и A_0 – максимальные амплитуды смещения в какой-либо сейсмической волне при данном и очень слабом («нулевом») землетрясениях в микронах.

Самая большая энергия землетрясения (около 9,5 магнитуд) зарегистрирована в мае 1960 г. в Чили. Землетрясение 2011 года в японском городе Фукусима имело энергию более 9 магнитуд.

Землетрясения, происходящие на Земле, их магнитуды и среднее число в год можно характеризовать следующим образом (табл. 3.1):

Таблица 3.1
Землетрясения, происходящие на Земле в течение года

| Характеристика землетрясений | Магнитуда | Среднее число в год |
|----------------------------------|-----------|---------------------|
| Катастрофа планетарного масштаба | 8 | 1-2 |
| Сильное, регионального масштаба | 7-8 | 15-50 |
| Сильное, локального масштаба | 6-7 | 100-150 |
| Среднее | 5-7 | 750-1000 |
| Слабое местное | 4-5 | 5000-7000 |

Для фиксации и измерения колебаний землетрясений разработано много различных приборов (сейсмографы, сейсмоскопы и др.) и различные шкалы их измерения. Например, существуют шкала Рихтера, шкала Института физики Земли, шкала Меркалли и др. В последней принята 12-балльная градация интенсивности землетрясения от 1 (не ощущается) до 12 баллов (полное обрушение).

На интенсивность сейсмического воздействия большое влияние оказывают грунтовые условия. Это связано с динамическими характеристиками грунтов и их несущей способностью. Так, по СНиПу в грунтах I категории (мерзлые, $t^{\circ} \leq -2^{\circ}C$) сейсмичность уменьшается на 1 балл, а в грунтах III категории (пески, рыхлые грунты) увеличиваются на 1 балл.

3.6.2. Определение сейсмической нагрузки

Сейсмические нагрузки – это особые нагрузки, возникающие в сооружениях в связи с колебаниями их оснований при движении поверхности Земли во время землетрясения. Они относятся к категории случайных воздействий и вызывают большие напряжения и смещения, чем все другие нагрузки, вместе взятые.

Так как вероятность землетрясения очень мала, то проводятся два типа расчета на сейсмическую нагрузку:

1) на умеренное землетрясение, которое может произойти в месте расположения сооружения в течение его срока службы. При этом сооружение проектируется так, чтобы выдержать сейсмическое воздействие без существенных повреждений. Такой расчет проводится обычно для объектов массового гражданского строительства.

2) на наиболее сильное землетрясение, возможное на данной площадке строительства. В этом случае сооружение проектируется так, чтобы его конструкция не получила существенные повреждения, приводящие к обрушению и человеческим жертвам. Такой расчет проводится для атомных станций, больших плотин и др.

Расчетные землетрясения (их магнитуда и частота повторения и др.) определяются на основе длительного изучения землетрясений в данном районе. Например, если раньше в Татарстане здания проектировались без расчета на сейсмическую нагрузку, сейчас они должны рассчитываться на сейсмичность в 7 баллов по шкале Института физики Земли. Тогда крупнопанельные здания со стальным и железобетонным каркасом должны выдерживать землетрясения с максимальным смещением поверхности грунта до 6 мм/с, ускорением до 120 см/с^2 , и в них могут возникать лишь умеренные повреждения – небольшие трещины в стенах и стыках между панелями, откалываться довольно большие куски штукатурки.

Величину сейсмической нагрузки определяют по статической и динамической теориям.

По статической теории определяются максимальные инерционные силы $P_{\max} = m \ddot{y}_{0\max}$, где $\ddot{y}_{0\max}$ – максимальное ускорение основания сооружения (грунта). Недостаток этого подхода в том, что сооружение считается абсолютно жестким. В реальности, за счет деформаций сооружения инерционные силы могут быть больше найденных величин (особенно при резонансе).

В динамической теории учитываются силы инерции, возникающие и за счет кинематического воздействия (смещения основания), и от деформации. Например, в системе с одной степенью свободы полное перемещение равно сумме двух перемещений (рис. 3.13):

$$y(t) = y_0 + y. \quad (3.77)$$

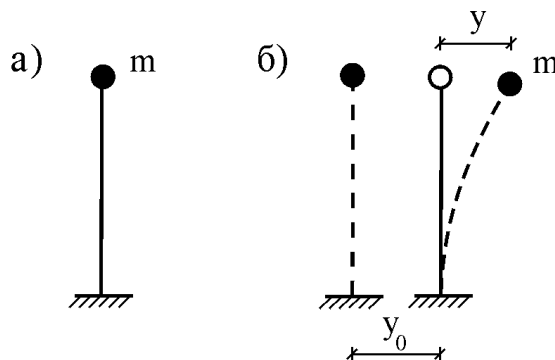


Рис. 3.13

Поэтому

$$J = m(\ddot{y}_0 + \ddot{y}). \quad (3.78)$$

При учете силы упругости уравнение колебаний принимает вид

$$m \ddot{y} + r y = -m \ddot{y}_0. \quad (3.79)$$

Сюда можно добавить слагаемое, учитывающее затухание колебаний:

$$m \ddot{y} + c \dot{y} + r y = -m \ddot{y}_0. \quad (3.80)$$

Для системы с конечным числом степеней свободы (рис. 3.14) имеем

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{c} \dot{\mathbf{y}} + \mathbf{r} \mathbf{y} = -\mathbf{m} \mathbf{I} \ddot{y}_0, \quad (3.81)$$

где \mathbf{m} , \mathbf{c} , \mathbf{r} – матрицы масс, демпфирования и жесткости, \mathbf{I} – вектор-столбец из единиц.

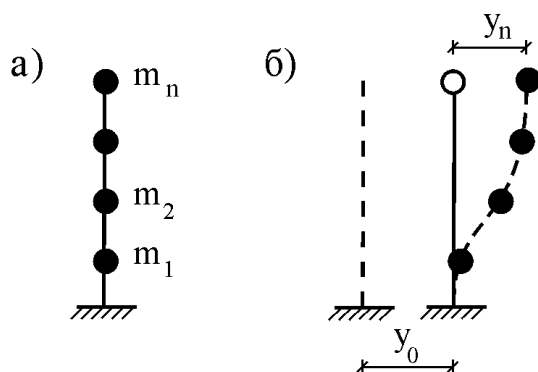


Рис. 3.14

Динамическая теория дает более точное решение, но и у нее есть недостаток – предполагается одновременность колебаний основания и всех его частей. Поэтому эта теория не учитывает скорость распространения землетрясения (а его учет необходим, особенно при рассмотрении длинных и высотных сооружений).

Сложной задачей расчета на сейсмическое воздействие является определение правой части уравнений (3.80) и (3.81). Трудность состоит в нестационарности сейсмического воздействия. Как пример можно указать на типичный график вертикальных и горизонтальных ускорений грунта при землетрясении (см. рис. 1.7). Путем обработки (осреднением, нормированием и сглаживанием) множества аналогичных акселерограмм землетрясений разрабатываются так называемые *расчетные спектры землетрясений* (рис. 3.15):

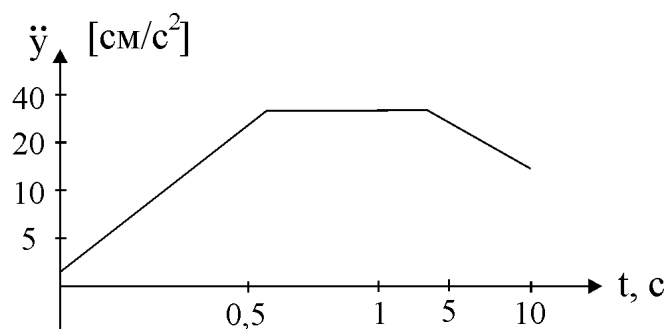


Рис. 3.15

Одним из методов расчета на сейсмическое воздействие является *спектральный метод*. Он основан на разложении перемещений системы по формам собственных колебаний в виде $y = \mathbf{az}$ (3.29). Тогда уравнение (3.81) приводится к системе независимых дифференциальных уравнений

$$\ddot{z}_i + 2\alpha\dot{z}_i + \omega_i^2 z_i = P_i(t), \quad (i = \overline{1, n}), \quad (3.82)$$

где $P_i = -\ddot{y}_0 \mathbf{a}_i \mathbf{I}$ – обобщенная сила.

Решение этих уравнений определяется через интеграл Дюамеля. Найденные (с учетом граничных условий) нормальные координаты z_i подставляются в уравнение (3.29) $y = \mathbf{az}$ и определяются перемещения. Тогда по формуле

$$\mathbf{Q} = \mathbf{r} \mathbf{y}$$

определяются динамические силы, действующие на систему.

Используется и другой метод расчета на сейсмическое воздействие – *расчет по нормам*. В этом случае определяется максимальная сейсмическая нагрузка для каждой i -ой формы собственных колебаний. Чтобы учесть неодновременность их воздействия, полное расчетное усилие определяется их среднеквадратичным осреднением:

$$Q = \sqrt{\sum_{k=1}^n Q_k^2}.$$

Поскольку решающее значение имеют несколько главных форм спектра собственных колебаний, обычно ограничиваются учетом первых 3-5 форм.

3.7. Колебания систем с бесконечным числом степеней свободы

Массы реальных сооружений обычно распределены по их элементам. Расчет таких систем на колебания приводит к дифференциальным уравнениям в частных производных и требует использования довольно сложного математического аппарата. Для общего знакомства с методикой расчета таких систем и возникающими при этом проблемами рассмотрим следующую задачу.

3.7.1. Поперечные колебания прямых стержней

Пусть на стержень постоянной жесткости EI и заданной погонной массы μ действует некоторая распределенная динамическая нагрузка $q = q(x, t)$, которая вызывает перемещения $y = y(x, t)$ (рис. 3.16 а). В процессе движения на любую часть стержня единичной длины будет действовать обобщенная сила (рис. 3.16 б):

$$p = q \cdot l - \mu \cdot l \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} = q - \mu \ddot{y}, \quad (3.83)$$

где, для краткости, две точки над буквой обозначают вторую производную по времени t .

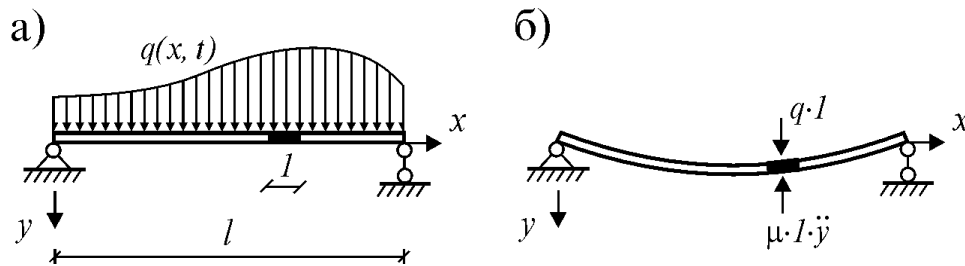


Рис. 3.16

Уравнение изогнутой оси такого стержня определяется по известной формуле

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = -M(x)$$

или

$$EI y'' = -M, \quad (3.84)$$

где два штриха при y означают вторую производную по x .

Дифференцируя (3.84) дважды по x , учитывая (3.83) и соотношение Журавского

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = p \quad \text{или} \quad M'' = p,$$

получим дифференциальное уравнение поперечных колебаний стержня:

$$EI y^{IV} + \mu \ddot{y} = q(x, t), \quad (3.85)$$

где y^{IV} означает четвертую производную по x .

3.7.2. Собственные колебания стержня

Для их изучения в уравнении (3.85) примем $q=0$:

$$EI y^{IV} + \mu \ddot{y} = 0. \quad (3.86)$$

Вводя обозначение

$$\frac{EI}{\mu} = c^2, \quad (3.87)$$

преобразуем (3.86) и представим в виде

$$c^2 y^{IV} + \ddot{y} = 0. \quad (3.88)$$

Решение этого уравнения ищем по методу разделения переменных Фурье в виде суммы бесконечного ряда, элементы которого состоят из произведения двух независимых функций от x и t :

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) \cdot T_n(t). \quad (3.89)$$

Здесь $a_n(x)$ — n -ная форма собственных колебаний, удовлетворяющая

условиям закрепления концов стержня, $T_n(t)$ – функция изменения амплитуд колебаний во времени.

Подставив (3.89) в дифференциальное уравнение (3.88), получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} (c^2 a_n^{IV} T_n + a_n \ddot{T}_n) = 0.$$

Это уравнение выполняется, если каждый член ряда равняется нулю, т.е. при условиях

$$c^2 a_n^{IV} T_n + a_n \ddot{T}_n = 0, \quad (n = 1, 2, \dots, \infty). \quad (3.90)$$

Запишем (3.90) в виде уравнения с разделенными переменными:

$$-\frac{\ddot{T}_n}{c^2 T_n} = \frac{a_n^{IV}}{a_n} = \text{const} = k^4. \quad (3.91)$$

Здесь два полученных отношения приняты равными некоторой величине $\text{const} = k^4$, т.к. функция T_n зависит только от t , а a_n – только от x , и такое равенство возможно только в этом единственном случае.

Перепишем (3.91) как два независимых уравнения:

$$\ddot{T}_n + c^2 k^4 T_n = 0; \quad (3.92)$$

$$a_n^{IV} - k^4 a_n = 0, \quad (3.93)$$

которые описывают изменение колебаний во времени и формы колебаний.

Решение уравнения, подобного (3.92) рассматривалось в п. 2.2 (см. уравнение 2.7) и его решение, по аналогии с (2.12), запишем так:

$$T_n = a_n \sin(\omega_n t + \varphi_n), \quad (3.94)$$

где

$$\omega_n = c k^2, \quad (3.95)$$

ω_n и φ_n – частота и фаза собственных колебаний.

Из учебного курса дифференциальных уравнений известно, что решение уравнения (3.93) имеет вид

$$a_n = A \sin kx + B \cos kx + C \operatorname{sh} kx + D \operatorname{ch} kx, \quad (3.96)$$

а постоянные A, B, C, D определяются из четырех граничных условий. Рассмотрим это на примере.

Пример 5. Определить низшие частоты и формы собственных колебаний шарнирно-опертой балки длиной l , с погонной массой μ и жесткостью на изгиб EI (рис. 3.17).

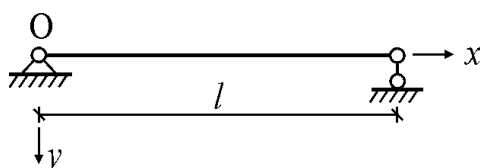


Рис. 3.17

Решение. Определим граничные условия. Так как концы стержня шарнирно-оперты, то прогибы и моменты в его начале и конце равны нулю, т.е.

$$y = 0, \quad M = -EI y'' = 0.$$

Тогда из (3.89) получаются четыре граничных условия:

$$x = 0: \quad a_n(0) = 0, \quad a_n''(0) = 0;$$

$$x = l: \quad a_n(l) = 0, \quad a_n''(l) = 0.$$

Подстановка двух граничных условий для $x=0$ в (3.96) дает систему двух уравнений

$$\begin{cases} B + D = 0, \\ -B + D = 0, \end{cases}$$

откуда $B = D = 0$.

Два граничных условия для $x=l$ дает

$$\begin{cases} A \sin kl + C \operatorname{sh} kl = 0, \\ -A \sin kl + C \operatorname{sh} kl = 0. \end{cases}$$

Сложим эти два уравнения и получим

$$2C \operatorname{sh} kl = 0.$$

Если это уравнение поделить на $\operatorname{sh} kl \neq 0$, получим $C=0$.

Если же из первого уравнения вычесть второе, получим

$$2A \sin kl = 0.$$

Здесь A уже не может равняться нулю, так как иначе по (3.96) форма колебаний a_n была бы нулевой, и колебания будут отсутствовать. Поэтому

$$\sin kl = 0.$$

Это уравнение удовлетворяется при

$$kl = n\pi, \quad (n=1, 2, \dots, \infty)$$

откуда

$$k = \frac{n\pi}{l}.$$

Тогда по (3.95), с учетом (3.87), получаем формулу для определения частот собственных колебаний стержня:

$$\omega_n = ck^2 = c \frac{n^2 \pi^2}{l^2} = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}}. \quad (3.97)$$

Формы собственных колебаний получим из (3.96):

$$a_n = A \cdot \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (3.98)$$

По этим формулам построим несколько форм собственных колебаний

стержня (рис. 3.18) и вычислим их частоты колебаний:

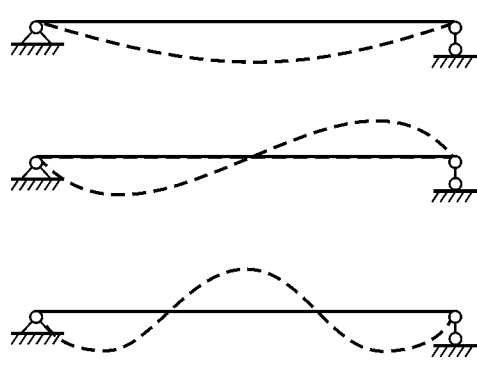
$$\begin{aligned}
 k=1: \quad \omega_1 &= \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}}, & a_1 &= A \sin \frac{\pi x}{l}; \\
 k=2: \quad \omega_2 &= \frac{4\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}}, & a_2 &= A \sin \frac{2\pi x}{l}; \\
 k=3: \quad \omega_3 &= \frac{9\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}}, & a_3 &= A \sin \frac{3\pi x}{l}.
 \end{aligned}$$


Рис. 3.18

Формы собственных колебаний взаимно-ортогональны, т.е. удовлетворяют условиям ортогональности. Например, для первой и второй форм собственных колебаний имеем

$$\int_0^l a_1 \cdot a_2 \, dx = \int_0^l A \sin \frac{\pi x}{l} \cdot A \sin \frac{2\pi x}{l} \, dx = 0.$$

3.8. Приближенные методы в динамике сооружений

Как установили в гл. 3, расчет колебательных систем можно вести по уравнениям колебаний в формах метода перемещений и метода сил:

$$\mathbf{m}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{r}\mathbf{y} + \mathbf{R}^* = \mathbf{P} \quad \text{или} \quad \delta \mathbf{m}\ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{y} + \delta \mathbf{R}^* = \delta \mathbf{P}.$$

Очень часто при этом используется метод разложения по формам собственных колебаний, основанный на формуле (3.29):

$$\mathbf{y} = \mathbf{a}\mathbf{z} = \sum \mathbf{a}_i z_i = \mathbf{a}_1 z_1 + \mathbf{a}_2 z_2 + \dots + \mathbf{a}_n z_n,$$

где \mathbf{a}_i – формы колебаний, z_i – нормальные координаты. Такой подход связан со сложной задачей определения полного спектра частот и форм собственных колебаний системы со многими динамическими степенями свободы из вековых уравнений высоких порядков

$$(\mathbf{r} - \omega^2 \mathbf{m}) \mathbf{a} = \mathbf{0} \quad \text{или} \quad (\delta \mathbf{m} - \lambda \mathbf{E}) \mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

Однако во многих случаях определение всех частот и форм собственных колебаний из этих уравнений является излишним, т.к. в практических расчетах часто используется лишь низший спектр собственных частот и соответствующие им формы колебаний.

При вычислении ограниченного числа частот и форм собственных колебаний широко применяются приближенные методы. Рассмотрим некоторые из них.

3.8.1. Метод приведенных масс

В предыдущей главе 3.7 мы убедились, что даже расчет такой простейшей балки как системы с распределенной массой приводит к дифференциальному уравнению, имеющему бесчисленное число решений. Если же динамическая система будет состоять из большого числа элементов, то ее расчет приведет к системе из множества дифференциальных уравнений в частных производных с многочисленными граничными условиями, решение которой становится весьма сложной или даже неразрешимой задачей.

Упрощение решения достигается сосредоточением масс в дискретных точках. Такой метод называется методом приведенных масс. В нем величины приведенных масс находят из условия равенства кинетических энергий заданной и приведенной систем:

$$K = K_{\text{пр}}. \quad (3.99)$$

Как пример приведения массы распределенной системы к сосредоточенной массе рассмотрим шарнирно-опертую балку с погонной массой μ (рис. 3.19 а).

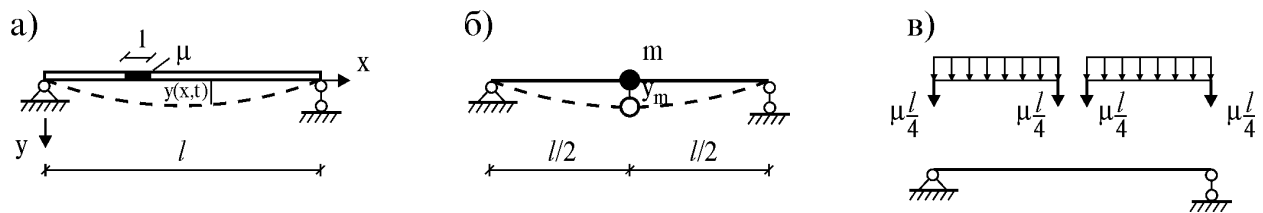


Рис. 3.19

Примем прогиб балки во время колебаний в виде произведения 2-х функций:

$$y(x, t) = y_0(x) \cdot \sin \omega t,$$

где $y_0(x)$ – форма колебаний. Тогда кинетическая энергия участка балки длиной dx будет

$$dK = \frac{1}{2} \mu dx \cdot \dot{y}^2 = \frac{1}{2} \mu dx \cdot y_0^2(x) \omega^2 \cos^2 \omega t,$$

где \dot{y} – скорость движения. Определим полную кинетическую энергию колеблющейся балки с распределенной массой:

$$K = \int_0^l dK = \frac{\omega^2}{2} \mu \cos^2 \omega t \int_0^l y_0^2(x) dx.$$

Если всю распределенную массу балки сосредоточить в виде некоторой приведенной массы m в середине балки (рис. 3.19 б), ее кинетическая энергия будет

$$K_{\text{пр}} = \frac{1}{2} m [\dot{y}(x, t)]_{x=l/2}^2 = \frac{1}{2} m y_m^2 \omega^2 \cos^2 \omega t .$$

Из условия равенства $K = K_{\text{пр}}$ получаем

$$m = \frac{\mu \int_0^l y_0^2(x) dx}{y_m^2} .$$

Для вычисления величины приведенной массы зададимся формой колебаний:

$$y_0(x) = a \frac{x(l-x)}{l^2} ,$$

удовлетворяющей граничным условиям закрепления балки. Подставив ее в выражение массы, получаем

$$m = \frac{8}{15} \mu l \approx 0,533 \mu l .$$

Так как податливость средней точки балки равна $\delta = \frac{l^3}{48 EI}$, то по известной формуле для частоты колебаний системы с одной степенью свободы (2.15) получаем

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{m \delta}} \approx \frac{9,487}{l^2} \sqrt{EI \mu} .$$

Если же взять форму колебаний в виде

$$y_0(x) = a \sin \frac{\pi x}{l} ,$$

получим

$$m = \frac{48}{\pi^4} \mu l \approx 0,493 \mu l , \quad \omega = \frac{\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}} = \frac{9,869}{l^2} \sqrt{EI \mu} .$$

Этот результат можно считать “точным”, т.к. принятая форма колебаний совпадает с первой формой собственных колебаний стержня (формула 3.98 при $n=1$).

Если же принять приведенную массу как сумму реакций для двух половин балки, нагруженных распределенной массой μ (рис. 3.19 в), имеем

$$m = 0,5 \mu l , \quad \omega = \frac{9,798}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\mu}} .$$

Получили решение достаточно близкое к точному. На основании этого, при использовании метода приведенных масс поступают так:

- стержневую систему делят на участки;
- массы участков делят пополам и сосредотачивают по их концам;
- соседние массы объединяют.

3.8.2. Формула Донкерлея

Вывод этой формулы основывается на приравнении частот колебаний двух разных систем с одной степенью свободы.

Рассмотрим две балки одинаковой длины и жесткости, причем в первой балке сосредоточенная масса m_i располагается в точке i , а во второй – масса m_j располагается в точке j (рис. 3.20).

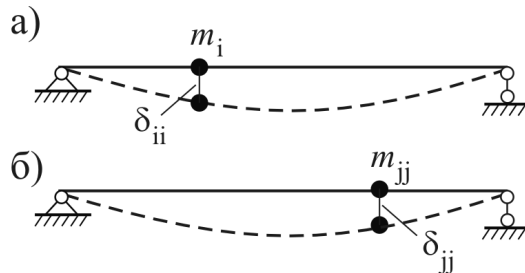


Рис. 3.20

Частоты собственных колебаний этих балок будут

$$\omega_i^2 = \frac{l}{m_i \delta_{ii}}, \quad \omega_j^2 = \frac{l}{m_j \delta_{jj}}.$$

Из условия равенства этих частот следует

$$m_i \delta_{ii} = m_j \delta_{jj}.$$

Отсюда получаем

$$m_i = m_j \frac{\delta_{jj}}{\delta_{ii}} = \eta_{ij} m_j, \quad (3.100)$$

где $\eta_{ij} = \delta_{jj} / \delta_{ii}$. Из формулы (3.100) вытекает, что если массу m_j из точки j перенести в точку i и умножить на коэффициент η_{ij} , то значение собственной частоты колебаний не изменится.

Теперь рассмотрим балку с n сосредоточенными массами (рис. 3.21 а).

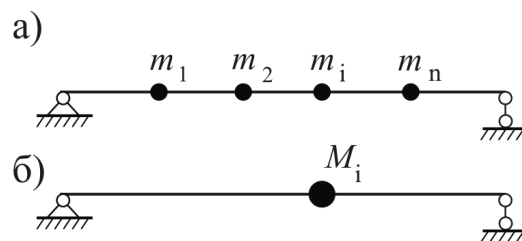


Рис. 3.21

На основании предыдущих выкладок, все массы этой балки перенесем в некоторую точку i . Тогда, согласно (3.100), имеем

$$M_i = \eta_{i1} m_1 + \eta_{i2} m_2 + \dots + \eta_{in} m_n.$$

Умножая это уравнение на δ_{ii} и, учитывая (3.100), получаем

$$M_i \delta_{ii} = \delta_{11} m_1 + \delta_{22} m_2 + \dots + \delta_{nn} m_n. \quad (3.101)$$

Но $M_i \delta_{ii} = I/\omega^2$, где ω – частота одномассовой системы с приведенной массой M_i (рис. 3.21 б), а для любых $\delta_{jj} m_j = I/\omega_j^2$. Тогда (3.101) можно переписать в виде

$$\frac{I}{\omega^2} = \frac{I}{\omega_1^2} + \frac{I}{\omega_2^2} + \dots + \frac{I}{\omega_n^2}. \quad (3.102)$$

Эта формула называется **формулой Донкерлея**. Можно доказать [6], что основная частота колебаний многомассовой системы, вычисленная по формуле Донкерлея, будет всегда меньше истинной частоты колебаний.

3.8.3. Метод Релея

При собственных колебаниях консервативных систем (систем без потери энергии) выполняется принцип сохранения энергии – энергия свободно колеблющейся системы остается постоянной, если не развиваются диссипативные силы. На этой основе разработан энергетический метод, позволяющий определять низшую частоту и форму собственных колебаний динамической системы. В нем принимается, что в колебательной системе происходит полный переход кинетической энергии в потенциальную энергию и наоборот, и поэтому выполняется условие

$$U_{\max} = K_{\max}. \quad (3.103)$$

В качестве примера рассмотрим собственные колебания системы, показанной на рис. 1.2 а. При соответствующем выборе начала отсчета времени перемещение и скорость массы m (рис. 1.2 б) определяются как

$$y = a \sin \omega t, \quad \dot{y} = a \omega \cos \omega t.$$

Потенциальная энергия системы полностью определяется энергией упругой деформации пружины жесткости r :

$$U = \frac{1}{2} r y^2 = \frac{1}{2} r a^2 \sin^2 \omega t, \quad (3.104)$$

а кинетическая энергия массы

$$K = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 = \frac{1}{2} m a^2 \omega^2 \cos^2 \omega t. \quad (3.105)$$

Для момента времени $t = T/4$ [по формуле (1.5) $t = \pi/2\omega$] имеем, что кинетическая энергия (3.105) равна нулю, а потенциальная энергия (3.104) достигает максимальной величины

$$U_{\max} = \frac{1}{2} r a^2.$$

Аналогично, для $t = T/2 = \pi/\omega$ потенциальная энергия (3.104) равна нулю, а кинетическая энергия (3.105) достигает максимума

$$K_{\max} = \frac{1}{2} m a^2 \omega^2.$$

Тогда по условию (3.103) получаем $\omega^2 = r/m$, что совпадает с формулой круговой частоты (2.15) для любой системы с одной степенью свободы. Однако теперь оно выведено с применением метода Релея.

Теперь рассмотрим балку с погонной массой $\mu(x)$ и n сосредоточенными массами m_1, m_2, \dots, m_n (рис. 3.22).

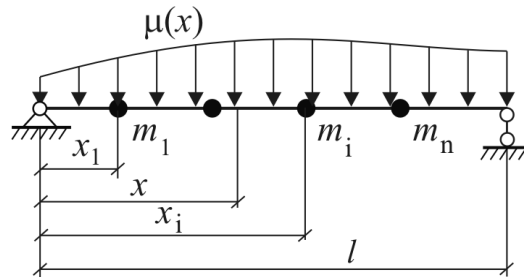


Рис. 3.22

Пусть эта балка совершает колебания по основной форме

$$y(x,t) = y(x) \sin(\omega t + \varphi). \quad (3.106)$$

Тогда скорость колебаний будет

$$\dot{y}(x,t) = \omega y(x) \cos(\omega t + \varphi). \quad (3.107)$$

С их помощью можно вычислить максимальные значения кинетической и потенциальной энергий K_{\max} и U_{\max} :

$$U_{\max} = \frac{l}{2} \left[\int_0^l \mu(x) g y(x) dx + \sum_{i=1}^n m_i g y(x_i) \right],$$

$$K_{\max} = \frac{\omega^2}{2} \left[\int_0^l \mu(x) y^2(x) dx + \sum_{i=1}^n m_i y^2(x_i) \right].$$

Учитывая (3.103), приравняем эти два выражения. Тогда получим

$$\omega^2 = \frac{\int_0^l \mu(x) g y(x) dx + \sum_{i=1}^n m_i g y(x_i)}{\int_0^l \mu(x) y^2(x) dx + \sum_{i=1}^n m_i y^2(x_i)}. \quad (3.108)$$

Это выражение называется **формулой Релея**.

Так как функция $y(x)$ заранее неизвестна, то приходится задаваться некоторой приближенной функцией, отличной от истинной. Поэтому формула (3.108) дает приближенное значение частоты. Можно доказать [6], что вычисленное по формуле Релея значение частоты собственных колебаний отличается от точного с некоторым избытком. Подбирая подходящие функции, аппроксимирующие изогнутую ось балки при колебаниях, можно вычислить соответствующие значения собственных

частот. Наименьшее из них будет давать наилучшее приближение к истинному значению частоты.

Итак, формула Донкерлея дает приближенное значение частоты «снизу», формула Релея – приближение «сверху». Одновременное применение этих формул позволяет установить границы, в пределах которых находится истинное значение основной частоты колебаний.

3.8.4. Метод Релея-Ритца

Метод Релея получил дальнейшее обобщение как метод Релея-Ритца. В нем условие (3.107) используется для определения нескольких низших частот и форм собственных колебаний системы. При этом общее решение уравнения собственных колебаний приближенно представляется как сумма сокращенного ряда

$$\mathbf{y} \approx \sum \mathbf{a}_i z_i = \mathbf{a}_1 z_1 + \mathbf{a}_2 z_2 + \dots + \mathbf{a}_s z_s, \quad s \ll n, \quad (3.109)$$

где учитываются s первых форм собственных колебаний.

Запишем его в матричном виде $\mathbf{y} = \mathbf{a}\mathbf{z}$, где

$$\mathbf{a} = [\mathbf{a}_1 \ \mathbf{a}_2 \ \dots \ \mathbf{a}_s]$$

– матрица из s форм собственных колебаний системы, $\mathbf{z} = \{z_1 \ z_2 \ \dots \ z_s\}$ – сокращенный вектор нормальных координат.

По аналогии с (3.104) и (3.105), потенциальная и кинетическая энергии системы со многими степенями свободы определяются так:

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{y}^t \mathbf{r} \mathbf{y}, \quad (3.110)$$

$$K = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{y}}^t \mathbf{m} \dot{\mathbf{y}}, \quad (3.111)$$

где \mathbf{r} – матрица жесткости, \mathbf{m} – матрица масс.

С учетом того, что при собственных колебаниях $\mathbf{y} = \mathbf{a} \sin(\omega t + \varphi)$ (см. формулу 3.8) и что $\mathbf{y} = \mathbf{a}\mathbf{z}$, имеем

$$U_{\max} = \frac{1}{2} \mathbf{z}^t \mathbf{a}^t \mathbf{r} \mathbf{a} \mathbf{z}, \quad K_{\max} = \frac{\omega^2}{2} \mathbf{z}^t \mathbf{a}^t \mathbf{m} \mathbf{a} \mathbf{z}.$$

Приравнивая их, получаем формулу

$$\omega^2 = \frac{\mathbf{z}^t \mathbf{a}^t \mathbf{r} \mathbf{a} \mathbf{z}}{\mathbf{z}^t \mathbf{a}^t \mathbf{m} \mathbf{a} \mathbf{z}}. \quad (3.112)$$

Если известны нормальные координаты \mathbf{z} , то эта формула должна давать минимальные значения частот собственных колебаний. Чтобы этого добиться, данное уравнение рассматривается как функционал от многих переменных и исследуется на экстремум. Для этого берутся частные производные по каждой из z_i и все они приравняются нулю. Тогда получается система однородных уравнений относительно \mathbf{z} :

$$(\mathbf{a}^t \mathbf{r} \mathbf{a} - \omega^2 \mathbf{a}^t \mathbf{m} \mathbf{a}) \mathbf{z} = \mathbf{0}.$$

Если обозначить $\mathbf{r}^* = \mathbf{a}^t \mathbf{r} \mathbf{a}$ и $\mathbf{m}^* = \mathbf{a}^t \mathbf{m} \mathbf{a}$, получим уравнение

$$(\mathbf{r}^* - \omega^2 \mathbf{m}^*) \mathbf{z} = \mathbf{0} \quad (3.113)$$

из которого определяются низшие частоты ω_i и z_i .

Тогда по формуле $\mathbf{y} = \mathbf{a} \mathbf{z}$ определяются низшие формы собственных колебаний исходной системы со многими степенями свободы.

3.8.5. Метод постоянного ускорения

Для решения задач динамики сооружений разработаны специальные методы решения дифференциальных уравнений. Одним из таких является метод постоянного ускорения. Этот метод позволяет определять поведение динамической системы поэтапно, через определенные интервалы.

Рассмотрим динамическую систему с демпфированием. Уравнение вынужденных колебаний такой системы имеет вид

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{y}} + \mathbf{c} \dot{\mathbf{y}} + \mathbf{r} \mathbf{y} = \mathbf{P}, \quad (3.114)$$

где \mathbf{m} – матрица масс, \mathbf{c} – матрица демпфирования, \mathbf{r} – матрица жесткости, $\mathbf{y} = \mathbf{y}(t)$ – вектор перемещений, $\mathbf{P} = \mathbf{P}(t)$ – вектор нагрузки.

Если в интервале от t до $t + \Delta t$ известны величины

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}_0, \quad \mathbf{y}(t + \Delta t) = \mathbf{y}_1,$$

$$\dot{\mathbf{y}}(t) = \dot{\mathbf{y}}_0, \quad \dot{\mathbf{y}}(t + \Delta t) = \dot{\mathbf{y}}_1,$$

$$\ddot{\mathbf{y}}(t) = \ddot{\mathbf{y}}_0, \quad \ddot{\mathbf{y}}(t + \Delta t) = \ddot{\mathbf{y}}_1,$$

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}_0, \quad \mathbf{P}(t + \Delta t) = \mathbf{P}_1,$$

то для них уравнение (3.108) запишется как

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{y}}_0 + \mathbf{c} \dot{\mathbf{y}}_0 + \mathbf{r} \mathbf{y}_0 = \mathbf{P}_0, \quad (3.115)$$

$$\mathbf{m} \ddot{\mathbf{y}}_1 + \mathbf{c} \dot{\mathbf{y}}_1 + \mathbf{r} \mathbf{y}_1 = \mathbf{P}_1. \quad (3.116)$$

Для пошагового расчета в методе постоянного ускорения используется гипотеза: в каждый интервал времени (т.е. при $0 \leq \tau \leq \Delta t$) ускорение постоянно и равно среднему ускорению:

$$\ddot{\mathbf{y}}(t + \Delta t) = \frac{\ddot{\mathbf{y}}_1 + \ddot{\mathbf{y}}_0}{2}. \quad (3.117)$$

С другой стороны,

$$\ddot{\mathbf{y}}(t + \tau) = \frac{d[\dot{\mathbf{y}}(t + \tau)]}{d\tau}. \quad (3.118)$$

Поэтому (3.117) можно записать так:

$$d[\dot{\mathbf{y}}(t + \tau)] = \frac{(\ddot{\mathbf{y}}_1 + \ddot{\mathbf{y}}_0) d\tau}{2}.$$

Если проинтегрировать обе стороны этого выражения, получим

$$\dot{\mathbf{y}}(t + \tau) = \frac{(\ddot{\mathbf{y}}_1 + \ddot{\mathbf{y}}_0) \tau}{2} + C_1. \quad (3.119)$$

Так как для момента времени $\tau=0$ $\dot{y}(t+\tau) = \dot{y}(t) = \dot{y}_0$, то $C_1 = \dot{y}_0$.
Значит,

$$\dot{y}(t+\tau) = \frac{(\ddot{y}_1 + \ddot{y}_0) \tau}{2} + \dot{y}_0. \quad (3.120)$$

Интегрируя как и выше, получаем формулу вычисления перемещения в момент времени τ :

$$y(t+\tau) = \frac{(\ddot{y}_1 + \ddot{y}_0) \tau^2}{2} + \dot{y}_0 \tau + y_0. \quad (3.121)$$

Из формул (3.120) и (3.121) определяются скорость и перемещение на границе интервала

$$\dot{y}_1 = \dot{y}_0 + \frac{(\ddot{y}_1 + \ddot{y}_0) \Delta t}{2}, \quad (3.122)$$

$$y_1 = y_0 + \dot{y}_0 \Delta t + \frac{(\ddot{y}_1 + \ddot{y}_0) \Delta t^2}{4}. \quad (3.123)$$

Далее выразим ускорение и скорость через y_1 , y_0 , \dot{y}_1 и \dot{y}_0 . Для этого решим (3.123) относительно \ddot{y}_1 :

$$\ddot{y}_1 = \frac{4}{\Delta t^2} (y_1 - y_0) - \frac{4}{\Delta t} \dot{y}_0 - \ddot{y}_0. \quad (3.124)$$

Если подставить его в (3.122), получим

$$\dot{y}_1 = \frac{2}{\Delta t} (y_1 - y_0) - \dot{y}_0. \quad (3.125)$$

Теперь подставим (3.124) и (3.125) в (3.116) и получим уравнение

$$\mathbf{r}^* y_1 = \mathbf{P}^*, \quad (3.126)$$

где

$$\mathbf{r}^* = \mathbf{r} + \frac{4}{\Delta t^2} \mathbf{m} + \frac{2}{\Delta t} \mathbf{c}, \quad (3.127)$$

$$\mathbf{P}^* = \mathbf{P}_1 + \left(\frac{4}{\Delta t^2} \mathbf{m} + \frac{2}{\Delta t} \mathbf{c} \right) y_0 + \left(\frac{4}{\Delta t} \mathbf{m} + \mathbf{c} \right) \dot{y}_0 + \mathbf{m} \ddot{y}_0. \quad (3.128)$$

Начальное ускорение определяется из (3.115):

$$\ddot{y}_0 = \mathbf{m}^{-1} (\mathbf{P}_0 - \mathbf{c} \dot{y}_0 - \mathbf{r} y_0). \quad (3.129)$$

Полученные формулы позволяют вести расчет на вынужденные колебания демпфированной системы шаговым методом. Для этого участок движения (временный промежуток, в котором ведется расчет) необходимо поделить на малые интервалы.

В начальный момент времени (в начале колебаний) должны быть известны вектора начального прогиба y_0 и начального ускорения \dot{y}_0 . Кроме того, должен быть известен закон изменения внешней нагрузки, т.е.

должны быть известны значения нагрузки в начале движения P_0 и в начале каждого интервала P_1, P_2 и т.д.

Ускорение \ddot{y}_0 в начале движения определяется из (3.129). Используя его, по (3.126), (3.125) и (3.124) определяются значения y_1, \dot{y}_1 и \ddot{y}_1 в конце интервала. А они, в свою очередь, являются начальными условиями для расчета колебаний во втором интервале. Используя те же уравнения (3.126), (3.125) и (3.124) расчет можно продолжать далее.

Чтобы метод давал хороший результат, интервалы вычислений должны быть малыми.

В О П Р О С Ы

1. Чему равно число форм собственных колебаний упругой системы?
2. Как определяется “вековое уравнение”?
3. Что такое спектр частот?
4. Как определяются формы собственных колебаний?
5. В чем состоит преимущество перехода к нормальным координатам?
6. В чем заключается метод сложения форм собственных колебаний?
7. Сколько состояний резонанса может иметь колебательная система?
8. Каков порядок расчета на вибрационную нагрузку?
9. В чем состоит преимущество МКЭ по сравнению с другими методами?
10. Как определяется матрица сосредоточенных масс?
11. Определить частоты собственных колебаний балки постоянной жесткости EI с двумя точечными массами (рис. 3.13 а).
12. Определить частоты собственных колебаний жесткой невесомой рамы с точечной массой, опирающейся на две упругие опоры жесткости r (рис. 3.13 б).

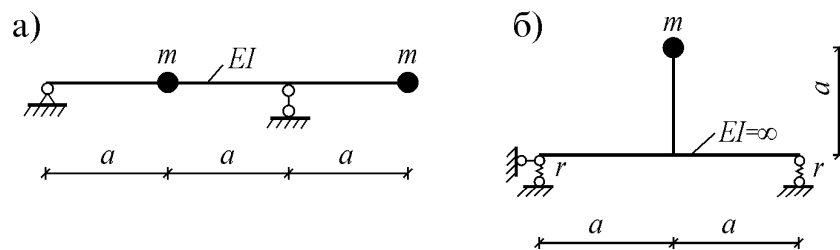


Рис. 3.13

13. Что такое сейсмичность и магнитуда землетрясения?
14. Какие два типа расчета проводятся на сейсмическую нагрузку?
15. Чем отличается динамическая теория от статической?
16. Что такое расчетный спектр землетрясения?
17. В чем сложность расчета систем с бесконечным числом степеней свободы?
18. В чем суть метода приведенных масс?
19. Для чего используются формулы Донкерлея и Релея?
20. Какая гипотеза лежит в основе метода постоянного ускорения?

Глава 4

УСТОЙЧИВОСТЬ СООРУЖЕНИЙ

4.1. Введение в устойчивость сооружений

Опыт эксплуатации сооружений показывает, что для их надежности одной прочностью не достаточно, т.к. при увеличении нагрузки или случайном воздействии сооружение могут внезапно потерять свою устойчивость, затем разрушиться или стать непригодным для дальнейшей эксплуатации. Например, простейший элемент в виде прямолинейного длинного стержня под действием продольной сжимающей силы может резко изогнуться и потерять свою первоначальную прямолинейную форму. После этого стержень будет оставаться изогнутым или, если прочности будет недостаточно, внутренние силы приведут к его разрушению.

Устойчивость – это способность сооружения сохранять свое первоначальное положение или форму. Переход устойчивого сооружения в состояние неустойчивого равновесия называется **потерей устойчивости**. Граница перехода в состояние неустойчивого равновесия называется **критическим состоянием**. Сила, приводящая сооружение в критическое состояние, называется **критической силой**. Ее будем обозначать $P_{кр}$.

Явление потери устойчивости возникает и в стержневых системах, и в пластинах, и в оболочках. Устойчивость как простых систем, так и сложных сооружений, состоящих из множества элементов, зависит от устойчивости отдельных элементов и их совместной работы в сооружениях.

Ответ на вопрос “устойчиво или неустойчиво сооружение?” является очень важной задачей. Потому что для потери устойчивости сооружения, достигшего критического состояния, достаточно и незначительной причины. Если же процесс потери устойчивости начался, он идет очень быстро и приводит к резкому изменению первоначальной формы, или разрушению частей или всего сооружения. В практике строительства и эксплуатации различных сооружений (мостов, высотных зданий и др.) известно много случаев их разрушения из-за потери устойчивости. Как ни печально, такие бедствия случаются и сейчас.

Проблемами расчета на устойчивость занимается специальный раздел строительной механики – **устойчивость сооружений**. В нем разрабатываются теоретические положения и методы расчета на устойчивость, решаются прикладные задачи определения критических нагрузок и форм потери устойчивости сооружения, влияния случайных нагрузок на его поведение.

Теория устойчивости сооружений делится на статическую и динамическую устойчивость. Здесь будем рассматривать лишь задачи статической устойчивости, учитывающей только статическое воздействие нагрузки.

4.2. Виды и типы потери устойчивости

Сооружение считается устойчивым, если после окончания внешнего воздействия возвращается в положение первоначального равновесия и принимает первоначальную форму. Когда материал сооружения работает в упругой зоне, происходит полное возвращение, а при переходе в пластическую область – частичное.

Различают два вида потери устойчивости – устойчивость положения и устойчивость формы.

Устойчивость положения – это способность сооружения сохранять свое положение. Например, при действии на подпорную стенку нагрузки q (рис. 4.1 а) относительно точки A создается опрокидывающий момент $M_{opr} = qh^2 / 2$, отчего подпорная стенка может потерять устойчивость (рис. 4.1 б). Опрокидыванию противостоит собственный вес подпорной стенки G , создающий удерживающий момент $M_{уд} = Gl$.

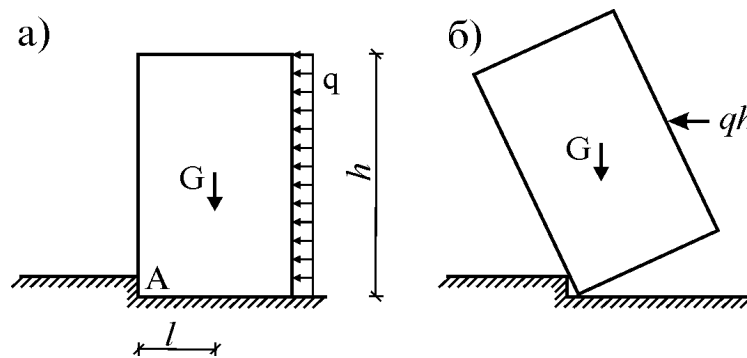


Рис. 4.1

Устойчивость системы зависит от соотношения этих моментов, так как она при:

- 1) $M_{opr} < M_{уд}$ – находится в положении устойчивого равновесия;
- 2) $M_{opr} > M_{уд}$ – находится в положении неустойчивого равновесия;
- 3) $M_{opr} = M_{уд}$ – находится в безразличном состоянии.

Если ввести коэффициент устойчивости положения

$$k = \frac{M_{уд}}{M_{opr}}, \quad (4.1)$$

из этих соотношений следует, что:

- 1) при $k > 1$ – система устойчива;
- 2) при $k < 1$ – система неустойчива;
- 3) при $k = 1$ – система находится в безразличном состоянии.

Таким образом, для устойчивости системы необходимо выполнение условия $k > 1$. Однако, чтобы добиться более надежной устойчивости системы, принимают завышенное значение коэффициента k . Например,

для устойчивости высотных радио- или телевизионных мачт по строительным нормам должно быть $k > 2,5$.

Устойчивость формы – это способность сооружения сохранять свою первоначальную форму.

Пусть на прямой стержень с заделанным и свободным концами действует некоторая сжимающая продольная сила P , направленная вдоль оси стержня (рис. 4.2 а). Если верхний конец стержня немного отклонить в сторону, то при P меньшей некоторой величины $P_{кр}$ он вернется в исходное положение. Этот процесс можно сравнить с возвращением тяжелого шарика, расположенного выше дна углубления, в нижнее устойчивое положение (см. схему внизу рис. 4.2 а). Поэтому можно считать, что при $P < P_{кр}$ система является устойчивой.

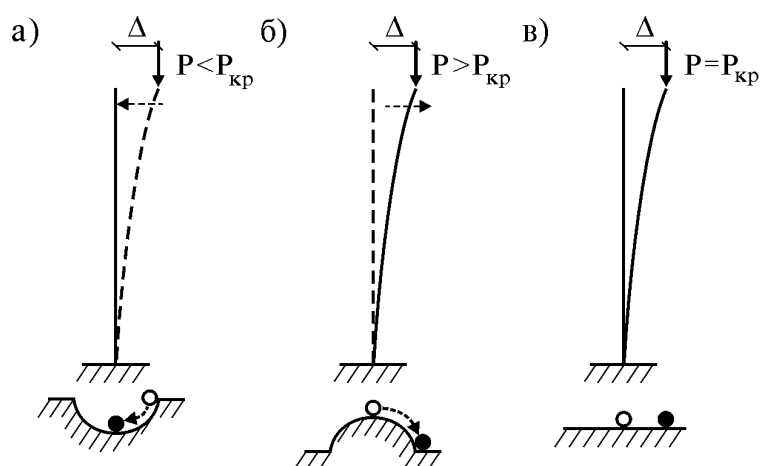


Рис. 4.2

Если же $P > P_{кр}$, перемещения отклоненного стержня начнут возрастать (рис. 4.2 б), и он уже не вернется в исходное положение. Этот процесс можно сравнить со скатыванием шарика с горки, как не способного к возвращению в первоначальное устойчивое положение (см. схему внизу рис. 4.2 б). Значит, при $P > P_{кр}$ система будет неустойчивой.

Если $P = P_{кр}$, отклоненный стержень будет оставаться в том же положении без движения (рис. 4.2 в). Это явление можно сравнить с шариком на горизонтальной плоскости, который при любом его смещении останется на новом месте без движения (см. схему внизу рис. 4.2 в). Поэтому можно говорить, что при $P = P_{кр}$ система находится в безразличном состоянии.

Как видно из примера, в зависимости от величины приложенной нагрузки система может быть устойчивой, неустойчивой или безразличной. Однако, если шарик, находящемуся в безразличном состоянии, при смещении сообщить некоторую скорость, то он покатится дальше. Значит, даже безразличное состояние можно считать неустойчивым. Поэтому систему можно считать устойчивой только тогда, когда она способна возвратиться в исходное положение при любом отклонении.

Отклоненный шарик устойчивой системы (рис. 4.2 а), возвращаясь в исходное положение, совершает некоторую работу. Поэтому первоначальная энергия системы уменьшается. В неустойчивой системе (рис. 4.2 б), наоборот, энергия системы возрастает. В безразличной системе (рис. 4.2 в) энергия не меняется. Значит, энергия устойчивой системы минимальна, неустойчивой системы – максимальна, безразличной системы – постоянна.

Теперь рассмотрим шарик, лежащий на маленьком углублении выпуклой поверхности (рис. 4.3 а). При незначительных отклонениях шарика он вернется в начальное положение, т.е. является устойчивым. Такая устойчивость называется *устойчивостью «в малом»*. Если же шарик получит большее отклонение, то скатится вниз, т.е. потеряет устойчивость. В отличие от этого, шарик на рис. 4.2 а будет устойчивым и при значительных отклонениях. Такая устойчивость называется *устойчивостью «в большом»*. Если система устойчива в большом, она будет устойчивой и в малом. Но обратное утверждение не имеет места.

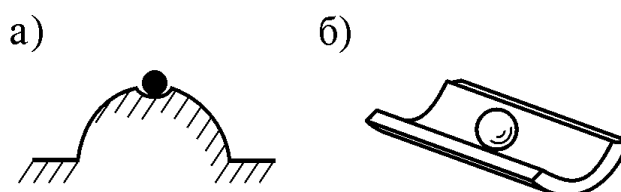


Рис. 4.3

До сих пор мы рассматривали системы с одной степенью свободы. Определение устойчивости систем с несколькими степенями свободы значительно сложнее, так как они в одном или нескольких направлениях могут быть устойчивыми, а в других – неустойчивыми или находиться в безразличном состоянии. Например шарик, лежащий на дне горизонтального желоба (рис. 4.3 б) в поперечном направлении находится в устойчивом, а в продольном – в безразличном состоянии. Или, если у стержня, рассмотренного на рис. 4.2 а, момент инерции сечения в плоскости рисунка будет меньше момента инерции в поперечном направлении, то он скорее всего потеряет устойчивость в направлении меньшей жесткости. Поэтому такой стержень в одном направлении будет находиться в положении устойчивого, а в другом – неустойчивого равновесия.

Устойчивое и неустойчивое равновесие (движение) системы является одним из самых сложных понятий механики, поэтому часто интерпретируется по-разному. Но, несмотря на это, устойчивость можно разделить на два основных рода.

Потеря устойчивости первого рода связана с нарушением равновесия между внешними и внутренними силами и характеризуется появлением новой формы деформации, возникающей почти мгновенно. Она может быть трех типов:

- потеря устойчивости центрального сжатия;

- потеря устойчивости симметричной формы деформации;
- потеря устойчивости плоской формы деформации.

Например, центрально-сжатый стержень на рис. 4.2 а теряет устойчивость за счет появления новой, изгибной деформации. Симметричная рама на рис. 4.4 а под действием силы P получает симметричные деформации. Но при увеличении этой силы и достижении силы P критического значения $P_{кр}$ рама резко теряет свою устойчивость и переходит к несимметричной форме деформированного состояния (рис. 4.4 б). Двутавровая балка, изображенная на рис. 4.4 в, под действием вертикальной силы P изгибается в вертикальной плоскости. Но если эта сила достигнет некоторого критического значения $P_{кр}$, балка начнет выгибаться вбок и закручиваться, теряя первоначальную форму и состояние плоской деформации.

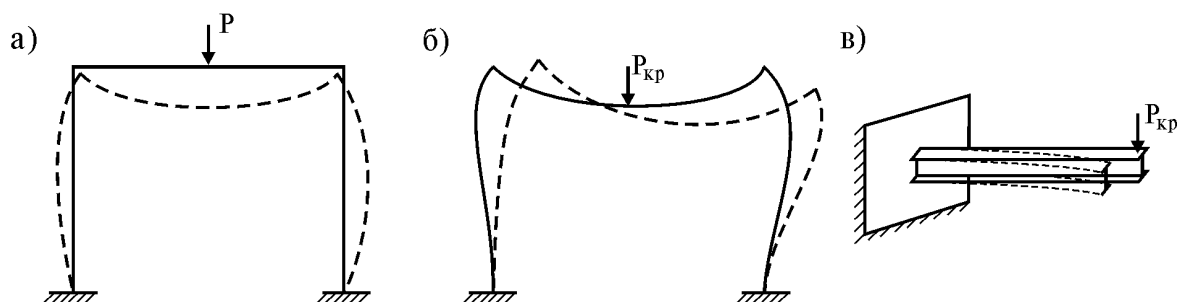


Рис. 4.4

Если потеря устойчивости произойдет в пластической области работы материала, то новая форма равновесия в деформированном состоянии будет иметь остаточные деформации.

Потеря устойчивости второго рода характеризуется потерей несущей способности всего сооружения и наблюдается как резкое возрастание предыдущих деформаций. В этом случае равновесие между нагрузкой и внутренними усилиями нарушается даже без появления новых видов деформаций.

Например, внешняя сила P , действующая на вертикальный стержень с некоторым смещением от его продольной оси (рис. 4.5 а), с самого начала вызывает не только продольную деформацию, но и изгиб. С увеличением силы P внутренние усилия, деформации и перемещения стержня будут возрастать почти пропорционально этой силе. Однако далее влияние продольной силы начинает резко увеличиваться, и в некоторый момент времени деформации и перемещения начнут увеличиваться и без возрастания нагрузки.

Потеря устойчивости второго рода может происходить как со сменой первоначальной формы деформации, так и без нее. Например, может произойти потеря несущей способности двухшарнирной арки (рис. 4.5 б) даже в упругой стадии, без смены формы деформации. Далее равновесие возможно лишь с уменьшением силы P .

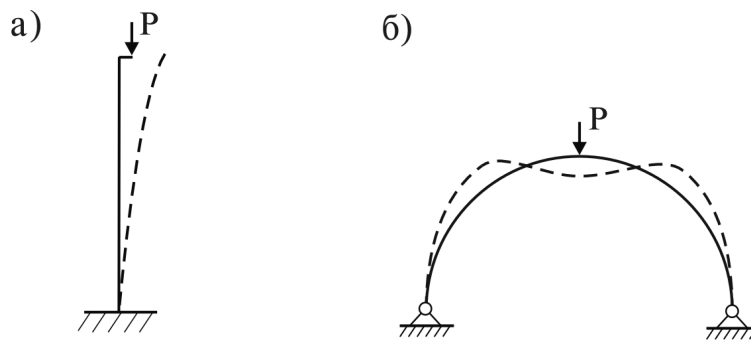


Рис. 4.5

Следует отметить, что оба рода потери устойчивости возможны как при эластических деформациях, так и в упруго-пластической зоне работы материала.

Классической задачей устойчивости сооружений является расчет сооружений на устойчивость первого рода. При этом обычно рассматриваются консервативные системы, т.е. системы, обладающие двумя свойствами:

– величина и направление действующих сил зависит от положения системы;

– работа, совершаемая силами, зависит от их начального и конечного положения, но не зависит от пути их следования.

Потерю устойчивости во многих случаях можно рассматривать как раздвоение формы равновесия, называемое **бифуркацией**. Например, прямолинейный стержень при достижении продольной силы критического значения $P_{кр}$ может принять и криволинейную форму. Поэтому при $P=P_{кр}$ происходит упомянутое раздвоение формы равновесия.

Для установления равновесия системы используются два подхода:

1) принцип возможных перемещений, по которому: *если система находится в равновесии, то сумма работ всех внешних и внутренних сил на любых бесконечно малых перемещениях равна нулю;*

2) свойство потенциальной энергии системы, по которому: *если система находится в равновесии, ее потенциальная энергия (т.е. энергия внешних и внутренних сил) имеет экстремальное значение.*

Однако эти признаки не дают ответа на вопрос, является ли равновесие устойчивым или неустойчивым. На этот вопрос отвечает **принцип Лагранжа-Дирихле**: *равновесие системы устойчиво, если ее полная потенциальная энергия имеет минимум по сравнению со всеми достаточно близкими положениями системы.*

Этот принцип в математической форме записывается так:

$$\delta U = 0, \quad (4.2)$$

где U – полная потенциальная энергия системы. Смысл этой формулы – приращение (вариация) δ полной энергии U устойчивой системы должна равняться нулю.

4.3. Задачи и методы расчета на устойчивость

При достижении внешней нагрузки критического значения, точки системы зачастую получают значительные перемещения, форма сооружения меняется, и оно переходит в новое положение равновесия или разрушается. В таких случаях определять форму потери устойчивости сооружения (т.е. как это происходит) обычно не требуется. Поэтому **основной задачей теории устойчивости** является определение наименьшей критической нагрузки. В такой постановке определение форм потери устойчивости становится чисто академической задачей.

Если на систему одновременно действуют несколько внешних сил P_i ($i=1, \dots, n$) (рис. 4.6 а), приходится определять критические значения всех этих сил, т.е. решать задачу со многими неизвестными (так называемую многопараметрическую задачу). Эту задачу можно упростить, если все силы P_i выразить через одну из них и тем самым привести задачу к однопараметрической. Например, если силу P_1 обозначить через P и ввести некоторые коэффициенты $\alpha_i = P_i/P$, получим

$$P_1=P; P_2=\alpha_2P; \dots P_i=\alpha_iP; \dots P_n=\alpha_nP. \quad (4.3)$$

Тогда вместо поиска критических значений нескольких сил достаточно искать только одну критическую силу P (рис. 4.6 б).

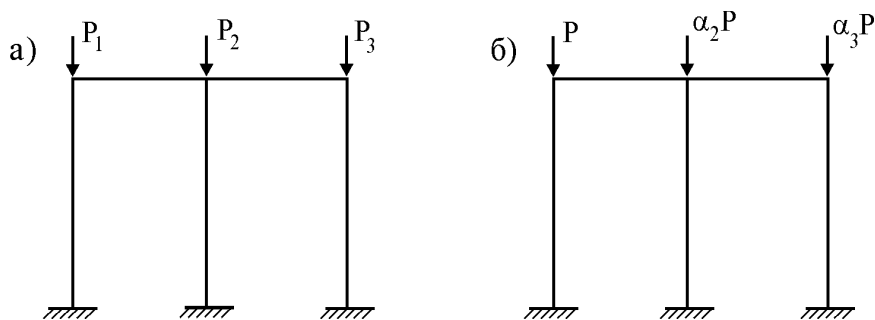


Рис. 4.6

Имеется целый ряд методов расчета на устойчивость. В отличие от расчета на прочность, они основаны на изучении деформированного состояния системы. В таких случаях говорят, что расчет ведется по деформированной схеме.

В общем случае все методы расчета на устойчивость делятся на три группы: статические, энергетические и динамические.

4.3.1. Статический метод

Статический метод основан на составлении уравнений статики, и по имени его автора часто называется методом Эйлера. В основе метода лежит **критерий Эйлера (статический критерий устойчивости)**: критической силой является наименьшая сила, способная вызвать потерю устойчивости сооружения.

Критерий Эйлера имеет одну важную особенность. Дело в том, что смена форм равновесия – это некоторое движение системы, где должно присутствовать время. А в критерии Эйлера время отсутствует.

Для реализации статического метода надо рассматривать новое положение системы после разветвления (бифуркации) формы равновесия.

Расчет по статическому методу состоит из трех этапов:

- системе задаются малые перемещения;
- составляются уравнения равновесия внешних и внутренних сил;
- из этих уравнений определяется критическая нагрузка.

Для систем с конечным числом степеней свободы статический метод приводит к решению алгебраических уравнений, а для систем с бесконечным числом степеней свободы – к решению дифференциальных уравнений. После определения критической силы, при необходимости, из уравнений равновесия можно определить и формы потери устойчивости.

Имеются разные варианты реализации статического метода. Например, при расчете на устойчивость продольно-сжатого стержня можно решать дифференциальное уравнение продольного изгиба или использовать метод начальных параметров. При расчете сложных статически неопределимых систем можно использовать метод сил, метод перемещений, смешанный метод или приближенные методы.

4.3.2. Энергетический метод

Энергетический метод основан на исследовании полной потенциальной энергии системы, которая в положении устойчивого равновесия должна иметь минимальную величину.

Если полная потенциальная энергия зависит от нескольких параметров (перемещений y_i), то условие (4.2) распадается на несколько условий: $\frac{\partial U}{\partial y_i} = 0$. Поэтому в системе с несколькими степенями свободы в

безразличном состоянии должны выполняться условия $\frac{\partial^2 U}{\partial y_i^2} = 0$, в устойчивой системе – условия $\frac{\partial^2 U}{\partial y_i^2} < 0$, в неустойчивой – условия $\frac{\partial^2 U}{\partial y_i^2} > 0$.

Полная потенциальная энергия системы U определяется как сумма двух работ – работы внешних сил W и работы внутренних сил V :

$$U = W - V. \quad (4.4)$$

Здесь работа внутренних сил V , направленная на восстановление равновесия системы, взята со знаком «–». С учетом этого, по формуле (4.2) (по принципу Лагранжа-Дирихле) получаем

$$\delta W = \delta U. \quad (4.5)$$

Это выражение формулируется как **энергетический критерий устойчивости**: критической является сила, при которой приращение работы внешних сил равно приращению работы внутренних сил.

Расчет по энергетическому методу, основанный на этом критерии, состоит из трех этапов:

- системе задаются малые перемещения;
- определяются приращения работ внешних и внутренних сил;
- из условия их равенства определяется критическая нагрузка.

Тогда критическая нагрузка определяется как нагрузка, при действии которой систему можно отклонить от положения равновесия, не увеличивая ее полную энергию.

Следует отметить, что при использовании энергетического метода необходимо задавать предполагаемую форму потери устойчивости системы, поэтому он, как правило, дает приближенное решение.

Энергетический метод позволяет решать задачи не решаемые статическим методом. Однако реализовать его бывает значительно сложнее.

4.3.3. Динамический метод

Динамический метод (метод малых колебаний) основан на задании системе некоторого отклонения и изучении ее колебаний. Даже тогда, когда действуют только статические нагрузки, внешние нагрузки в этом методе следует рассматривать как динамические.

Известно, что динамическая система может вести себя по-разному. В динамике сооружений мы установили, что если устойчивой системе дать малые отклонения и предоставить самой себе, то она будет совершать гармонические колебания с некоторой частотой (частотой собственных колебаний ω) и ограниченными амплитудами колебаний. Если же отклонить систему, находящуюся в безразличном состоянии, она останется в том же положении без колебаний. Поэтому у такой системы частота колебаний равна нулю, а амплитуда постоянна. Если же отклонить неустойчивую динамическую систему, она будет продолжать свое движение как апериодическая система. Как известно из динамики, при апериодическом движении системы $\omega^2 < 0$.

Итак, в устойчивой системе частота собственных колебаний $\omega > 0$, в безразличной системе $\omega = 0$, в неустойчивой системе $\omega^2 < 0$.

В результате такого анализа получен **динамический критерий устойчивости**: критической является сила, при которой частота собственных колебаний системы равна нулю.

Расчет по динамическому методу также состоит из трех этапов:

- системе задаются малые перемещения;
- записывается уравнение движения системы;
- из условия равенства нулю частоты собственных колебаний

определяется критическая сила.

Динамический метод расчета на устойчивость считается наиболее общим и универсальным методом. Он позволяет решать даже те задачи, с которыми не могут справиться статический и энергетический методы.

Таким образом, рассмотренные методы принципиально отличаются друг от друга. Однако у них имеются и общие части: в них устанавливается зависимость деформаций, внутренних усилий и перемещений от неизвестной внешней нагрузки; рассматривается момент потери устойчивости – безразличное состояние системы; составляются уравнения, соответствующие реализуемому методу; из этих уравнений определяется неизвестная нагрузка; используя один из критериев устойчивости, устанавливается критическое значение искомой нагрузки.

В качестве примера рассмотрим решение одной простой задачи.

Пример 6. На рис. 4.7 а представлен стержень длиной $2l$, с одного конца опертый на жесткую, с другого конца на упругую опору жесткости k . Вдоль оси стержня действует продольная сжимающая сила P . Провести расчет стержня на устойчивость и определить $P_{кр}$ тремя методами, считая стержень не изгибаемым.

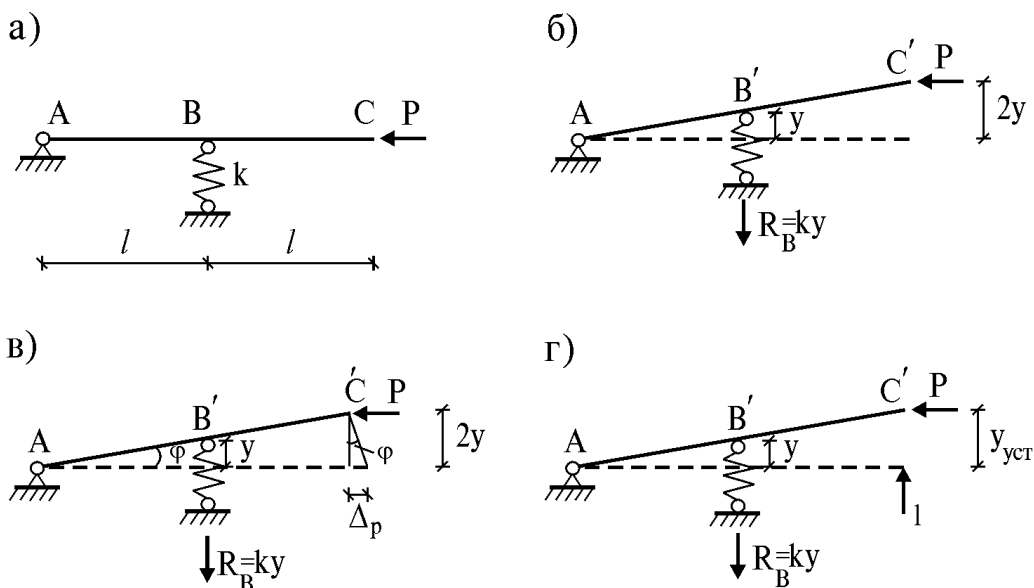


Рис. 4.7

Решение.

1. Использование статического метода (метода Эйлера)

Так как опора A неподвижная, а сам стержень не изгибается, то система может получать малые перемещения как показано на рис. 4.7. б. Тогда перемещения всех точек стержня можно выразить через одно перемещение – перемещение y опоры B (в частности, перемещение точки C будет $2y$).

Поэтому данная система является системой с одной степенью свободы, и для ее расчета достаточно составления только одного

уравнения равновесия между внешними и внутренними силами:

$$\Sigma M_A = P \cdot 2y - R_B l = 0.$$

В упругой опоре В от перемещения y возникает реакция $R_B = k y$. Подставив его в уравнение равновесия, получаем

$$(2P - kl) y = 0.$$

Это уравнение выполняется в двух случаях:

1) $y = 0$; это условие соответствует первоначальному устойчивому состоянию системы и не дает решения задачи;

2) $2P - kl = 0$; отсюда получаем $P = kl / 2$. Этот случай соответствует моменту бифуркации (раздвоению) решения – перехода системы из безразличного состояния в новое положение равновесия. Действительно, при $P < kl / 2$ система устойчива, а при $P > kl / 2$ – неустойчива. Следовательно, по критерию Эйлера сила $P = kl / 2$ является критической:

$$P_{кр} = kl / 2.$$

2. Использование энергетического метода

При использовании статического метода малые по сравнению с y перемещения (малые второго порядка) не учитывались. В энергетическом методе их необходимо учитывать. Например, по рис. 4.7 в устанавливаем, что сила P получает малое перемещение в горизонтальном направлении

$$\Delta_P = 2y \cdot \operatorname{tg} \varphi = 2y \cdot \frac{y}{l} = 2 \frac{y^2}{l}.$$

За счет этого возникают приращения работ внешних и внутренних сил:

$$\delta W = P \cdot \Delta_P = 2P \frac{y^2}{l}, \quad \delta V = R_B \cdot y = ky \cdot y = ky^2.$$

По принципу Лагранжа-Дирихле должно выполняться условие (4.5):

$$2P \frac{y^2}{l} = ky^2 \quad \text{или} \quad \left(\frac{2P}{l} - k \right) y^2 = 0.$$

Последнее уравнение выполняется в двух случаях:

1) $y = 0$; оно соответствует начальному состоянию устойчивости;

2) $\frac{2P}{l} - k = 0$ или $P = \frac{kl}{2}$. Это и есть критическая сила, потому что

если внешняя сила меньше нее, то $\delta U > 0$, если она равна ей, то $\delta U = 0$, если больше нее, то $\delta U < 0$. Таким образом, и по энергетическому критерию

$$P_{кр} = kl / 2.$$

3. Использование динамического метода

Для расчета этой системы с одной степенью свободы динамическим методом воспользуемся формулой (2.15) из динамики сооружений

$$\omega^2 = \frac{g}{y_{cm}},$$

в которой перемещение y_{cm} определим из единичного состояния (рис. 4.7 г). С этой целью составим уравнение момента относительно точки A :

$$\sum M_A = l \cdot 2l + P y_{cm} - ky \cdot l = 0.$$

Так как $y = \frac{y_{cm}}{2}$, отсюда получаем $(\frac{kl}{2} - P)y_{cm} = 2l$ или $y_{cm} = \frac{2l}{(\frac{kl}{2} - P)}$.

По динамическому критерию, в безразличном состоянии системы должно выполняться условие

$$\omega^2 = \frac{g}{y_{cm}} = \frac{(\frac{kl}{2} - P)g}{2l} = 0.$$

Оно выполняется только при $\frac{kl}{2} - P = 0$, т.е. при $P = \frac{kl}{2}$. Поэтому, и по динамическому критерию, $P_{кр} = kl/2$.

Действительно, если $P < kl/2$, то $\omega > 0$ и система устойчива; если $P_{кр} = kl/2$, то $\omega = 0$ и система находится в безразличном состоянии; если $P > kl/2$, то $\omega^2 < 0$ и система неустойчива.

Как видим, все три метода дали одинаковый результат. Из них статический метод оказался наиболее простым и быстро приводящим к решению. Но его можно применять только для решения простейших задач расчета на устойчивость. Энергетический метод можно использовать для решения более сложных задач. Однако, так как приходится учитывать малые величины второго порядка, он сложен для расчета. Динамический метод также сложен для расчета, поскольку для этого необходимо составлять и решать уравнение движения системы.

4.4. Расчет прямых стержней на устойчивость

Рассмотрим прямой стержень, сжимаемый вдоль оси продольной силой P . При возрастании этой силы стержень может изогнуться, т.е. потерять устойчивость. Появление нового вида деформации – изгиба стержня – относится к потере устойчивости первого рода.

Расчет такого стержня на устойчивость будем вести статическим методом, используя **метод начальных параметров**. Этот метод позволяет вести расчет различным образом закрепленных по концам стержней по единой методике.

Метод начальных параметров базируется на использовании значений следующих четырех начальных параметров в начале координат $O(0, 0)$ принятой системы координат xOy :

$$y(0) = y_0 - \text{начальное перемещение,}$$

$$y'(0) = y'_0 - \text{начальный поворот,}$$

$$M(0) = M_0 - \text{начальный изгибающий момент,}$$

$$Q(0) = Q_0 - \text{начальная поперечная сила,}$$

которые позволяют определять напряженно-деформированное состояние стержня, т.е. величины его прогибов, углов поворота, изгибающих моментов и поперечных сил $y(x)$, $y'(x)$, $M(x)$, $Q(x)$ в произвольном сечении стержня x .

Эти начальные параметры зависят от условий закрепления стержня (граничных условий) по концам. Поэтому в начале расчета необходимо установить, как закреплен конкретный стержень. С этой целью рассматриваются статические и кинематические условия его закрепления.

Например, стержень на рис. 4.8 а шарнирно-оперт. Поэтому перемещения и моменты по его концам равны нулю. Тогда, с учетом системы координат, принятой на рисунке, можно написать

$$x = 0: \quad y(0) = 0, \quad M(0) = 0;$$

$$x = l: \quad y(l) = 0, \quad M(l) = 0.$$

Если у стержня защемлен левый конец, а правый свободен (рис. 4.8 б), имеем:

$$x = 0: \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0;$$

$$x = l: \quad Q(l) = 0, \quad M(l) = 0.$$

Когда концы стержня закреплены по-другому, можно записать соответствующие этим закреплениям граничные условия.

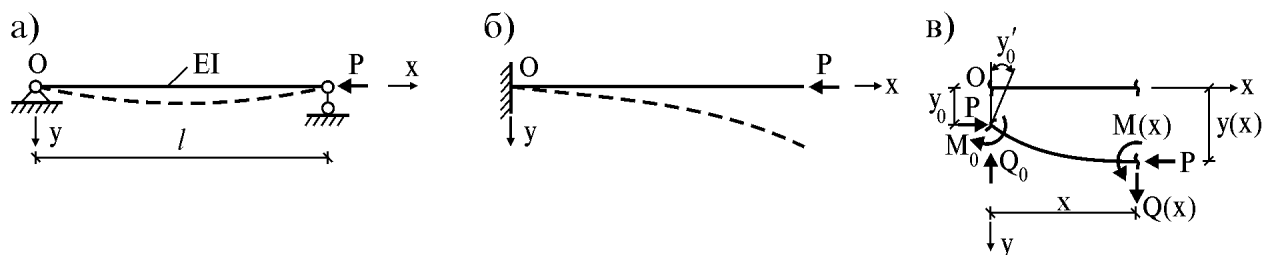


Рис. 4.8

С целью составления уравнений, пригодных для расчета любых прямых стержней с различными условиями закрепления на устойчивость, рассмотрим стержень длиной l и постоянной жесткости на изгиб EI , на которую действует продольная сжимающая сила P . Согласно статическому методу, дадим стержню малые отклонения, затем вырежем из него малый элемент длиной x (рис. 4.8 в) и рассмотрим его равновесие.

Начало координат выберем совпадающим с левым концом этого элемента. Пусть в начале координат (в точке $x=0$) известны начальные перемещения и усилия y_0 , y'_0 , M_0 , Q_0 , а в произвольном сечении x они будут $y(x)$, $y'(x)$, $M(x)$, $Q(x)$.

Воспользуемся тем, что известное нам дифференциальное уравнение изгиба стержня (3.84) определяет условие равновесия между внутренними и внешними силами и выполняется для любого сечения:

$$EI y'' = -M(x). \quad (4.6)$$

По рис. 4.8 в определим изгибающий момент в сечении x :

$$M(x) = M_0 + Q_0 x + P(y - y_0) \quad (4.7)$$

и подставим в (4.6). Тогда это уравнение можно привести к виду

$$y'' = -\frac{M_0 + Q_0 x + P(y - y_0)}{EI}. \quad (4.8)$$

Обозначим $\alpha^2 = \frac{P}{EI}$ и, извлекая из него корень, введем так называемый **параметр устойчивости**

$$\alpha = \sqrt{\frac{P}{EI}}. \quad (4.9)$$

Тогда уравнение (4.8) приводится к виду

$$y'' + \alpha^2 y = \frac{Py_0 - M_0 - Q_0 x}{EI}.$$

Это – дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Его решение равно сумме общего решения однородного и частного решения неоднородного уравнений и может быть записано так:

$$y = y_{од} + y_n = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x + y_0 - \frac{M_0 + Q_0 x}{\alpha^2 EI}. \quad (4.10)$$

Для определения A и B воспользуемся граничными условиями:

$$\text{при } x=0: y(0) = y_0, y'(0) = y'_0.$$

Если в (4.10) подставить $x=0$ и учесть первое из этих граничных условий, получаем выражение

$$y_0 = B + y_0 - \frac{M_0}{\alpha^2 EI}.$$

Из него определяется один из неизвестных коэффициентов:

$$B = \frac{M_0}{\alpha^2 EI}. \quad (4.11)$$

Для определения второго коэффициента продифференцируем (4.10):

$$y' = \alpha A \cos \alpha x - \alpha B \sin \alpha x - \frac{Q_0}{\alpha^2 EI}, \quad (4.12)$$

подставим в эту формулу $x=0$ и учтем второе граничное условие. Тогда получаем

$$y'_0 = \alpha A - \frac{Q_0}{\alpha^2 EI}.$$

Из него определяем

$$A = \frac{y'_0}{\alpha} + \frac{Q_0}{\alpha^3 EI}. \quad (4.13)$$

Теперь, если подставить найденные коэффициенты A и B в (4.10) и (4.12), получим две формулы для определения линейных и угловых перемещений стержня в произвольном сечении x :

$$y(x) = y_0 + \frac{\sin \alpha x}{\alpha} y'_0 + \frac{\cos \alpha x - 1}{\alpha^2 EI} M_0 + \frac{\sin \alpha x - \alpha x}{\alpha^3 EI} Q_0; \quad (4.14)$$

$$y'(x) = \cos \alpha x \cdot y'_0 - \frac{\sin \alpha x}{\alpha EI} M_0 + \frac{\cos \alpha x - 1}{\alpha^2 EI} Q_0. \quad (4.15)$$

Определим изгибающий момент. Для этого найдем производную из (4.15) и определим $y''(x)$, затем подставим его в формулу $M = -y''(x)EI$, полученную из (4.6). В итоге имеем

$$M(x) = EI \alpha \sin \alpha x \cdot y'_0 + \cos \alpha x M_0 + \frac{\sin \alpha x}{\alpha} Q_0. \quad (4.16)$$

Поперечную силу определим по формуле Журавского $Q = dM/dx$. В итоге получаем

$$Q(x) = EI \alpha^2 \cos \alpha x \cdot y'_0 - \alpha \sin \alpha x \cdot M_0 + \cos \alpha x \cdot Q_0. \quad (4.17)$$

Таким образом, получили четыре формулы (4.14)-(4.17), которые называются **уравнениями метода начальных параметров**. Они позволяют определять напряженно-деформируемое состояние (перемещения и усилия) сжатого продольной силой стержня через четыре начальных параметра y_0, y'_0, M_0, Q_0 . Их можно применять для расчета на устойчивость стержней, различным образом закрепленных по концам.

Покажем это на примере.

Пример 7. Найти критическую силу $P_{кр}$ для шарнирно-опертого стержня длиной l и жесткости на изгиб EI , представленного на рис. 4.8 а.

Решение. Для этого введем систему координат, указанную на рисунке, и воспользуемся установленными граничными условиями:

$$x = 0: y_0 = 0, M_0 = 0;$$

$$x = l: y(l) = 0, M(l) = 0.$$

Итак, два начальных параметра y_0 и M_0 определились сразу. Чтобы найти еще два начальных параметра, в формулы (4.14) и (4.16) подставим $x=l$ и учтем последние два граничных условия. Тогда получим два уравнения:

$$y(l) = \frac{\sin \alpha l}{\alpha} y'_0 + \frac{\sin \alpha l - \alpha l}{\alpha^3 EI} Q_0 = 0,$$

$$M(l) = EI \alpha \sin \alpha l y'_0 + \frac{\sin \alpha l}{\alpha} Q_0 = 0.$$

Если их рассмотреть вместе, получим систему однородных уравнений относительно неизвестных y'_0 и Q_0 . Такая система имеет два типа решения:

1) $y'_0 = Q_0 = 0$. Это простейшее (тривиальное) решение не может быть решением задачи, потому что в этом случае $y(x) \equiv 0$. Этот случай соответствует лишь моменту бифуркации положения устойчивости.

2) бесконечно большое число решений. Для этого определитель из коэффициентов системы уравнений, должен равняться нулю:

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\sin \alpha l}{\alpha} & \frac{\sin \alpha l - \alpha l}{\alpha^3 EI} \\ EI \alpha \sin \alpha l & \frac{\sin \alpha l}{\alpha} \end{bmatrix} = 0.$$

В дальнейшем уравнение, полученное из такого условия, будем называть **уравнением устойчивости** и записывать в виде

$$D = 0. \quad (4.18)$$

После раскрытия определителя получим

$$D = \sin \alpha l = 0.$$

Общее решение этого уравнения записывается в виде

$$\alpha l = k\pi, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (4.19)$$

Таким образом, уравнение устойчивости имеет бесчисленное число решений. Которое же из них выбрать? Для этого обратим внимание на параметр устойчивости (4.9), из которого следует

$$P = \alpha^2 EI. \quad (4.20)$$

Из статического критерия устойчивости (критерия Эйлера) следует, что критической должна быть минимальная сила, способная привести систему к потере устойчивости. Поэтому, чтобы сила P была минимальной, параметр устойчивости α должен принимать минимальное значение $\alpha_{кр}$. Из формулы (4.19) видно, что это возможно при $k = 1$. Тогда из (4.19) имеем

$$\alpha_{кр} = \frac{\pi}{l}.$$

Если подставить это решение в (4.20), получаем величину искомой критической силы:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2}{l^2} EI. \quad (4.21)$$

Исходя из решенного примера установим следующий **алгоритм метода начальных параметров**:

1. Ввести систему координат и записать граничные условия для точек

$x = 0$ и $x = l$.

2. Используя две из формул (4.14)-(4.17), записать граничные условия для точки $x = l$. Полученные уравнения будут однородными.

3. Объединить уравнения и составить уравнение устойчивости.

4. Раскрыть определитель, записать уравнение устойчивости в обычной форме.

5. Решить это уравнение и определить $\alpha_{кр}$.

6. Определить $P_{кр}$.

Этот алгоритм можно использовать для расчета различных прямых стержней на устойчивость при разных вариантах закрепления концов. Их расчеты рассматривать не будем, приведем только некоторые результаты.

Например, на рис. 4.9 показаны четыре стержня жесткости EI и длиной l , сжатых продольной силой P с различными закреплениями по концам, и приведены их примерные формы потери устойчивости. Рядом приводятся граничные условия и значения критических сил.

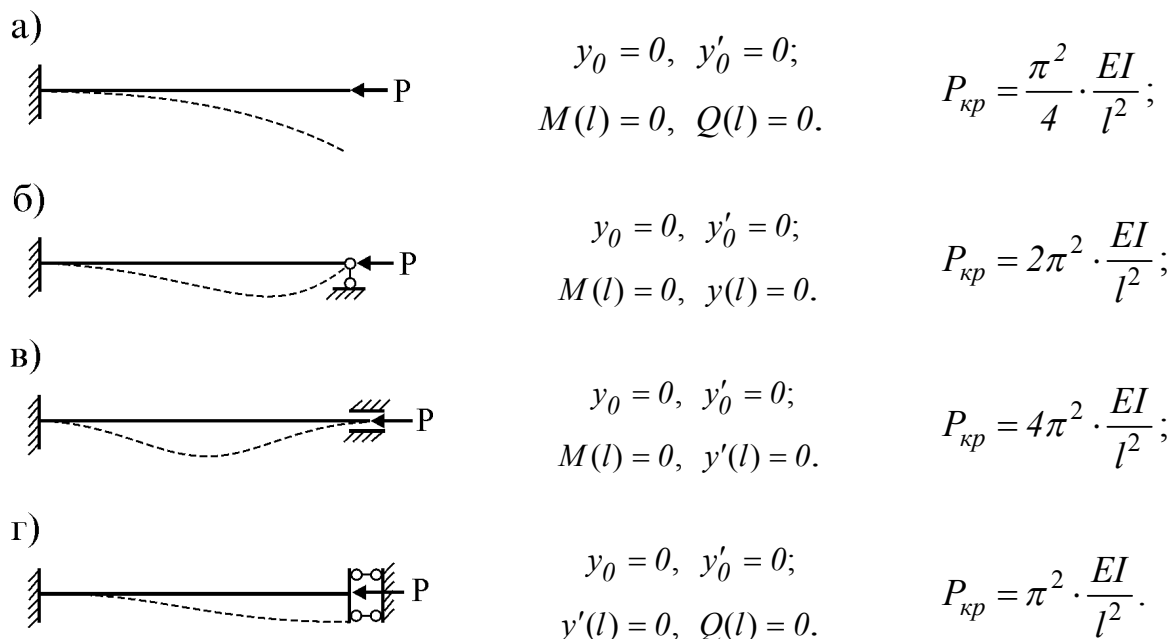


Рис. 4.9

Эти результаты показывают, что стержень со свободным концом (случай «а») воспринимает наименьшую нагрузку, и поэтому является самым неустойчивым. Поэтому в сооружении нецелесообразно использование консольных элементов. Если у стержня зацементированы оба конца (случай «в»), он воспринимает наибольшую (в четыре раза большую чем шарнирно-опертая балка) нагрузку. Поэтому для устойчивости сооружения швы по концам колонн, применяемых при строительстве, необходимо заливать бетоном (строительным раствором).

Критическая сила, определенная для шарнирно-опертой балки по формуле (4.21) обычно рассматривается как основной случай расчета

таких стержней. Тогда критические силы для всех остальных случаев можно выразить через (4.21) по следующей формуле, введенной Эйлером:

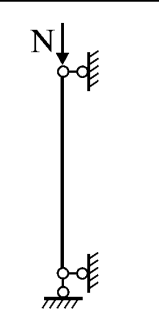

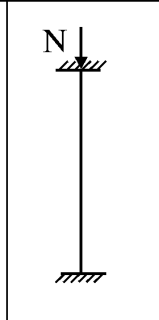
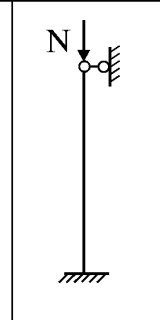
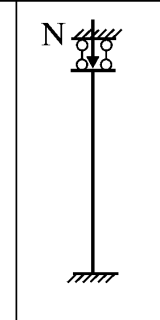
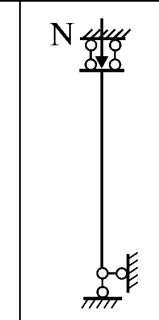
$$P_{кр} = \left(\frac{\pi}{\mu} \right)^2 \cdot \frac{EI}{l^2}. \quad (4.22)$$

Величина μ , введенная здесь, носит название **коэффициента приведения** (или **свободной**) **длины** и используется для приведения длины любой балки к основному случаю (т.е. к шарнирно-опертой балке).

Ниже в табл. 4.1 даны некоторые варианты закрепления концов стержней и соответствующие коэффициенты приведения их длин.

Таблица 4.1

Коэффициенты приведения длины сжато-изогнутых стержней

| | | | | | |
|--|--|--|--|---|--|
|  |  |  |  |  |  |
| $\mu=1$ | $\mu=2$ | $\mu=0,5$ | $\mu=0,7$ | $\mu=1$ | $\mu=2$ |

Для общности, в этой таблице буквой N обозначена сжимающая сила P , действующая на отдельный стержень и соответствующая ей продольная сжимающая сила, возникающая в некотором стержне стержневой системы под действием внешней нагрузки.

4.5. Расчет на устойчивость методом перемещений

4.5.1. Основные положения

Расчетные схемы большинства сооружений, в частности многопролетных и многоэтажных рам, являются статически неопределимыми. Для их расчета обычно используются методы сил и перемещений. Так как расчет рам на устойчивость методом сил вызывает значительные трудности, здесь рассмотрим лишь использование метода перемещений.

Как известно, основной задачей расчета рам является определение их напряженно-деформированного состояния и дальнейшая проверка условий прочности и жесткости. Но в некоторых случаях ограничиться только этим нельзя, поскольку в рамах могут возникать большие сжимающие усилия, приводящие к потере устойчивости сжатых элементов или всей рамы. Поэтому расчет рам на устойчивость является важной задачей.

К примеру, расчет рамы, изображенной на рис. 4.10 а, на внешнюю нагрузку показывает, что в ее стержнях возникают сжимающие усилия

(рис. 4.11 б). Если эти усилия будут большими, то могут привести к потере устойчивости как самих стержней, так и всей рамы. Поэтому становится очевидным необходимость проверки такой рамы на устойчивость. В некоторых случаях могут возникать задачи расчета на устойчивость при узловом воздействии нагрузки (рис. 4.10 г).

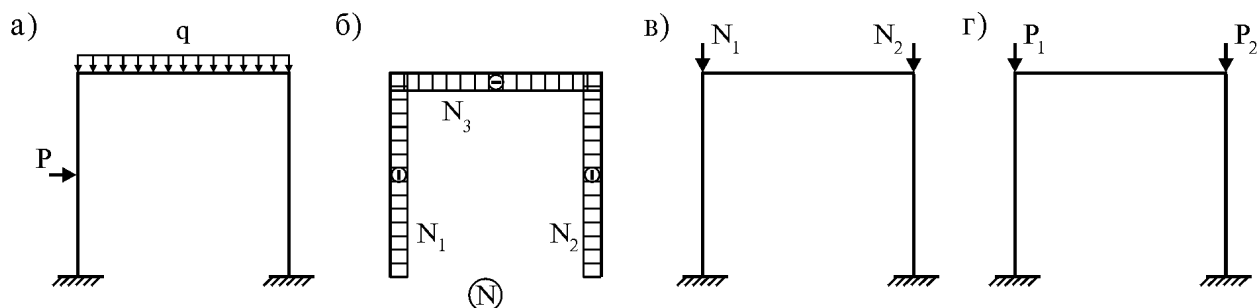


Рис. 4.10

Следует отметить, что задача расчета на устойчивость в указанной постановке ставится не совсем корректно, так как учитывает только потерю устойчивости первого рода. В действительности, в некоторых сечениях рамы материал может достигнуть предела текучести, и потому там может произойти потеря устойчивости второго рода. Но тем не менее, здесь мы будем рассматривать только упругую область работы материала и не будем касаться потери устойчивости второго рода.

Допустим, надо рассчитать раму на рис. 4.10 г. Если внешние силы будут меньше их критических значений, т.е. $P_1 < P_{1кр}$ и $P_2 < P_{2кр}$, рама устойчивость не потеряет. В этом случае возникают только продольные усилия, а изгибающие моменты и поперечные силы будут отсутствовать. Если же эти силы достигнут критических значений, т.е. $P_1 = P_{1кр}$ и $P_2 = P_{2кр}$, рама окажется в безразличном состоянии, когда выполняются условия равновесия. Однако, даже при задании небольших отклонений появятся моменты и поперечные силы, которые будут оказывать влияние на устойчивость рамы. Если же силы превысят их критических значений, т.е. $P_1 > P_{1кр}$ и $P_2 > P_{2кр}$, то рама однозначно потеряет устойчивость.

Для расчета статически неопределимых систем методом перемещений принимаются следующие гипотезы:

- силы прилагаются только в узлах;
- сжимающие силы действуют только по осям стержней;
- при потере устойчивости деформации остаются в упругой области;
- из-за малости деформаций расстояния между узлами не меняются.

Основываясь на этих гипотезах, расчет рам на устойчивость ведется по единой методике. При этом обычный алгоритм расчета на постоянную нагрузку методом перемещений существенно меняется. Этот алгоритм рассмотрим позже при решении конкретных задач.

4.5.2. Единичные состояния элементов основной системы

При рассмотрении различных единичных состояний элементов основной системы метода перемещений необходимо определять реакции и внутренние усилия в стержнях, подверженных воздействию осевых сжимающих сил. Эти задачи будем решать методом начальных параметров.

Пусть требуется определить опорные реакции и внутренние усилия защемленного с обоих концов стержня, один конец которого получает поворот на единичный угол (рис. 4.11).

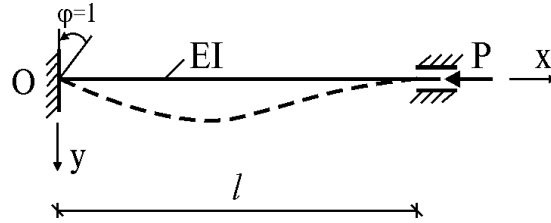


Рис. 4.11

В выбранной системе координат xOy определим граничные условия закрепления балки:

$$x = 0: y(0) = y_0 = 0, \quad y'(0) = y'_0 = \varphi = 1;$$

$$x = l: y(l) = 0, \quad y'(l) = 0.$$

Два начальных параметра определились сразу. Для определения еще двух параметров выберем соответствующие двум последним граничным условиям уравнения метода начальных параметров (4.14) и (4.15):

$$y(x) = y_0 + \frac{\sin \alpha x}{\alpha} y'_0 + \frac{\cos \alpha x - 1}{\alpha^2 EI} M_0 + \frac{\sin \alpha x - \alpha x}{\alpha^3 EI} Q_0;$$

$$y'(x) = \cos \alpha x \cdot y'_0 - \frac{\sin \alpha x}{\alpha EI} M_0 + \frac{\cos \alpha x - 1}{\alpha^2 EI} Q_0.$$

Если в них подставить известные $y_0 = 0$, $y'_0 = 1$, при $x = l$ получим

$$y(l) = \frac{\sin \alpha l}{\alpha} \cdot 1 + \frac{\cos \alpha l - 1}{\alpha^2 EI} M_0 + \frac{\sin \alpha l - \alpha l}{\alpha^3 EI} Q_0 = 0;$$

$$y'(l) = \cos \alpha l \cdot 1 - \frac{\sin \alpha l}{\alpha EI} M_0 + \frac{\cos \alpha l - 1}{\alpha^2 EI} Q_0 = 0.$$

Введем обозначение $v = \alpha l$. Тогда, с учетом (4.9), имеем

$$v = \alpha l = l \sqrt{\frac{N}{EI}}. \quad (4.23)$$

В дальнейшем эту величину будем называть **параметром устойчивости**. Попутно отметим, что между параметром устойчивости v и коэффициентом приведения длины μ существует простая зависимость

$$v = \frac{\pi}{\mu}. \quad (4.24)$$

Тогда предыдущие два уравнения запишутся как система уравнений

$$\begin{cases} \frac{\cos v - 1}{\alpha} M_0 + \frac{\sin v - v}{\alpha^2} Q_0 = -EI \sin v, \\ -\frac{\sin v}{\alpha} M_0 + \frac{\cos v - 1}{\alpha^2} Q_0 = -EI \cos v, \end{cases}$$

из решения которой определяются неизвестные параметры:

$$M_0 = \frac{EI}{2l} \cdot \frac{v(\operatorname{tg} v - v)}{\operatorname{tg} v \left(\operatorname{tg} \frac{v}{2} - \frac{v}{2} \right)} = 4 \frac{EI}{l} \cdot \frac{v(\operatorname{tg} v - v)}{8 \operatorname{tg} v \left(\operatorname{tg} \frac{v}{2} - \frac{v}{2} \right)} = 4 \frac{EI}{l} \cdot \varphi_1(v),$$

$$Q_0 = \frac{EI}{2l^2} \cdot \frac{v^2 \operatorname{tg} \frac{v}{2}}{\operatorname{tg} \frac{v}{2} - \frac{v}{2}} = 6 \frac{EI}{l^2} \cdot \frac{v^2 \operatorname{tg} \frac{v}{2}}{12 \left(\operatorname{tg} \frac{v}{2} - \frac{v}{2} \right)} = 6 \frac{EI}{l^2} \cdot \varphi_3(v).$$

Таким образом, определились момент и поперечная сила на левом конце стержня, в выражениях которых для упрощения записи использованы функции $\varphi_1(v)$, $\varphi_3(v)$. Следует обратить внимание на то, что перед этими функциями стоят коэффициенты, которые определяются в статике сооружений без учета влияния сжимающей силы. Поэтому можно считать, что функции $\varphi_1(v)$, $\varphi_3(v)$ учитывают особенность рассматриваемой задачи – влияние сжимающих сил на устойчивость стержня.

Теперь можно определить величину момента и на другом конце стержня. Для этого надо подставить в формулу (4.16) $x=l$, а затем найденные значения M_0 , Q_0 . Тогда получим

$$\begin{aligned} M(l) &= EI \alpha \sin \alpha l \cdot 1 + \cos \alpha l \cdot 4 \frac{EI}{l} \cdot \varphi_1(v) + \frac{\sin \alpha l}{\alpha} \cdot 6 \frac{EI}{l^2} \cdot \varphi_3(v) = \\ &= 2 \frac{EI}{l} \cdot \frac{v(v - \sin v)}{4 \sin v \left(\operatorname{tg} \frac{v}{2} - \frac{v}{2} \right)} = 2 \frac{EI}{l} \cdot \varphi_2(v). \end{aligned}$$

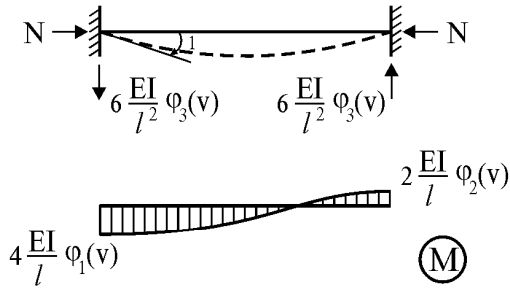
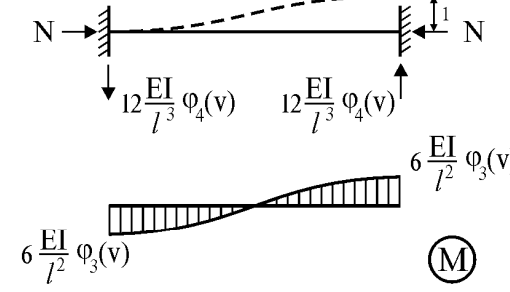
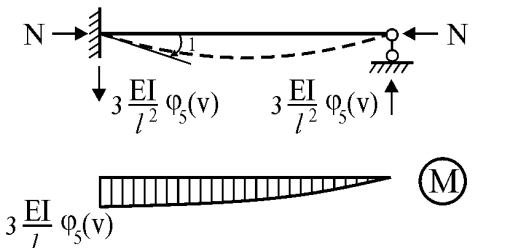
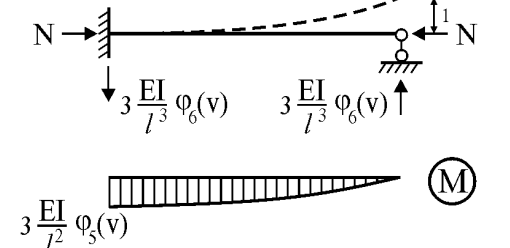
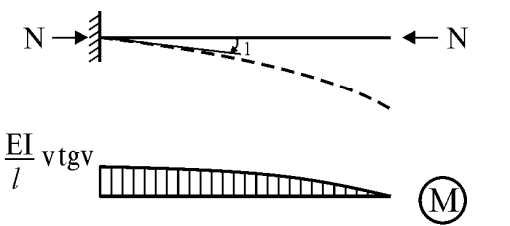
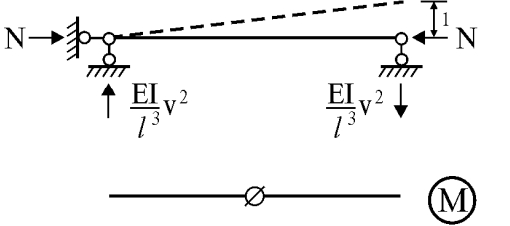
Таким же образом рассматриваются различные единичные состояния стержней с другими закреплениями по концам.

В табл. 4.2 даются результаты их расчета. В отличие от обычной таблицы метода перемещений, получаемой в статике сооружений, эту таблицу называют специальной таблицей метода перемещений. В ней используются шесть функций, две из которых были определены выше:

$$\begin{aligned} \varphi_1(v) &= \frac{v(\operatorname{tg} v - v)}{8 \operatorname{tg} v \left(\operatorname{tg} \frac{v}{2} - \frac{v}{2} \right)}; & \varphi_2(v) &= \frac{v(v - \sin v)}{4 \sin v \left(\operatorname{tg} \frac{v}{2} - \frac{v}{2} \right)}; & \varphi_3(v) &= \frac{v^2 \operatorname{tg} \frac{v}{2}}{12 \left(\operatorname{tg} \frac{v}{2} - \frac{v}{2} \right)}; \\ \varphi_4(v) &= \frac{v^3}{24 \left(\operatorname{tg} \frac{v}{2} - \frac{v}{2} \right)}; & \varphi_5(v) &= \frac{v^2 \operatorname{tg} v}{3(\operatorname{tg} v - v)}; & \varphi_6(v) &= \frac{v^3}{3(\operatorname{tg} v - v)}. \end{aligned}$$

Таблица 4.2

Реакции сжато-изогнутых стержней от единичных перемещений
(специальная таблица метода перемещений)

| | |
|--|--|
|  |  |
|  |  |
|  |  |
| <p>l – длина стержня, $v = \alpha l = l \sqrt{\frac{N}{EI}}$ – параметр устойчивости, N – продольная сила</p> | |

Как видим, получаются достаточно сложные функции. Для упрощения расчетов эти функции подсчитываются отдельно (см. табл. 4.3).

Таблица 4.3

Значения специальных функций

| v | $\varphi_1(v)$ | $\varphi_2(v)$ | $\varphi_3(v)$ | $\varphi_4(v)$ | $\varphi_5(v)$ | $\varphi_6(v)$ |
|-----|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 0,0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0,1 | 0,9997 | 1,0002 | 0,9998 | 0,9990 | 0,9993 | 0,9960 |
| 0,2 | 0,9987 | 1,0007 | 0,9993 | 0,9960 | 0,9973 | 0,9840 |
| 0,3 | 0,9970 | 1,0015 | 0,9985 | 0,9910 | 0,9940 | 0,9640 |
| 0,4 | 0,9947 | 1,0027 | 0,9973 | 0,9840 | 0,9893 | 0,9360 |
| 0,5 | 0,9916 | 1,0042 | 0,9958 | 0,9750 | 0,9832 | 0,8999 |
| 0,6 | 0,9879 | 1,0061 | 0,9940 | 0,9640 | 0,9757 | 0,8557 |
| 0,7 | 0,9836 | 1,0083 | 0,9918 | 0,9510 | 0,9669 | 0,8035 |
| 0,8 | 0,9785 | 1,0109 | 0,9893 | 0,9360 | 0,9565 | 0,7432 |
| 0,9 | 0,9727 | 1,0138 | 0,9864 | 0,9189 | 0,9447 | 0,6747 |
| 1,0 | 0,9662 | 1,0172 | 0,9832 | 0,8999 | 0,9313 | 0,5980 |
| 1,1 | 0,9590 | 1,0209 | 0,9797 | 0,8788 | 0,9164 | 0,5131 |
| 1,2 | 0,9511 | 1,0251 | 0,9757 | 0,8557 | 0,8998 | 0,4198 |

(Продолжение таблицы 4.3)

| ν | $\varphi_1(\nu)$ | $\varphi_2(\nu)$ | $\varphi_3(\nu)$ | $\varphi_4(\nu)$ | $\varphi_5(\nu)$ | $\varphi_6(\nu)$ |
|-----------------------|------------------|------------------|------------------|------------------|-------------------|-------------------|
| 1,3 | 0,9424 | 1,0297 | 0,9715 | 0,8307 | 0,8814 | 0,3181 |
| 1,4 | 0,9329 | 1,0348 | 0,9669 | 0,8035 | 0,8613 | 0,2080 |
| 1,5 | 0,9227 | 1,0403 | 0,9619 | 0,7744 | 0,8393 | 0,0893 |
| $\pi/2 \approx 1,57$ | 0,9149 | 1,0445 | 0,9581 | 0,7525 | 0,8225 | 0 |
| 1,6 | 0,9116 | 1,0463 | 0,9565 | 0,7432 | 0,8152 | -0,0381 |
| 1,7 | 0,8998 | 1,0529 | 0,9508 | 0,7100 | 0,7891 | -0,1743 |
| 1,8 | 0,8871 | 1,0600 | 0,9447 | 0,6747 | 0,7606 | -0,3194 |
| 1,9 | 0,8735 | 1,0676 | 0,9382 | 0,6374 | 0,7297 | -0,4736 |
| 2,0 | 0,8590 | 1,0760 | 0,9313 | 0,5980 | 0,6961 | -0,6372 |
| 2,1 | 0,8436 | 1,0849 | 0,9241 | 0,5566 | 0,6597 | -0,8103 |
| 2,2 | 0,8273 | 1,0946 | 0,9164 | 0,5131 | 0,6202 | -0,9931 |
| 2,3 | 0,8099 | 1,1051 | 0,9083 | 0,4675 | 0,5772 | -1,1861 |
| 2,4 | 0,7915 | 1,1164 | 0,8998 | 0,4198 | 0,5304 | -1,3896 |
| 2,5 | 0,7720 | 1,1286 | 0,8908 | 0,3700 | 0,4793 | -1,6040 |
| 2,6 | 0,7513 | 1,1417 | 0,8814 | 0,3181 | 0,4234 | -1,8299 |
| 2,7 | 0,7295 | 1,1559 | 0,8716 | 0,2641 | 0,3621 | -2,0679 |
| 2,8 | 0,7064 | 1,1712 | 0,8613 | 0,2080 | 0,2944 | -2,3189 |
| 2,9 | 0,6819 | 1,1878 | 0,8505 | 0,1497 | 0,2195 | -2,5838 |
| 3,0 | 0,6560 | 1,2057 | 0,8393 | 0,0893 | 0,1361 | -2,8639 |
| 3,1 | 0,6287 | 1,2251 | 0,8275 | 0,0267 | 0,0424 | -3,1609 |
| $\pi \approx 3,14$ | 0,6168 | 1,2337 | 0,8225 | 0 | 0 | -3,2899 |
| 3,2 | 0,5997 | 1,2462 | 0,8152 | -0,0381 | -0,0635 | -3,4769 |
| 3,3 | 0,5691 | 1,2691 | 0,8024 | -0,1051 | -0,1847 | -3,8147 |
| 3,4 | 0,5366 | 1,2940 | 0,7891 | -0,1743 | -0,3248 | -4,1781 |
| 3,5 | 0,5021 | 1,3212 | 0,7751 | -0,2457 | -0,4894 | -4,5727 |
| 3,6 | 0,4655 | 1,3509 | 0,7606 | -0,3194 | -0,6862 | -5,0062 |
| 3,7 | 0,4265 | 1,3834 | 0,7455 | -0,3954 | -0,9270 | -5,4904 |
| 3,8 | 0,3850 | 1,4191 | 0,7297 | -0,4736 | -1,2303 | -6,0436 |
| 3,9 | 0,3407 | 1,4584 | 0,7133 | -0,5542 | -1,6269 | -6,6969 |
| 4,0 | 0,2933 | 1,5019 | 0,6961 | -0,6372 | -2,1726 | -7,5060 |
| 4,1 | 0,2424 | 1,5501 | 0,6783 | -0,7225 | -2,9802 | -8,5836 |
| 4,2 | 0,1878 | 1,6037 | 0,6597 | -0,8103 | -4,3156 | -10,196 |
| 4,3 | 0,1287 | 1,6636 | 0,6404 | -0,9005 | -6,9947 | -13,158 |
| 4,4 | 0,0648 | 1,7310 | 0,6202 | -0,9931 | -15,327 | -21,780 |
| 4,4934 | 0,0000 | 1,8017 | 0,6006 | -1,0820 | $-\infty/+\infty$ | $-\infty/+\infty$ |
| 4,5 | -0,0048 | 1,8070 | 0,5991 | -1,0884 | 227,93 | 221,18 |
| 4,6 | -0,0809 | 1,8933 | 0,5772 | -1,1861 | 14,669 | 7,6160 |
| 4,7 | -0,1645 | 1,9920 | 0,5543 | -1,2865 | 7,8186 | 0,4553 |
| $3\pi/2 \approx 4,71$ | -0,1755 | 2,0051 | 0,5514 | -1,2991 | 7,4038 | 0 |
| 4,8 | -0,2572 | 2,1056 | 0,5304 | -1,3896 | 5,4023 | -2,2777 |
| 4,9 | -0,3607 | 2,2375 | 0,5054 | -1,4954 | 4,1463 | -3,8570 |
| 5,0 | -0,4772 | 2,3923 | 0,4793 | -1,6040 | 3,3615 | -4,9719 |
| 5,1 | -0,6099 | 2,5757 | 0,4520 | -1,7155 | 2,8130 | -5,8570 |
| 5,2 | -0,7629 | 2,7960 | 0,4234 | -1,8299 | 2,3986 | -6,6147 |
| 5,3 | -0,9422 | 3,0648 | 0,3935 | -1,9474 | 2,0668 | -7,2965 |
| 5,4 | -1,1563 | 3,3989 | 0,3621 | -2,0679 | 1,7884 | -7,9316 |
| 5,5 | -1,4182 | 3,8236 | 0,3291 | -2,1917 | 1,5455 | -8,5379 |
| 5,6 | -1,7481 | 4,3794 | 0,2944 | -2,3189 | 1,3266 | -9,1268 |
| 5,7 | -2,1803 | 5,1346 | 0,2580 | -2,4495 | 1,1235 | -9,7065 |
| 5,8 | -2,7777 | 6,2139 | 0,2195 | -2,5838 | 0,9302 | -10,283 |
| 5,9 | -3,6679 | 7,8727 | 0,1790 | -2,7219 | 0,7421 | -10,861 |
| 6,0 | -5,1594 | 10,727 | 0,1361 | -2,8639 | 0,5551 | -11,444 |
| 6,1 | -8,2336 | 16,739 | 0,0907 | -3,0102 | 0,3656 | -12,037 |
| 6,2 | -18,590 | 37,308 | 0,0424 | -3,1609 | 0,1700 | -12,643 |
| $2\pi \approx 6,28$ | $-\infty$ | $+\infty$ | 0 | -3,2899 | 0 | -13,159 |

4.5.3. Примеры решения задач

Для пояснения алгоритма и порядка расчета рам на устойчивость рассмотрим два примера.

Пример 8. На одноэтажную раму действует сосредоточенная сила P , направленная вдоль оси одной из стоек (рис. 4.12 а). Определить критическую величину этой силы $P_{кр}$.

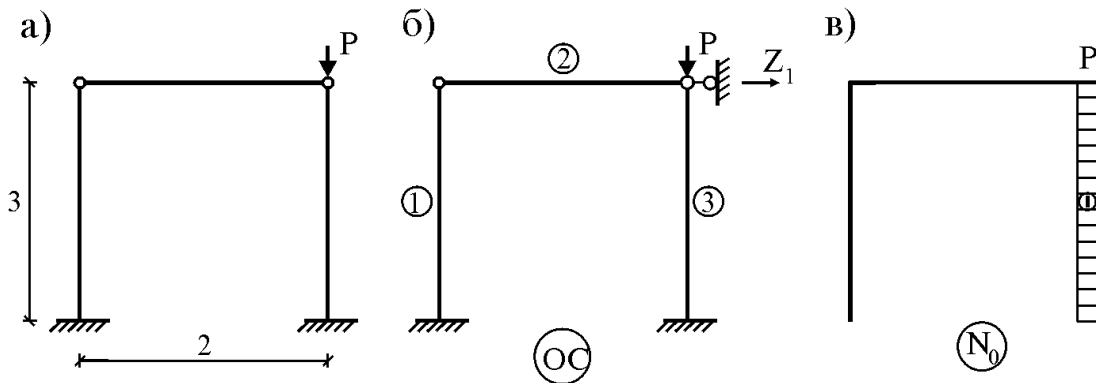


Рис. 4.12

Решение.

1. Определяем число неизвестных по методу перемещений:

$$n = n_y + n_n = 0 + 1 = 1.$$

2. Выбираем основную систему (рис. 4.12 б).

3. Строим эпюру продольных сил N_0 в основной системе (рис. 4.12 в).

4. Определяем параметры устойчивости стержней:

$$v_1 = v_2 = 0, \quad v_3 = 3\sqrt{\frac{P}{EI}}.$$

5. Каноническое уравнение будет

$$r_{11}Z_1 = 0$$

(так как внешняя нагрузка до момента потери устойчивости не вызывает изгиба элементов, то $R_{1P} = 0$).

6. Рассмотрим единичное состояние основной системы (рис. 4.13 а).

7. В единичном состоянии строим эпюру изгибающих моментов.

При этом надо помнить следующее: в стержне 3 в основной системе имеется сжимающее усилие (рис. 4.12 в), поэтому при построении эпюры изгибающих моментов в этом стержне надо пользоваться специальной таблицей метода перемещений (табл. 4.2), а в стержнях 1 и 2 сжимающие силы отсутствуют, поэтому при построении эпюр моментов в этих стержнях надо использовать обычную таблицу метода перемещений. Тогда эпюра моментов для стержня 3 будет криволинейной, а для стержня 1 будет прямолинейной (рис. 4.13 б). Следует отметить, что при решении данной задачи построение этой эпюры не обязательно.

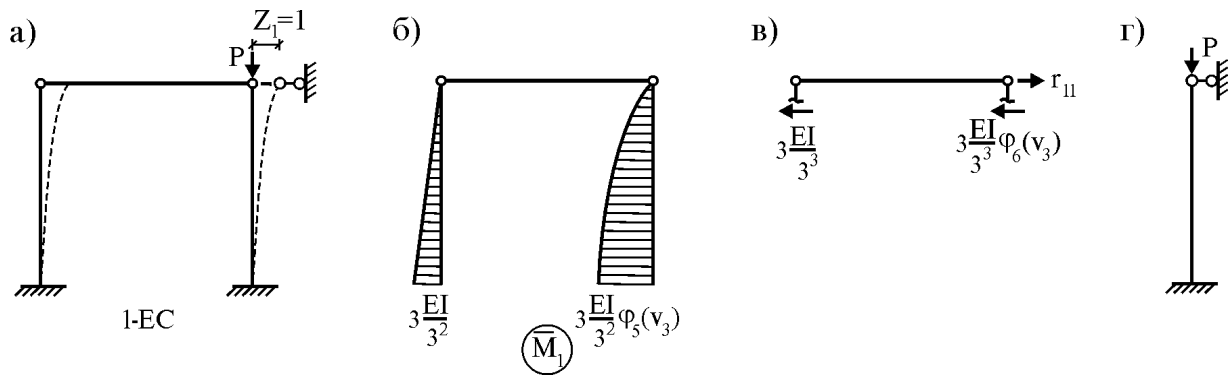


Рис. 4.13

8. По рис. 4.13 в определяем коэффициент канонического уравнения:

$$r_{11} = \frac{EI}{3^3} + \frac{EI}{3^3} \varphi_5(v_3).$$

9. Каноническое уравнение $r_{11}Z_1 = 0$ имеет два решения:

$$1) r_{11} = 0, \quad 2) Z_1 = 0.$$

Согласно основной системе (рис. 4.12 б), второе решение соответствует закреплению верхнего конца 3-го стержня в горизонтальном направлении. Поэтому этот стержень, подвергнутый воздействию сжимающей силы P , можно рассматривать отдельно (рис. 4.13 г).

Такие задачи решены теоретически, результаты их расчета приведены в табл. 4.1. Нашему случаю соответствует 4-ая схема этой таблицы, из которой определяем коэффициент приведения длины стержня $\mu = 0,7$. Тогда

$$v_3 = \frac{\pi}{\mu} = \frac{3,14}{0,7} = 4,49.$$

Если рассматривать первое решение, то

$$r_{11} = \frac{EI}{3^3} + \frac{EI}{3^3} \varphi_5(v_3) = 0.$$

Из него получаем уравнение $1 + \varphi_5(v_3) = 0$ или $\varphi_5(v_3) = -1$.

Тогда, используя табл. 4.3, определяем корень уравнения $v_3 = 2,2$.

Итак, получили два решения: 1) $v_3 = 4,49$, 2) $v_3 = 2,2$. По критерию Эйлера, критической является наименьшая из них. Поэтому $v_{кр} = 2,2$.

10. Определяем величину критической силы и коэффициент приведения длины стержня. Принимая

$$v_3 = v_{кр} = 3 \sqrt{\frac{P_{кр}}{EI}},$$

получаем

$$P_{кр} = \frac{v_{кр}^2}{3^2} EI = \frac{2,2^2}{3^2} EI = 0,54 EI, \quad \mu = \frac{\pi}{v_{кр}} = \frac{3,14}{2,2} = 1,43.$$

Из данного примера видно, что уравнение $Z_1 = 0$ дает завышенное значение параметра устойчивости стержня (а значит и критической силы). При решении и других задач получаются аналогичные результаты. Поэтому решения типа $Z_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots$) обычно не рассматриваются.

Пример 9. Провести расчет рамы, представленной на рис. 4.14 а, на устойчивость.

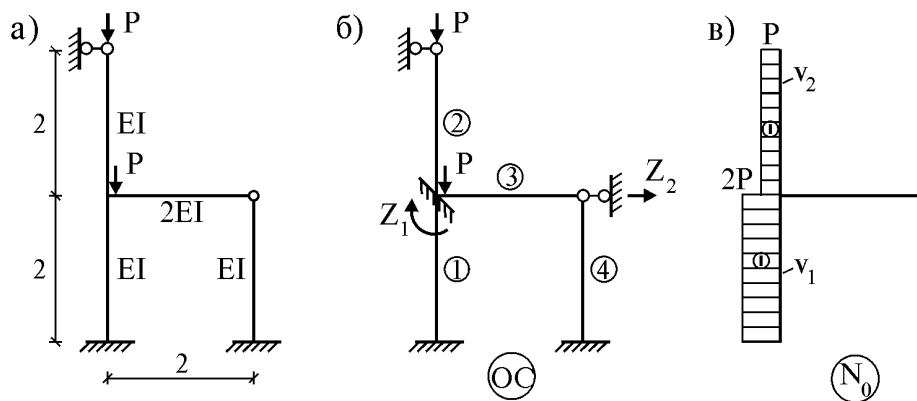


Рис. 4.14

Решение.

1. Определяем число неизвестных:

$$n = n_y + n_d = 1 + 1 = 2.$$

2. Выбираем основную систему (ОС). Она получается введением двух условных связей – заделки и опоры (рис. 4.14 б).

3. Строим эпюру продольных сил N_0 в основной системе (рис. 4.14 в). В ней имеются два стержня, где возникают сжимающие усилия.

4. Параметры устойчивости стержней рамы будут:

$$v_1 = 2\sqrt{\frac{2P}{EI}}, \quad v_2 = 2\sqrt{\frac{P}{EI}}, \quad v_3 = v_4 = 0.$$

Наибольший из них соответствует 1-му стержню. Примем его за основной параметр устойчивости и обозначим

$$v_1 = 2\sqrt{\frac{2P}{EI}} = v.$$

Тогда

$$\frac{v_2}{v} = 2\sqrt{\frac{P}{EI}} : 2\sqrt{\frac{2P}{EI}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7.$$

Значит, $v_2 = 0,7v$.

5. Запишем систему канонических уравнений метода перемещений, в которых $R_{1P} = R_{2P} = 0$:

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 = 0, \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 = 0. \end{cases}$$

Такая однородная система уравнений имеет два решения:

$$1) D = \det \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix} = 0, \quad 2) Z_1 = Z_2 = 0.$$

Второе решение, как дающее завышенное значение критического корня, рассматривать не будем. А первое решение с учетом $r_{12} = r_{21}$ и после раскрытия определителя принимает вид

$$D(v) = r_{11}r_{22} - r_{12}^2 = 0.$$

Это и есть уравнение устойчивости.

6. Рассмотрим два единичных состояния основной системы, в которых обозначены деформации элементов и реактивные усилия (рис. 4.15 а, б):

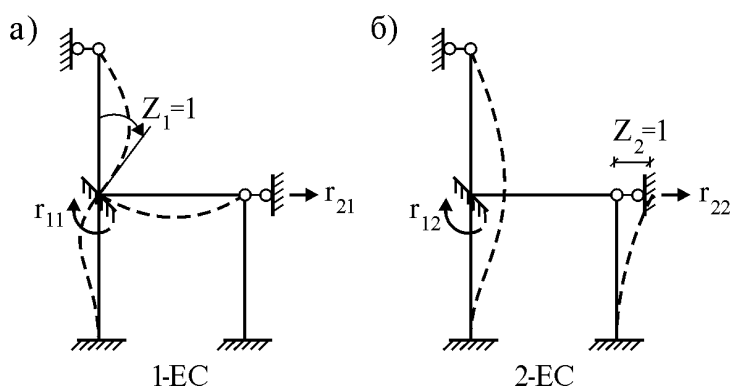


Рис. 4.15

7. Используя таблицы метода перемещений, в обоих состояниях строим эпюры изгибающих моментов (рис. 4.16 а, б).

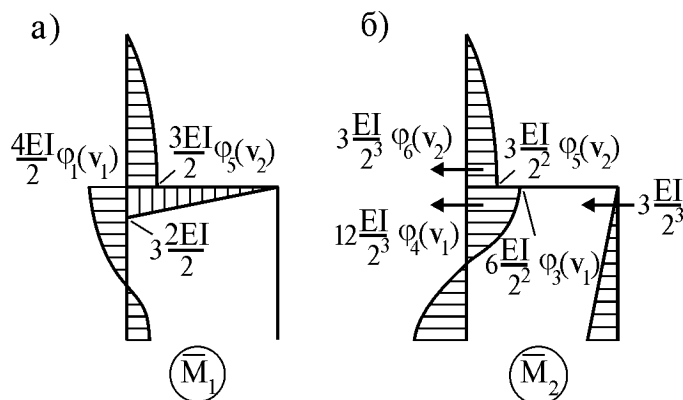


Рис. 4.16

При этом при построении эпюр в стержнях 1 и 2 (в них учитывается сжатие) основной системы используем специальную таблицу метода перемещений (табл. 4.2), а при построении эпюр в стержнях 3 и 4 (где сжимающие силы отсутствуют) используем обычную таблицу метода перемещений. Поэтому эпюры моментов для стержней 1 и 2 будут криволинейными, а для стержней 3 и 4 – прямолинейными.

8. Коэффициенты системы канонических уравнений определяем согласно единичным состояниям (рис. 4.15) и по рис. 4.16:

$$r_{11} = 4 \frac{EI}{2} \varphi_1(v_1) + 3 \frac{EI}{2} \varphi_5(v_2) + 3 \frac{2EI}{2} = EI [2 \varphi_1(v_1) + 1,5 \varphi_5(v_2) + 3];$$

$$r_{12} = -6 \frac{EI}{2^2} \varphi_3(v_1) + 3 \frac{EI}{2^2} \varphi_5(v_2) = EI [-1,5 \varphi_3(v_1) + 0,75 \varphi_5(v_2)];$$

$$r_{22} = 12 \frac{EI}{2^3} \varphi_4(v_1) + 3 \frac{EI}{2^3} \varphi_6(v_2) + 3 \frac{EI}{2^3} = EI [1,5 \varphi_4(v_1) + 0,375 \varphi_6(v_2) + 0,375].$$

9. Решаем уравнение устойчивости. Для этого подставим найденные коэффициенты в уравнение устойчивости и сократим его на EI . Получим трансцендентное уравнение (уравнение с бесконечным числом корней). С целью определения наименьшего положительного корня этого уравнения вначале определим интервал, в котором этот корень находится. Для этого проведем следующие рассуждения:

1) уравнение устойчивости зависит от параметра устойчивости 1-го стержня рамы $v_1 = v$, поэтому исследуем поведение этого стержня;

2) в состоянии “малой жесткости” рамы, когда изгибные жесткости всех стержней (кроме 1-го) равны нулю (рис. 4.17 а), стержень 1 можно рассматривать отдельно как показано на рис. 4.17 б. В этом случае по

табл. 4.1 имеем $\mu = 2$. Тогда $v = \frac{\pi}{\mu} = \frac{3,14}{2} = 1,57$;

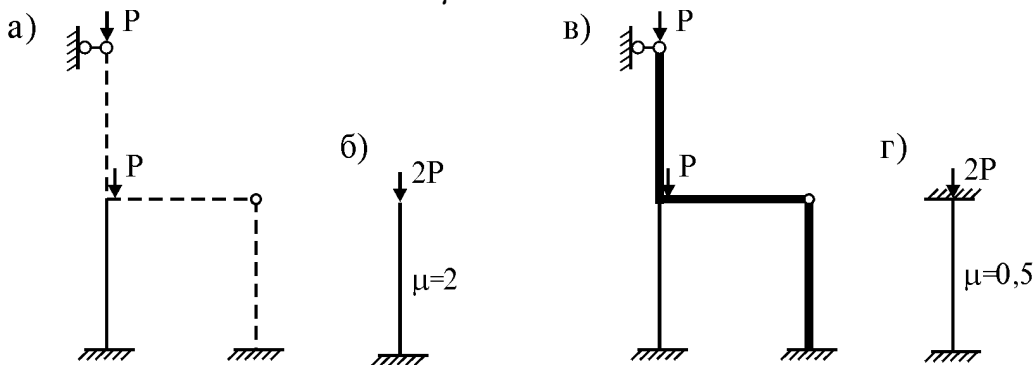


Рис. 4.17

3) в состоянии “большой жесткости”, когда изгибные жесткости всех стержней (кроме 1-го) равны бесконечности (рис. 4.17 в), стержень 1 можно рассматривать отдельно как показано на рис. 4.17 г. По табл. 4.1

принимая . Тогда, $v = \frac{\pi}{\mu} = \frac{3,14}{0,5} = 6,28$;

4) в действительности жесткость 1-го стержня находится в интервале от нуля до бесконечности. Поэтому искомый корень уравнения устойчивости должен находиться между найденными крайними значениями, т.е.

$$1,57 < v_{кр} < 6,28.$$

Теперь уточним его. Это удобно проводить в следующей табличной форме (значения специальных функций берутся из табл. 4.3):

| v_1 $= v$ | $v_2 =$ $0,7v$ | $\varphi_1(v_1)$ | $\varphi_5(v_2)$ | $r_{11} =$ $2\varphi_1(v_1) +$ $1,5\varphi_5(v_2)$ $+3$ | $\varphi_3(v_1)$ | $r_{12} =$ $-1,5\varphi_3(v_1)$ $+0,75\varphi_5(v_2)$ | $\varphi_4(v_1)$ | $\varphi_6(v_2)$ | $r_{22} =$ $1,5\varphi_4(v_1) +$ $0,375\varphi_6(v_2)$ $+0,375$ | $D =$ $r_{11}r_{22}$ $-r_{12}^2$ |
|----------------|-------------------|------------------|------------------|--|------------------|---|------------------|------------------|--|--|
| 3,0 | 2,1 | 0,656 | 0,660 | 5,301 | 0,839 | -0,764 | 0,089 | -0,810 | 0,205 | 0,503 |
| 4,0 | 2,8 | 0,293 | 0,294 | 4,028 | 0,696 | -0,823 | -0,637 | -2,319 | -1,450 | -6,520 |
| 3,2 | 2,2 | 0,599 | 0,620 | 5,130 | 0,815 | -0,758 | -0,038 | -0,993 | -0,055 | -0,854 |
| 3,1 | 2,2 | 0,629 | 0,620 | 5,188 | 0,828 | -0,776 | 0,027 | -0,993 | 0,043 | -0,380 |

При заполнении этой таблицы в найденном интервале определяются точки, между которыми функция $D = r_{11}r_{22} - r_{12}^2$ меняет свой знак. Так, при $v = 3,0$ имеем $D = 0,503 > 0$, при $v = 4,0$ $D = -6,520 < 0$. Значит, критический корень лежит между 3,0 и 4,0. Далее сужаем интервал и видим, что корень лежит в интервале $3,0 < v_{кр} < 3,1$ (рис. 4.18 а). Затем проводим интерполяцию (рис. 4.18 б) и принимаем $v_{кр} = 3,06$.

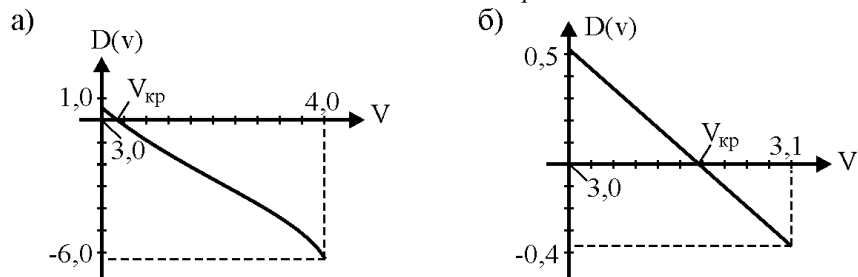


Рис. 4.18

10. Определяем критические силы и приведенные длины стержней:

$$P_{1,кр} = \frac{v_{1,кр}^2}{l_1^2} EI_1 = \frac{3,06^2}{2^2} EI = 2,34 EI, \quad \mu_1 = \frac{\pi}{v_1} = \frac{3,14}{3,1} = 1,03.$$

$$P_{2,кр} = \frac{v_{2,кр}^2}{l_2^2} EI_1 = \frac{(0,7 \cdot 3,06)^2}{2^2} EI = 1,147 EI, \quad \mu_2 = \frac{\pi}{v_2} = \frac{3,14}{0,7 \cdot 3,06} = \frac{3,14}{2,17} = 1,47.$$

ВОПРОСЫ

1. Какие проблемы решает устойчивость сооружений?
2. Какие виды потери устойчивости знаете?
3. В чем состоит основная задача расчета на устойчивость?
4. Какие методы используются в расчетах на устойчивость?
5. Какие критерии используются при определении критической силы?
6. Каковы алгоритмы статического, энергетического и динамического методов?
7. Как составляются уравнения метода начальных параметров?
8. Как определяется уравнение устойчивости?
9. Чему равны критические силы и приведенные длины сжатых стержней с различными закреплениями по концам?
10. Какие гипотезы используются при расчете рам на устойчивость?
11. В чем состоит порядок расчета рамы на устойчивость?
12. Как определяются границы критического корня?

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабаков И.М. Теория колебаний. – М.: Наука, 1965. – 560 с.
2. Безухов Н.И., Лужин О.В., Колкунов Н.В. Устойчивость и динамика сооружений в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 1987. – 264 с.
3. Васильков Г.В., Буйко З.В. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений: Учебное пособие. – СПб.: Лань, 2013. – 256 с.
4. Динамический расчет специальных инженерных сооружений и конструкций. Справочник проектировщика. – М.: Стройиздат, 1986. – 461 с.
5. Динамический расчет зданий и сооружений. Справочник проектировщика / Под ред. Б.Г. Коренева, И.М. Рабиновича. – М.: Стройиздат, 1984.
6. Киселев В.А. Строительная механика: Спец. курс. Динамика и устойчивость сооружений: Учебник для вузов. 3-е изд. – М.: Стройиздат, 1980. – 616 с.
7. Клаф Р., Пензиен Дж. Динамика сооружений. – М.: Стройиздат, 1979. – 319 с.
8. Леонтьев Н.Н., Соболев Д.Н., Амосов А.А. Основы строительной механики стержневых систем. – М.: АСВ, 1996. – 541 с.
9. Поляков С.В. Сейсмостойкие конструкции зданий. – М.: Высш. шк., 1983. – 304 с.
10. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в 3-х томах / Под ред. И.А. Биргера и Я.Г. Пановко. – М.: Машиностроение, 1968.
11. Раевский А.Н. Основы расчета сооружений на устойчивость. – М.: Высш. шк., 1962. – 158 с.
12. Ржаницын А.Р. Строительная механика. – М.: Высш. шк., 1982. – 400 с.
13. Саргсян А.Е., Дворянчиков Н.В., Джинчвелашвили Г.А. Строительная механика. Основы теории с примерами расчетов. – М.: АСВ, 1998. – 320 с.
14. Смирнов А.Ф., Александров А.В., Лащеников Б.Я., Шапошников Н.Н. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений. Учебник для вузов. – М.: Стройиздат, 1984. – 416 с.
15. Справочник по динамике сооружений / Под ред. Б.Г. Коренева и И.М. Рабиновича. – М.: Стройиздат, 1972. – 500 с.
16. Строительные нормы и правила. Ч. 2. Гл. 7. Строительство в сейсмических районах. СНиП II-7-81. – М.: Госстрой России, 2000.
17. Строительные нормы и правила. Мосты и трубы. СНиП 3.06.04-91. – М.: Минстрой России, 1992.
18. Шакирзянов Р.А. Основы динамического расчета сооружений: Учебное пособие. – Казань: КИСИ, 1994. – 84 с.
19. Шакирзянов Р.А. Строительная механика: Учебник для вузов (на татарском языке). – Казань: Магариф, 2008. – 383 с.
20. Шакирзянов Р.А., Шакирзянов Ф.Р. Курс лекций по строительной механике: Учебное пособие. – Казань: Изд-во КГАСУ, 2014. – 143 с.

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|---|----|
| Введение | 3 |
| Глава 1. Введение в динамику сооружений | 4 |
| 1.1. Колебания вокруг нас | 4 |
| 1.2. Предмет и задачи динамики сооружений | 5 |
| 1.3. Сооружение как колебательная система | 6 |
| 1.4. Виды динамических нагрузок | 8 |
| 1.5. Основные виды и характеристики колебаний | 10 |
| 1.6. Степени свободы и расчетная модель колебательной системы | 12 |
| 1.7. Динамические характеристики строительных материалов | 15 |
| 1.7.1. <i>Динамическая жесткость</i> | 15 |
| 1.7.2. <i>Внутреннее трение</i> | 16 |
| 1.7.3. <i>Выносливость</i> | 17 |
| 1.8. Воздействие колебаний на человека | 18 |
| 1.9. Методы динамики сооружений | 20 |
| 1.9.1. <i>Кинестатический метод</i> | 20 |
| 1.9.2. <i>Кинематический метод</i> | 21 |
| 1.9.3. <i>Использование принципа Гамильтона</i> | 21 |
| 1.9.4. <i>Энергетический метод</i> | 22 |
| Глава 2. Колебания систем с одной степенью свободы | 23 |
| 2.1. Вывод уравнения движения | 23 |
| 2.2. Собственные колебания | 24 |
| 2.3. Свободные колебания | 29 |
| 2.3.1. <i>Малое демпфирование</i> | 30 |
| 2.3.2. <i>Критическое демпфирование</i> | 32 |
| 2.3.3. <i>Большое демпфирование</i> | 32 |
| 2.4. Вынужденные колебания без демпфирования | 33 |
| 2.4.1. <i>Действие мгновенного импульса</i> | 33 |
| 2.4.2. <i>Действие системы импульсов</i> | 34 |
| 2.4.3. <i>Действие произвольной нагрузки</i> | 35 |
| 2.4.4. <i>Действие вибрационной нагрузки</i> | 36 |
| 2.4.5. <i>Действие немассовой нагрузки</i> | 38 |
| 2.4.6. <i>Кинематическое возмущение опор</i> | 38 |
| 2.5. Вынужденные колебания с учетом демпфирования | 39 |
| 2.5.1. <i>Действие мгновенного импульса</i> | 40 |
| 2.5.2. <i>Действие произвольной нагрузки</i> | 40 |
| 2.5.3. <i>Действие вибрационной нагрузки</i> | 41 |
| Глава 3. Колебания систем со многими степенями свободы | 45 |
| 3.1. Вывод уравнения движения | 45 |
| 3.1.1. <i>Использование метода перемещений</i> | 45 |

| | |
|---|-----|
| 3.1.2. <i>Использование метода сил</i> | 47 |
| 3.2. Собственные колебания | 49 |
| 3.3. Свободные колебания | 55 |
| 3.4. Вынужденные колебания без демпфирования | 56 |
| 3.4.1. <i>Действие произвольной нагрузки</i> | 56 |
| 3.4.2. <i>Действие вибрационной нагрузки</i> | 57 |
| 3.4.3. <i>Порядок расчета на вибрационную нагрузку</i> | 60 |
| 3.5. Решение задач динамики МКЭ | 67 |
| 3.6. Расчет сооружений на сейсмические воздействия | 69 |
| 3.6.1. <i>Землетрясения и их характеристики</i> | 70 |
| 3.6.2. <i>Определение сейсмической нагрузки</i> | 71 |
| 3.7. Колебания систем с бесконечным числом степеней свободы | 74 |
| 3.7.1. <i>Поперечные колебания прямых стержней</i> | 74 |
| 3.7.2. <i>Собственные колебания стержня</i> | 75 |
| 3.8. Приближенные методы в динамике сооружений | 78 |
| 3.8.1. <i>Метод приведенных масс</i> | 79 |
| 3.8.2. <i>Формула Донкерлея</i> | 81 |
| 3.8.3. <i>Метод Релея</i> | 82 |
| 3.8.4. <i>Метод Релея-Ритца</i> | 84 |
| 3.8.5. <i>Метод постоянного ускорения</i> | 85 |
| Глава 4. Устойчивость сооружений | 88 |
| 4.1. Введение в устойчивость сооружений | 88 |
| 4.2. Виды и типы потери устойчивости | 89 |
| 4.3. Задачи и методы расчета на устойчивость | 94 |
| 4.3.1. <i>Статический метод</i> | 94 |
| 4.3.2. <i>Энергетический метод</i> | 95 |
| 4.3.3. <i>Динамический метод</i> | 96 |
| 4.4. Расчет прямых стержней на устойчивость | 99 |
| 4.5. Расчет на устойчивость методом перемещений | 105 |
| 4.5.1. <i>Основные положения</i> | 105 |
| 4.5.2. <i>Единичные состояния элементов основной системы.</i> | 107 |
| 4.5.3. <i>Примеры решения задач</i> | 111 |
| Литература | 117 |
| Содержание | 118 |

**Шакирзянов Рашит Аглеевич
Шакирзянов Фарид Рашитович**

Динамика и устойчивость сооружений

Учебное пособие

Редактор
Компьютерный набор и верстка – Р.А. Шакирзянов
Рисунки и оригинал-макет – Ф.Р. Шакирзянов

Издательство
Казанского государственного архитектурно-строительного университета

Подписано в печать

Заказ

Тираж 500 экз.

Печать ризографическая

Бумага офсетная №1

Формат 60x84/16

Усл.-печ.л. 7,5

Уч.-изд. л. 7,5

Отпечатано в полиграфическом секторе
Издательства КГАСУ
420043, Казань, ул. Зеленая, , д.