

Министерство образования Российской Федерации  
Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Хабаровский государственный технический университет»

**А. А. Лукашевич**

# **СОВРЕМЕННЫЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ**

*Рекомендовано Дальневосточным региональным  
учебно-методическим центром в качестве учебного пособия  
для студентов специальностей 290300 «Промышленное и  
гражданское строительство», 290500 «Городское  
строительство и хозяйство» вузов региона*

Хабаровск  
Издательство ХГТУ

2003 ББК Н112

Л84

УДК 624.04

Рецензенты:

Кафедра "Строительная механика" (ДВГУПС)

Кандидат технических наук, профессор А. В. Шестаков (ДВГУПС)

Кандидат технических наук, доцент Г. С. Лейзерович (КНАГТУ)

Научный редактор

кандидат технических наук, доцент Л. М. Иванников

**Лукашевич А. А.**

Л84      Современные численные методы строительной механики: Учебное пособие. – Хабаровск: Изд-во Хабар. гос. техн. ун-та, 2003. – 135 с.  
ISBN 5–7389–0250–5

Рассмотрены основы современных численных методов строительной механики, приведен обзор наиболее известных из них. Подробно изложены основные положения и процедуры метода конечных элементов. Показано применение этого метода к расчету стержневых систем, а также двумерных континуальных задач теории упругости, изгиба плит и оболочек. Изложение материала сопровождается подробными численными примерами. Также приводятся сведения для начального ознакомления с численными методами решения нелинейных и нестационарных задач механики деформируемого твердого тела.

Адресуется студентам старших курсов строительных специальностей, может быть использовано также аспирантами, инженерами и научными работниками, изучающими или занимающимися методами решения задач строительной механики.

ББК Н112  
УДК 624.04

ISBN 5–7389–0250–5

© Издательство Хабаровского  
государственного технического  
университета, 2003

© Лукашевич А. А., 2003

## Используемые обозначения

$x, y, z$  – декартовы координаты;

$V, \Omega, h$  – соответственно объем, площадь, толщина упругого тела или области;

$S$  – внешняя граница плоской области;

$l, m$  – косинусы углов между осью стержня и координатными осями  $X, Y$ ;

$l_s, m_s$  – направляющие косинусы внешней нормали к границе плоской области;

$A, J$  – соответственно площадь, момент инерции поперечного сечения стержня;

$\Delta, h$  – соответственно площадь, толщина конечного элемента плоской задачи;

$E, \nu$  – соответственно модуль упругости, коэффициент Пуассона материала;

$D$  – цилиндрическая жесткость изгибаемой плиты;

$\rho, \eta$  – соответственно объемная масса, коэффициент демпфирования материала;

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  – компоненты нормальных напряжений;

$\tau_{xy}$  – касательное напряжение в плоскости  $x, y$ ;

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  – компоненты линейных деформаций;

$\gamma_{xy}$  – угловая деформация в плоскости  $x, y$ ;

$u, v, w$  – перемещения в направлении осей  $x, y, z$ ;

$\rho_x, \rho_y$  – компоненты объемных сил в плоскости  $x, y$ ;

$g_x, g_y$  – компоненты поверхностной нагрузки в плоскости  $x, y$ ;

$p_x, p_y$  – компоненты распределенной погонной нагрузки в плоскости  $x, y$ ;

$P_i$  – обобщенная узловая сила по направлению  $i$ -й степени свободы;

$q_i$  – обобщенное узловое перемещение по направлению  $i$ -й степени свободы;

$N_k$  – функция формы для  $k$ -го обобщенного узлового перемещения элемента;

$\lambda$  – шаг сетки, собственное число квадратичной матрицы;

$t$  – текущий момент времени;

$\Delta t$  – шаг по времени;

$\Pi$  – полная потенциальная энергия системы;

$U$  – потенциальная энергия деформации системы;

$W$  – работа внешних или неконсервативных сил системы;

$T$  – кинетическая энергия системы;

$\sigma$  – вектор напряжений;

$\varepsilon$  – вектор деформаций;

$u$  – вектор перемещений;

$\rho$  – вектор заданных объемных сил;

$g_s$  – вектор заданной поверхностной нагрузки;

$u_s$  – вектор заданных перемещений;

$\alpha$  – вектор коэффициентов интерполирующего полинома;

$\psi$  – матрица членов интерполирующего полинома;

$q$  – вектор обобщенных узловых перемещений;

$\dot{q}$  – вектор обобщенных узловых скоростей;

$\ddot{q}$  – вектор обобщенных узловых ускорений;

# 1. ВВЕДЕНИЕ В ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

## 1.1. Математический аппарат численных методов

### 1.1.1. Физическая и математическая модели объекта

Перед тем как применить численные методы для расчета той или иной конструкции или сооружения, необходимо построить физическую и математическую модели рассчитываемого объекта.

В общем случае реальная конструкция имеет бесконечно много особенностей геометрии, свойств материала, внешнего воздействия, которые в той или иной мере влияют на ее поведение. На практике при проведении инженерных расчетов учесть все эти особенности невозможно, а самое главное – и не нужно. Достоверное решение может быть получено путем замены исходного объекта на некоторую **физическую модель**, обладающую конечным числом идеализированных особенностей из числа тех, которые присущи данной конструкции. Например, принимая для материала физическую модель сплошного и однородного тела, мы существенно упрощаем математическое описание физико-механических свойств материала в рассчитываемой конструкции. Однако особого расхождения между полученным в результате расчета и действительным *напряженно-деформированным состоянием* (НДС) конструкции это упрощение не вносит. Это же касается действующих внешних нагрузок, так, например, если их изменение не вызывает в конструкции значительных инерционных сил, то вполне оправданно предположение о статическом их приложении.

Таким образом, построение физической модели заключается во введении некоторых допущений относительно свойств материала, внешних воздействий, характера взаимодействия конструкции и нагрузок и т. п.

Следующий шаг – построение **математической модели** объекта, под которой понимается совокупность математических соотношений, описывающих поведение соответствующей физической модели. Замена подобным образом реального объекта математической моделью позволяет сформулировать задачу его изучения как математическую и воспользоваться для ее решения универсальным математическим аппаратом, который не зависит от конкретной природы объекта.

Следует заметить, что очень часто одна и та же математическая модель соответствует нескольким различным физическим моделям, например, *дифференциальное уравнение Лапласа* может описывать физическую модель кручения призматического стержня, теплопроводность в сплошных средах и т. д. Это позволяет воспользоваться имеющимися результатами решения одной задачи для нахождения решения других подобных задач.

С другой стороны, одна и та же физическая модель может иметь несколько разных математических моделей. К примеру, при математическом описании

задачи изгиба пластин могут использоваться разные гипотезы (прямых нормалей, прямой линии и т. п.), каждая из которых приводит к построению своей математической модели. При этом наиболее строгой будет математическая модель, в которой используются самые общие математические зависимости и уравнения и которая не имеет дополнительных ограничений. Введение же различных гипотез, с одной стороны, существенно упрощает задачу, а с другой – значительно сужает область применения данной математической модели. Поэтому при помощи общего аппарата объемной задачи теории упругости можно рассчитать любую конструкцию, и, напротив, использование *гипотез Кирхгофа* (малости нормальных напряжений к срединной поверхности и прямых нормалей к ней) допустимо лишь для сравнительно тонких и жестких пластин.

**Математические модели основных задач строительной механики** представляют собой краевую задачу для дифференциальных уравнений, или одну из задач линейной алгебры, или задачу математического программирования. Построить математическую модель – это значит, применяя определенные соотношения и методы сопротивления материалов, теории упругости и строительной механики, составить функциональную зависимость между выходными и входными параметрами решаемой задачи. Так, после применения к стержневым системам (в частности, к рамам) метода сил или метода перемещений можно получить математическую модель в виде системы линейных алгебраических уравнений. Задачи расчета НДС пластин, плит и оболочек имеют в качестве математической модели краевую задачу для дифференциальных уравнений равновесия или вариационную задачу для функционала полной или дополнительной энергии деформации рассматриваемого объекта. Каждая конструкция должна быть не только прочной, но и оптимальной по весу. Следовательно, наряду с расчетами на прочность и жесткость должны еще решаться задачи оптимизации – в этом случае математической моделью будет являться одна из задач математического программирования.

В качестве примера рассмотрим некоторые характерные задачи строительной механики и их математические модели.

1. Выполнить расчет статически неопределимой двухэтажной рамы (рис. 1.1), нагруженной по ригелям распределенной нагрузкой  $p$ . Жесткость при изгибе всех элементов одинакова ( $EI = \text{const}$ ). Если через  $z_1, z_2, z_3, z_4$  обозначить углы поворота узлов сопряжения стоек с ригелями, то после применения метода перемещений получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

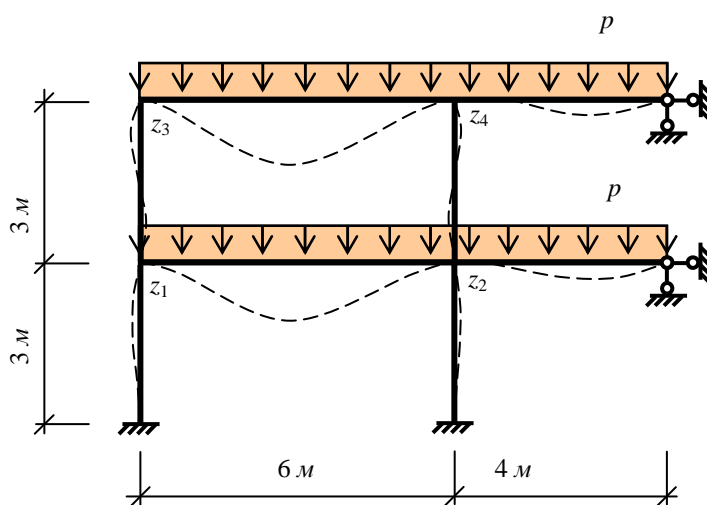


Рис. 1.1

$$\begin{cases} 3.333 z_1 + 0.333 z_2 + 0.667 z_3 & = -3p / EI, \\ 0.333 z_1 + 4.083 z_2 & + 0.667 z_4 = p / EI, \\ 0.667 z_1 & + 2.000 z_3 + 0.333 z_4 = -3p / EI, \\ & 0.667 z_2 + 0.333 z_3 + 2.750 z_4 = p / EI. \end{cases}$$

Методы сил, перемещений и смешанный, рассматриваемые в курсе строительной механики, позволяют получить математические модели работы стержневых систем в виде одной из задач линейной алгебры.

2. Найти НДС прямоугольной изгибаемой плиты толщиной  $h$ , свободно опертой по контуру и нагруженной по всей поверхности распределенной нагрузкой  $p(x, y)$  (рис. 1.2).

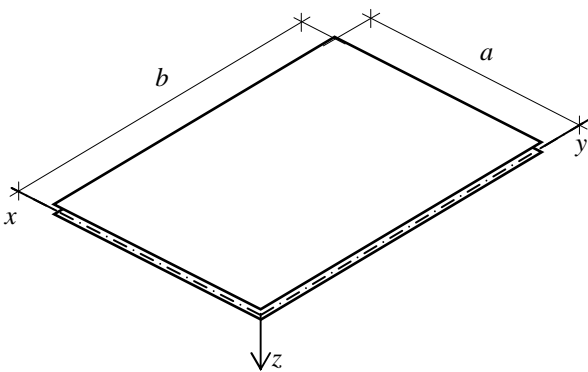


Рис. 1.2

Обозначим прогиб плиты в произвольной точке  $(x, y)$  через  $w(x, y)$ . Тогда математической моделью рассматриваемой задачи будет являться краевая задача для дифференциального уравнения, которая формулируется следующим образом: найти функцию  $w$ , удовлетворяющую в области  $\Omega \{0 \leq x \leq a; 0 \leq y \leq b\}$  следующему дифференциальному уравнению:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D}, \quad (1.1)$$

а на границе области – следующим краевым условиям:

$$\text{при } x = 0, x = a: \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0;$$

$$\text{при } y = 0, y = b: \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0.$$

Здесь  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  – цилиндрическая жесткость плиты.

Основу математической модели, описывающей НДС изгибаемой пластинки в виде дифференциального уравнения (1.1), составляет техническая теория изгиба пластин (используются гипотезы Кирхгофа). Поэтому эта модель может быть применена только для жестких пластинок с малым прогибом, когда мембранными напряжениями можно пренебречь по сравнению с изгибными. Если изгибаемая пластинка допускает прогибы, соизмеримые с толщиной, то математической моделью такой пластинки будет являться система нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных относительно функций перемещений  $u, v, w$  вдоль осей  $x, y, z$  соответственно. Если же учитываются

поперечные сдвиги (в случае подкрепленных ребрами жесткости плит), то получится система дифференциальных уравнений относительно функций перемещений  $u, v, w$  и углов поворота нормали к поверхности пластинки  $\varphi_x, \varphi_y$ . Таким образом, исходя из физической постановки задачи, получаются разные математические модели.

В заключение еще раз отметим, что начальные этапы расчета – построение физической и математической моделей – очень важны. Неудачно выбранная физическая модель никогда не позволит перейти к удачной математической модели; некачественная математическая модель не позволит предложить эффективный численный метод, а недостатки в реализации метода не дадут удовлетворительного результата.

## 1.1.2. Краткие сведения из теории матриц

В численных методах решения задач строительной механики широко используются матричные вычисления, поскольку этот аппарат дает возможность краткой и простой записи сложных математических соотношений.

### Основные определения

Прямоугольной матрицей  $A$  называется прямоугольный массив символов или чисел, упорядоченных в строки и столбцы. Матрица может быть записана в развернутом виде

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \text{или в компактной форме } A = [a_{ij}].$$

Здесь  $a_{ij}$  – элемент матрицы  $A$ ;  $m, n$  – размерность матрицы (число строк и столбцов); нижние индексы элемента  $i, j$  указывают соответственно на  $i$ -ю строку и  $j$ -й столбец ( $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$ ). Далее будем обозначать матрицы буквами жирного шрифта.

Различают следующие элементы матриц:

- элементы вида  $a_{ii}$  с одинаковыми индексами ( $i = j$ ) называются *главными диагональными*, а их местоположение в матрице – *главной диагональю*;
- элементы  $a_{ij}$  с несовпадающими индексами ( $i \neq j$ ) называются *побочными*.

Основные типы матриц:

- если все элементы  $a_{ij}$  – действительные числа, матрица  $A = [a_{ij}]$  называется *действительной*;
- если в матрице всего одна строка ( $m = 1$ ), она называется *матрицей-строкой*;
- если в матрице один столбец ( $n = 1$ ), то это *матрица-столбец*, или *вектор*;
- матрица, некоторые или все элементы которой сами являются матрицами, называется *блочной* матрицей;

- матрица называется *нулевой*, если все ее элементы равны нулю;
- если число строк в матрице равно числу столбцов ( $m = n$ ), то такая матрица называется *квадратной*;
- квадратная матрица, в которой побочные элементы, стоящие симметрично по отношению к главной диагонали, попарно равны ( $a_{ij} = a_{ji}$ ), называется *симметричной*;
- квадратная матрица  $D = [d_{ij}]$ , в которой диагональные элементы отличны от нуля, а побочные равны нулю ( $d_{ii} \neq 0, d_{ij} = 0, i \neq j$ ), называется *диагональной*;
- диагональная матрица  $I = [\delta_{ii}]$ , все элементы которой равны единице ( $\delta_{ii} = 1$ ), называется *единичной* (в матричном исчислении  $I$  играет роль, до некоторой степени аналогичную роли единицы в обычной алгебре);
- квадратная матрица называется *ленточной*, если все ее ненулевые элементы располагаются только в полосе (*ленте*) вдоль главной диагонали, половина максимального числа элементов в данной полосе (исключая диагональный элемент) называется *шириной ленты*;
- матрица, в которой большинство элементов равно нулю, а ненулевые элементы не образуют ленты, называется *разреженной*;
- квадратная матрица  $T = [t_{ij}]$  называется *треугольной*, если побочные элементы, расположенные выше или ниже главной диагонали, равны нулю ( $T_H$  – *нижняя треугольная*,  $T_B$  – *верхняя треугольная* матрицы):

$$T_H = \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & \dots & 0 \\ t_{21} & t_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{bmatrix}; \quad T_B = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & t_{nn} \end{bmatrix}.$$

### Операции над матрицами, характеристики матриц

Введем ряд положений, которыми необходимо руководствоваться при выполнении матричных вычислений:

- две матрицы одного и того же размера считаются *равными* друг другу  $A = B$ , если все их элементы соответственно равны между собой, т. е.  $a_{ij} = b_{ij}$  ( $i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n$ );
- матрица  $B = A^T = [a_{ji}]$ , полученная заменой строк на столбцы, называется *транспонированной* по отношению к исходной матрице  $A$ , т. е.  $a_{ij} = b_{ji}$ ;
- *сложение* и *вычитание* возможно только для матриц одинакового размера, при этом в результате получается матрица того же размера  $C = A \pm B$  (от перестановок слагаемых сумма не меняется), элементы матрицы  $C$  равны сумме (разности) соответствующих элементов матриц  $A$  и  $B$ , т. е.  $c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ji}$  (понятие суммы и разности распространяется на любое число матриц);
- *произведение матрицы на скаляр* есть матрица того же размера  $B = cA$ , где каждый элемент вычисляется как  $b_{ij} = c a_{ij}$ ;



- *умножение матрицы на матрицу* возможно лишь тогда, когда число столбцов первой из них равно числу строк второй, произведение этих двух матриц (с размерами  $m \times p$ ,  $p \times n$ ) есть матрица с размером  $m \times n$ , т. е.  $C = A B$ , где элемент матрицы  $C$  равен  $c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$ , ( $i = 1, 2, \dots, m$ ;  $j = 1, 2, \dots, n$ );
- *определителем (детерминантом)* квадратной матрицы  $A$  называется число, характеризующее данную матрицу и вычисляемое по определенным правилам на основе квадратной таблицы, составленной из элементов исходной матрицы:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix};$$

- квадратная матрица  $A$  называется *вырожденной*, или *особенной*, если ее определитель равен нулю, т. е.  $\det A = 0$ ;
- квадратная матрица  $A$  называется *невырожденной*, или *неособенной*, если ее определитель не равен нулю, т. е.  $\det A \neq 0$ ;
- невырожденная матрица  $A$  является *плохо обусловленной*, если ее определитель относительно мал, т. е.  $\det A \approx 0$ ; использование таких матриц в приближенных вычислениях приводит, как правило, к получению неточных и неустойчивых результатов;
- *обратной* матрицей  $B = A^{-1}$  по отношению к исходной  $A$  называется такая квадратная матрица (того же порядка, что и  $A$ ), которая, будучи умноженной справа или слева на исходную, дает единичную матрицу  $AB = BA = I$ ;
- только невырожденная матрица имеет обратную матрицу, другими словами, достаточным условием существования обратной матрицы является ее *невырожденность*;
- *собственными*, или *характеристическими*, числами квадратной матрицы  $A$  будут такие значения параметра  $\lambda$ , для которого матрица  $(A - \lambda I)$  становится вырожденной, т. е.  $\det (A - \lambda I) = 0$ .

Операции над произведением нескольких матриц:

- *транспонирование произведения матриц* выполняется следующим образом:

$$(A \cdot B \cdot \dots \cdot C)^T = C^T \cdot \dots \cdot B^T \cdot A^T;$$

- *обращение произведения нескольких невырожденных матриц* одного порядка выполняется следующим образом:

$$(A \cdot B \cdot \dots \cdot C)^{-1} = C^{-1} \cdot \dots \cdot B^{-1} \cdot A^{-1}.$$

*Квадратичной формой* от  $n$  переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$  называется следующее матричное выражение:

$$F = \mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i a_{ij} x_j,$$

где  $\mathbf{x}$  – вектор, содержащий  $x_1, x_2, \dots, x_n$ . Если матрица  $A$  является симметричной и действительной, то квадратичная форма  $F$  также будет симметричной и действительной.

Действительная симметричная квадратичная форма  $F$  и соответствующая ей матрица  $A$  называются:

- *положительно определенными*, если квадратичная форма  $F$  или же все собственные числа матрицы  $\lambda_i$  принимают только положительные значения, т. е.  $F > 0$  или  $\{\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, \dots, \lambda_n > 0\}$ ;
- *положительно полуопределенными*, если  $F \geq 0$  или  $\{\lambda_1 \geq 0, \lambda_2 \geq 0, \dots, \lambda_n \geq 0\}$ ;
- *отрицательно определенными*, если  $F < 0$  или  $\{\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0, \dots, \lambda_n < 0\}$ ;
- *неопределенными*, если  $F$  или все собственные числа матрицы  $\lambda_i$  принимают как положительные, так и отрицательные значения.

### Дифференцирование и интегрирование матриц

Приведем сначала правила *общего дифференцирования (интегрирования)* матриц:

- если матрица  $A(x) = [a_{ij}(x)]$ , то ее производная по аргументу  $x$  равна

$$\frac{dA}{dx} = \left[ \frac{da_{ij}(x)}{dx} \right];$$

- интегрирование такой матрицы выполняется аналогично:

$$\int A dx = \int [a_{ij}(x)] dx.$$

*Частное дифференцирование* матриц определяется точно так же, как и общее дифференцирование. Пусть  $X$  – матрица-столбец аргументов  $x_k$  размером  $n \times 1$ ,  $Y$  – матрица-строка размером  $1 \times m$ ,  $Z$  – матрица-столбец размером  $n \times 1$ , причем элементы матриц  $Y, Z$  являются функциями от  $x_k$ , т. е.  $y_i = y_i(x_k)$ ,  $z_i = z_i(x_k)$ .  $A$  – квадратная матрица размером  $n \times n$ , элементы которой не являются функциями от  $x_k$ . Тогда справедливы следующие соотношения:

$$\frac{\partial Y}{\partial Y^T} = \frac{\partial Y^T}{\partial Y} = \frac{\partial Z}{\partial Z^T} = \frac{\partial Z^T}{\partial Z} = 1, \quad \frac{\partial Y}{\partial X} = \left[ \frac{\partial Y^T}{\partial X^T} \right]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial Y}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial Y}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix};$$

$$\frac{\partial (AX)}{\partial X} = A^T, \quad \frac{\partial (X^T A)}{\partial X} = A;$$

$$\frac{\partial (X^T AX)}{\partial X} = 2AX, \quad \frac{\partial (XAX^T)}{\partial X} = \frac{\partial (X^T AX)}{\partial X^T} = 2X^T A;$$

$$\frac{\partial (YZ)}{\partial X} = \frac{\partial (ZY)}{\partial X} = \frac{\partial Y}{\partial X} Z + \frac{\partial Z^T}{\partial X} Y^T, \quad \frac{\partial (YZ)}{\partial X^T} = \frac{\partial (ZY)}{\partial X^T} = Z^T \frac{\partial Y^T}{\partial X^T} + Y \frac{\partial Z}{\partial X^T}.$$

Более подробно с матричным исчислением можно ознакомиться в [3, 12, 23].

### 1.1.3. Численные методы линейной алгебры

Очень многие задачи расчета строительных конструкций и сооружений приводят к математическим моделям в виде задач линейной алгебры. Так, при расчете стержневых систем методами сил и перемещений получаются системы линейных алгебраических уравнений; при исследовании устойчивости стержней и плит, а также при некоторых динамических расчетах приходится решать задачи на собственные значения, которые также относятся к алгебраическим задачам. К тому же при исследовании математических моделей, являющихся краевыми задачами для дифференциальных уравнений, после применения численных методов для их решения так или иначе получаются системы линейных или нелинейных алгебраических уравнений.

Решение задач линейной алгебры составляет большую часть общего времени расчета конструкции, при этом точность и устойчивость их решения оказывает значительное влияние на точность и устойчивость всего расчета. При решении динамических и нелинейных задач это влияние существенно больше. Так, при использовании неудачного алгоритма решения системы уравнений или нахождения собственных значений результаты расчета могут оказаться недостоверными, а вычислительные затраты могут возрасти во много раз. Именно поэтому задачи линейной алгебры как части общего расчета конструкций в целом имеют важное значение.

К задачам линейной алгебры относятся:

- решение систем линейных алгебраических уравнений;
- вычисление определителей;
- обращение матриц;
- нахождение собственных значений и собственных векторов матриц.

Рассмотрим наиболее часто встречающуюся из этих задач, а именно решение *системы линейных алгебраических уравнений* и используемые при этом численные методы.

Запишем систему уравнений  $n$ -го порядка:

$$\begin{aligned} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \dots + a_{1n} x_n &= b_1, \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + \dots + a_{2n} x_n &= b_2, \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + \dots + a_{3n} x_n &= b_3, \\ &\dots, \\ a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 + a_{n3} x_3 + \dots + a_{nn} x_n &= b_n. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Будем считать, что система имеет единственное решение (определитель этой системы не равен нулю). В матричной форме систему можно записать так:

$$\mathbf{A} \mathbf{X} = \mathbf{B},$$

где  $\mathbf{A}$  – матрица коэффициентов при неизвестных;  $\mathbf{B}$  – вектор свободных членов (вектор правых частей);  $\mathbf{X}$  – вектор неизвестных.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}; \quad B = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_n \end{Bmatrix}; \quad X = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \dots \\ x_n \end{Bmatrix}.$$

Для решения приведенной системы уравнений можно применять разные методы. По существу все они относятся к одной из двух групп: *прямые* (точные) и *итерационные* (приближенные) методы. Прямые методы дают решение за конечное число действий, они просты и наиболее универсальны; точность вычисления неизвестных в них определяется лишь накоплением погрешностей округления при выполнении арифметических операций. Решение системы итерационными методами осуществляется путем последовательных приближений от первоначально принятых значений неизвестных к более точным. Точность вычисления при этом определяется не только погрешностью округления, но в первую очередь зависит от числа проведенных итераций и сходимости итерационного процесса. Итерационные методы эффективны лишь для систем специального вида, со слабо заполненной матрицей очень большого порядка.

### Прямые методы решения систем линейных уравнений

Простым примером точного метода является известное *правило Крамера*. Оно заключается в том, что решение системы уравнений может быть получено по следующим формулам:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \dots, \quad x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

где  $\Delta = \det A$  – основной определитель (составленный из коэффициентов матрицы  $A$ );  $\Delta_i = \det A_i$  – вспомогательные определители, получающиеся из определителя  $\Delta$  путем замены  $i$ -го столбца на столбец свободных членов  $B$ .

Однако для систем порядка  $n > 4$  применение формул Крамера является уже нецелесообразным, а при больших  $n$  абсолютно неприемлемо, поскольку:

- для вычисления только одного определителя требуется около  $n \cdot n!$  операций (уже при  $n > 10$  время счета значительно и очень быстро возрастает);
- из-за выполнения огромного числа операций будут быстро увеличиваться погрешности округления;
- при перемножении большого количества чисел в процессе вычислений может происходить переполнение разрядов памяти ЭВМ.

Конечно, совсем не обязательно вычислять определитель непосредственно по правилу его построения. Его можно вычислить, например, используя метод Гаусса [16, 31], который будет изложен ниже. Но в этом случае численное решение системы уравнений по формулам Крамера не имеет смысла, т. к. метод Гаусса дает возможность непосредственно получить решение  $X = \{x_i\}$ .

**Метод Гаусса** (и его модификации) – метод последовательного исключения неизвестных, один из наиболее универсальных и эффективных методов решения систем линейных алгебраических уравнений, порядок которых не превышает  $10^3$ . В основе метода лежит принцип эквивалентности преобразования исходной системы с исключением части неизвестных из некоторых уравнений.

Алгоритм метода Гаусса состоит из двух ходов (частей): прямого и обратного. Прямой ход заключается в сведении исходной системы уравнений к эквивалентной системе с треугольной матрицей коэффициентов.

Исключим неизвестное  $x_1$  из всех уравнений системы (1.2), начиная со второго. Для этого находим множители:

$$m_{21} = -\frac{a_{21}}{a_{11}}, \quad m_{31} = -\frac{a_{31}}{a_{11}}, \quad \dots, \quad m_{n1} = -\frac{a_{n1}}{a_{11}}.$$

Полагаем, что  $a_{11} \neq 0$ . Тогда  $x_1$  считается *ведущим неизвестным*,  $a_{11}$  – *ведущим коэффициентом*. Если же  $a_{11} = 0$ , то нужно поменять местами два уравнения системы (1-е и, например,  $k$ -е при  $a_{k1} \neq 0$ ) так, чтобы в итоге  $a_{11} \neq 0$ . Умножим 1-е уравнение системы (1.2) на  $m_{i1}$  и сложим с  $i$ -м уравнением ( $i = 2, 3, \dots, n$ ). В результате мы исключим неизвестное  $x_1$  из всех уравнений системы, начиная со второго:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)}, \\ a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 + \dots + a_{3n}^{(1)}x_n &= b_3^{(1)}, \\ \dots & \\ a_{n2}^{(1)}x_2 + a_{n3}^{(1)}x_3 + \dots + a_{nn}^{(1)}x_n &= b_n^{(1)}. \end{aligned}$$

Здесь  $a_{ij}^{(1)} = a_{1j}m_{i1} + a_{ij}$ ;  $b_i^{(1)} = b_1m_{i1} + b_i$ , ( $i = 2, 3, \dots, n$ ;  $j = 2, 3, \dots, n$ ). Затем аналогично исключается неизвестное  $x_2$  из всех уравнений, начиная с 3-го, при этом  $m_{i2} = -\frac{a_{i2}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$ , ( $i = 3, \dots, n$ ). Процесс исключения неизвестных повторяется

до тех пор, пока не будет исключено предпоследнее неизвестное  $x_{n-1}$  из последнего  $n$ -го уравнения. В результате приходим к системе уравнений с треугольной матрицей:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n &= b_2^{(1)}, \\ a_{33}^{(2)}x_3 + \dots + a_{3n}^{(2)}x_n &= b_3^{(2)}, \\ \dots & \\ a_{nn}^{(n-1)}x_n &= b_n^{(n-1)}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Таким образом, *прямой ход* – преобразование исходной системы уравнений (1.2) к эквивалентной системе с треугольной матрицей коэффициентов (1.3) – выполняется с помощью следующей схемы:

$$m_{ik} = -\frac{a_{ik}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \quad a_{ij}^{(k)} = a_{kj}^{(k-1)} \cdot m_{ik} + a_{ij}^{(k-1)}, \quad b_i^{(k)} = b_k^{(k-1)} \cdot m_{ik} + b_i^{(k-1)},$$

$$(k = 1, 2, \dots, n-1; \quad i = k+1, k+2, \dots, n; \quad j = k+1, k+2, \dots, n).$$

*Обратный ход* заключается в последовательном нахождении неизвестных системы уравнений (1.3), начиная с последнего  $x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}$ . Подставив

затем это значение в предпоследнее  $n-1$  уравнение, найдем  $x_{n-1}$ , подставив  $x_{n-1}$  и  $x_n$  в  $n-2$  уравнение, найдем  $x_{n-2}$ , и т. д., последним из первого уравнения определим  $x_1$ . Обратный ход можно выразить следующей схемой:

$$x_n = \frac{b_n^{(n-1)}}{a_{nn}^{(n-1)}}; \quad x_{n-k} = \frac{1}{a_{ll}^{(l-1)}} \left[ b_l^{(l-1)} - \sum_{j=l+1}^n (a_{lj}^{(l-1)} x_j) \right], \quad (k = 1, 2, \dots, n-1; \quad l = n-k).$$

Метод Гаусса применим в тех случаях, когда все ведущие диагональные элементы  $a_{kk}^{(k-1)}$ , на которые нужно делить на  $k$ -м шаге прямого хода, не равны нулю. Если это условие не выполняется, то перестановкой строк необходимо матрицу коэффициентов привести к виду, когда  $a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$ . Это можно всегда сделать для невырожденных матриц. Если же ведущий коэффициент относительно мал, то при делении на него получаются большие числа – это приводит к значительным ошибкам округления при исключении неизвестных. Поэтому указанную перестановку нужно делать так, чтобы ведущий коэффициент был по модулю наибольшим из всех оставшихся в данном столбце. Этот коэффициент называется *главным*, а соответствующая модификация алгоритма – *методом Гаусса с выбором главного элемента* [23].

При решении задач строительной механики матрицы коэффициентов СЛАУ, как правило, положительно определены, симметричны и имеют ленточную структуру. Это позволяет, во-первых, хранить в памяти ЭВМ только одну из симметричных частей ленты (нижнюю или верхнюю); во-вторых, использовать при этом более эффективные методы решения систем уравнений.

Рассмотрим два таких метода, в основе которых лежит разложение (*факторизация*) исходной симметричной матрицы коэффициентов  $A$  на треугольные матрицы [12, 22]. Решение системы  $A X = B$  происходит в два этапа: вычисление треугольного разложения матрицы  $A$  и решение систем с треугольными матрицами коэффициентов.

**Метод квадратного корня** (*разложение Холецкого*) реализует следующее разложение исходной матрицы:  $A = L L^T$ . Полученное матричное уравнение

$$L L^T X = B$$

можно представить в виде последовательности систем уравнений:

$$\mathbf{L}\mathbf{Y} = \mathbf{B}; \quad \mathbf{L}^T\mathbf{X} = \mathbf{Y}. \quad (1.4)$$

Здесь  $\mathbf{Y} = \mathbf{L}^T\mathbf{X}$  – промежуточный вектор неизвестных;  $\mathbf{L}$  – нижняя треугольная матрица с положительными диагональными элементами;  $\mathbf{L}^T$  – верхняя треугольная матрица.

Первый этап – треугольное разложение (факторизация) исходной матрицы выполняется с использованием следующей схемы:

$$l_{ii} = \left( a_{ii} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}^2 \right)^{1/2}, \quad (i = 1, \dots, n);$$

$$l_{ij} = \frac{1}{l_{jj}} \left( a_{ij} - \sum_{m=1}^{i-1} l_{jm} l_{im} \right), \quad (i > j); \quad l_{ij} = 0, \quad (i < j).$$

Второй этап – последовательное решение двух систем уравнений (1.4). Сначала решается первое из этих уравнений относительно  $\mathbf{Y}$  (*прямая подстановка*), а затем второе – относительно  $\mathbf{X}$  (*обратная подстановка*):

$$y_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j, \quad (i = 1, \dots, n); \quad x_i = \frac{1}{l_{ii}} \left( y_i - \sum_{j=i+1}^n l_{ji} x_j \right), \quad (i = n-1, \dots, 1).$$

**$LDL^T$  – факторизация** – алгоритм, близкий к методу квадратного корня, – реализует следующее разложение матрицы коэффициентов:  $\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^T$ . Исходная система уравнений сводится к последовательности из двух систем вида

$$\mathbf{L}\mathbf{Y} = \mathbf{B}; \quad \mathbf{D}\mathbf{L}^T\mathbf{X} = \mathbf{Y}. \quad (1.5)$$

Здесь  $\mathbf{Y}, \mathbf{L}, \mathbf{L}^T$  – то же, что и в предыдущем методе;  $\mathbf{D}$  – диагональная матрица.

Факторизация исходной матрицы  $\mathbf{A}$  выполняется по следующим формулам:

$$d_{ii} = \left( a_{ii} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}^2 d_{jj} \right); \quad l_{ii} = 1, \quad (i = 1, \dots, n);$$

$$l_{ij} = \frac{1}{d_{jj}} \left( a_{ij} - \sum_{m=1}^{j-1} l_{im} l_{jm} d_{mm} \right), \quad (i > j); \quad l_{ij} = 0, \quad (i < j).$$

Последовательное решение двух систем уравнений (1.5) выражается следующими формулами прямой и обратной подстановки:

$$y_i = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij} y_j, \quad (i = 1, \dots, n); \quad x_i = \frac{y_i}{d_{ii}} - \sum_{j=i+1}^n l_{ji} x_j, \quad (i = n-1, \dots, 1).$$

Оба приведенных алгоритма: разложение Холецкого и  **$LDL^T$  – факторизация**, требуют значительно меньше времени для вычислений и, таким образом, являются более быстродействующими по сравнению с простым методом Гаусса.

## Итерационные методы решения систем линейных уравнений

На практике итерационные методы используются значительно реже, чем прямые, хотя по сравнению с последними имеют некоторые преимущества:

- значительно проще по своему алгоритму, следовательно, проще и для программирования;
- оптимально используют разреженность матриц, обрабатывая и сохраняя только ненулевые коэффициенты, при этом не появляются новые ненулевые элементы, структура матрицы сохраняется;
- требуя меньше оперативной памяти, могут эффективно использоваться для решения уникальных задач очень большой размерности.

Основной недостаток большинства итерационных методов – медленная сходимость решения, особенно для плохо обусловленных матриц. Считается, что итерационные методы, за некоторым исключением, требуют большего времени вычислений, чем прямые.

Суть итерационного процесса в том, что приближенные значения элементов  $x_i$  вектора неизвестных  $X$ , полученные на предыдущей итерации, используются в качестве исходных данных для некоторой итерационной процедуры, вычисляющей новые значения этих элементов.

По виду применяемой процедуры итерационные методы разделяются на *точечные* и *групповые (блочные)*. В первых из них новое приближение на  $k$ -й итерации определяется отдельно для каждого элемента  $x_i$ . При этом вычисление  $x_i^k$  производится по *явной* формуле, включающей ранее полученное значение  $x_i^{k-1}$ . В групповых методах новые приближения для группы неизвестных  $X_g$ , входящей в общий вектор  $X$ , получаются одновременно. Эти методы являются *неявными*, т. к. значения неизвестных в группе  $X_g^k$  определяются на  $k$ -й итерации из решения системы уравнений, включающей как  $X_g^k$ , так и полученные на предыдущей итерации значения  $X_g^{k-1}$ .

Как правило, перед выполнением итерационной процедуры матрица коэффициентов  $A$  выражается в виде суммы треугольных и диагональных матриц. Например, ряд методов использует следующее представление [16]:

$$A = L + D + U,$$

где  $L$  – *строго* (т. е. с нулевой диагональю:  $l_{ii} = 0$ ) нижняя треугольная матрица;  $D$  – диагональная матрица;  $U$  – *строго* верхняя треугольная матрица (если  $A$  – симметричная, то  $U = L^T$ ). Далее на основе этих матриц и вектора свободных членов вычисляются так называемые *итерационные матрицы*  $G$  и  $R$ .

Например, для одного из классических итерационных методов – *алгоритма Гаусса-Зейделя* – итерационные матрицы являются постоянными для всех итераций и выражаются следующим образом:

$$G = -(D + L)^{-1} U, \quad R = (D + L)^{-1} B.$$



Итерационная процедура в этом случае имеет следующий вид:

$$x_i^k = \sum_{j=1}^{i-1} g_{ij} x_j^k + \sum_{j=i+1}^n g_{ij} x_j^{k-1} + r_i, \quad (i = 1, \dots, n),$$

где  $k$  – номер итерации. Несмотря на то, что метод Гаусса-Зейделя всегда сходится (в предельном случае, при  $k \rightarrow \infty$ ,  $\mathbf{X}^k$  всегда сходится к точному решению), скорость сходимости данной процедуры относительно медленная.

**Метод последовательной верхней релаксации** может рассматриваться как обобщение алгоритма Гаусса-Зейделя с ускорением сходимости. Итерационные матрицы здесь также постоянны и имеют соответственно вид:

$$\mathbf{G} = (\mathbf{D} + \omega \mathbf{L})^{-1} [(\mathbf{1} - \omega) \mathbf{D} - \omega \mathbf{U}], \quad \mathbf{R} = \omega (\mathbf{D} + \omega \mathbf{L})^{-1} \mathbf{B},$$

где  $\omega$  – параметр верхней релаксации. Итерационная схема может быть записана в виде

$$x_i^k = (1 - \omega) x_i^{k-1} + \omega \left( \sum_{j=1}^{i-1} g_{ij} x_j^k + \sum_{j=i+1}^n g_{ij} x_j^{k-1} + r_i \right), \quad (i = 1, \dots, n).$$

Хотя метод последовательной верхней релаксации ненамного сложнее для программирования, он сходится гораздо быстрее, чем метод Гаусса-Зейделя. Скорость сходимости в основном зависит от параметра релаксации  $\omega$ , значение которого обычно подбирается из опыта решения аналогичных задач. Например, выбор  $1.85 < \omega < 1.92$  обеспечивает хорошую сходимость при решении систем уравнений, полученных в процессе расчета двумерных задач теории упругости. Следует отметить, что для некоторых задач блочный вариант метода последовательной релаксации сходится быстрее, чем точечная итерационная схема [16].

Вообще говоря, для любого точечного итерационного метода можно построить аналогичный блочный итерационный метод, во-первых, разбиением вектора неизвестных  $\mathbf{X}$  на блоки, во-вторых, разбиением соответственно матрицы коэффициентов  $\mathbf{A}$  и вектора правых частей  $\mathbf{B}$  и, в-третьих, построением итерационного алгоритма того же вида, что и точечная процедура. Например, **блочная итерационная схема Гаусса-Зейделя** может быть записана в виде

$$\mathbf{X}_i^k = \mathbf{A}_{ii}^{-1} \left[ \mathbf{B}_i - \sum_{j=1}^{i-1} \mathbf{A}_{ij} \mathbf{X}_j^k - \sum_{j=i+1}^N \mathbf{A}_{ij} \mathbf{X}_j^{k-1} \right], \quad (i = 1, \dots, N),$$

где векторы  $\mathbf{X}$  и  $\mathbf{B}$  разбиты на  $N$  блоков вида  $\mathbf{X}_i$  и  $\mathbf{B}_i$ , а матрица  $\mathbf{A}$  – соответственно на блоки  $\mathbf{A}_{ij}$ . Как правило, блочные итерационные методы сходятся немного быстрее, чем аналогичные точечные методы.

В заключение отметим, что основной и неоспоримой областью применения итерационных методов является решение систем нелинейных уравнений. Соответствующие нелинейные задачи строительной механики и некоторые из методов их решения будут рассмотрены нами в дальнейшем.

## 1.2. Обзор численных методов строительной механики

Строительная механика на современном этапе развития располагает большим арсеналом методов расчета как *дискретных* систем (например, состоящих из стержней), так и *континуальных* (сплошных) конструкций и их элементов, таких как пластины, плиты, оболочки, массивы.

Расчет напряженно-деформированного состояния дискретной конструкции, как правило, приводит непосредственно к решению систем алгебраических уравнений. Пример этому – широко применяемые при расчете плоских и пространственных стержневых систем классические методы сил и перемещений.

Для расчета континуальных систем используются более сложные математические модели и соответственно численные методы. Так, основные зависимости между геометрическими и физическими величинами в механике сплошных сред выводятся с помощью элемента бесконечно малых размеров. Соотношения между средними значениями этих величин, предполагая их непрерывность, распространяются с бесконечно малых элементов на всю рассматриваемую область. Таким образом, появляются *дифференциальные, интегральные* или *интегро-дифференциальные* уравнения, вместе с *граничными и начальными условиями* они образуют математическую модель соответствующей задачи. К сожалению, точное решение в аналитической форме прикладных континуальных задач возможно лишь в очень немногих случаях, поэтому особо важное значение приобретают приближенные, но достаточно общие методы их решения. В последние десятилетия эти методы, называемые также *численными*, получили особенно активное развитие в связи с применением в инженерной практике современных вычислительных средств.

В основе почти всех современных численных методов лежит *аппроксимация* дифференциальных и интегральных уравнений, а также граничных условий конечным числом (т. е. системой) алгебраических уравнений относительно дискретных неизвестных – обычно это значения искомой функции в дискретных точках. Такое сведение континуальной задачи к дискретной равносильно замене сплошной конструкции с бесконечным числом степеней свободы на приближенную *дискретную модель* с конечным числом степеней свободы.

К настоящему времени известно значительное число разнообразных приближенных методов. При этом различные методы применяются для решения дифференциальных и интегральных уравнений, вариационных задач. Общим недостатком большинства из них является то, что они разрабатывались для решения определенного класса задач механики деформируемого тела и таким образом не являются универсальными. К тому же для исследования массивов сложной формы, комбинированных систем, многих других конструкций использование ряда методов неэффективно и даже неприемлемо.

Оценивая тот или иной численный метод, основное внимание необходимо уделять таким качествам, как универсальность, точность аппроксимации, простота алгоритма, объем вычислений и т. п. Для проведения практических

расчетов нужно выбирать достаточно надежные методы, обладающие хорошей сходимостью и опробованные на большом количестве разнообразных задач. Этим требованиям отвечают *метод конечных разностей* (МКР), *вариационно-разностный метод* (ВРМ), *метод конечных элементов* (МКЭ). Причем в рамках каждого из этих методов разработано множество направлений и модификаций, оправдывающих себя при решении различных классов задач.

Следующие параграфы этой главы знакомят читателя с указанными приближенными методами на примере простейших одномерных задач, доступных для студентов строительных специальностей. Однако из этого не следует, что эти методы предназначены для решения столь простых задач, ибо применение универсальных методов к одномерным системам вообще не является эффективным. На этих примерах прослеживается последовательность стандартных действий, составляющая алгоритм решения и иллюстрирующая характерные особенности того или иного метода. Без особых изменений приведенные схемы могут быть использованы при решении существенно более сложных двумерных и трехмерных задач.

### 1.2.1. Метод конечных разностей

Этот метод численного решения *краевых задач для дифференциальных уравнений* называют также *методом сеток* [1, 18]. Суть метода состоит в следующем. На рассчитываемую область наносится *сетка с узлами*. Все производные, входящие в дифференциальные уравнения и граничные условия, приближенно заменяются соответствующими *разностными отношениями* (по формулам численного дифференцирования) и, таким образом, выражаются через неизвестные узловые значения искомой функции. В результате приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно значений функций в узлах сетки. Решение этой системы с последующей интерполяцией в промежутках между узлами позволяет в конечном счете получить приближенное решение рассматриваемой задачи.

Большим преимуществом этого метода является слабая зависимость от граничных условий задачи, геометрии конструкций и характера исходного напряженного состояния. Недостатком является высокий порядок систем алгебраических уравнений. Для МКР также характерны затруднения при учете смешанных граничных условий, рассмотрении многосвязных областей и стыковок областей, описываемых различными дифференциальными уравнениями.

Первые работы по применению МКР к задачам линейной теории упругости были выполнены Г. Маркусом в начале XX столетия. Широкий круг задач был решен Н. П. Абовским, П. М. Варваком, М. А. Колтуновым, М. С. Корнишиным и др. В дальнейшем этот метод применялся для решения плоских задач теории упругости, изгиба пластин, оболочек и т. д.

Изложим основные положения МКР на примере одномерной задачи. Пусть, например,  $v(x)$  есть уравнение изогнутой оси балки (рис. 1.3). Точное значение производной в точке  $C$  будет равно

$$\left. \frac{dv(x)}{dx} \right|_{x=x_i} = \operatorname{tg} \varphi.$$

Обозначим через  $\lambda = \Delta x$  конечное приращение аргумента – шаг сетки (разностные отношения будут намного проще, если  $\lambda = \text{const}$  для всей рассчитываемой области). Как видно из рис. 1.3, чем меньше шаг  $\lambda$ , тем хорда  $AB$  будет ближе к касательной, а угол наклона  $AB$  будет приближаться к углу наклона касательной. Пусть  $i, k, l, s, t$  – узлы сетки, а  $v_i, v_k, v_l, v_s, v_t$  – узловые значения функции  $v(x)$ . Тогда приближенное выражение для производной в точке  $i$ , лежащей посередине интервала  $[k, l]$ , запишется следующим образом:

$$v'(x_i) = \left. \frac{dv(x)}{dx} \right|_i \approx \frac{v_l - v_k}{2\lambda}. \quad (1.6)$$

Приближенное выражение для производной посередине интервала  $[i, l]$  можно записать так:

$$v'(x_\alpha) = \left. \frac{dv(x)}{dx} \right|_{i^{np}} \approx \frac{v_l - v_i}{\lambda}, \quad (1.7)$$

а посередине интервала  $[k, i]$ :

$$v'(x_\beta) = \left. \frac{dv(x)}{dx} \right|_{i^{лев}} \approx \frac{v_i - v_k}{\lambda}. \quad (1.8)$$

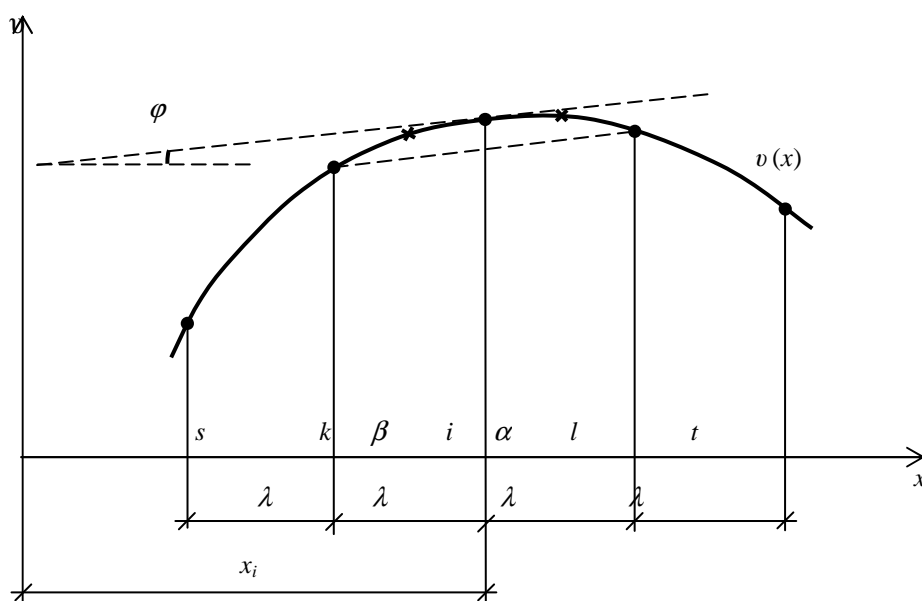


Рис. 1.3

Выражение (1.6) называется *центральной разностью* в точке  $i$ , а (1.7) и (1.8) – соответственно *правой* и *левой разностями* в точке  $i$  в *нецентрированной форме*. Все вышеприведенные выражения для первой производной, помимо того, называются *первыми разностями*.

Вторая производная (*вторая разность*) в точке  $i$  – это первая разность от первых разностей в точках  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$v''(x_i) = \left. \frac{d^2 v(x)}{dx^2} \right|_i \approx \frac{v'(x_\alpha) - v'(x_\beta)}{\lambda} = \frac{(v_l - v_i) - (v_i - v_k)}{\lambda \lambda} = \frac{v_l - 2v_i + v_k}{\lambda^2}. \quad (1.9)$$

Аналогично вторые разности в точках  $l$  и  $k$ :

$$v''(x_l) = \left. \frac{d^2 v(x)}{dx^2} \right|_l \approx \frac{v_t - 2v_l + v_i}{\lambda^2}, \quad v''(x_k) = \left. \frac{d^2 v(x)}{dx^2} \right|_k \approx \frac{v_i - 2v_k + v_s}{\lambda^2}.$$

Третья производная (*третья разность*) в точке  $i$  берется как первая разность от вторых разностей в точках  $l$  и  $k$ :

$$v'''(x_i) = \left. \frac{d^3 v(x)}{dx^3} \right|_i \approx \frac{v''(x_l) - v''(x_k)}{2\lambda} = \frac{(v_t - 2v_l + v_i) - (v_i - 2v_k + v_s)}{2\lambda \lambda^2} = \frac{v_t - 2(v_l - v_k) + v_s}{2\lambda^3}.$$

Четвертая производная (*четвертая разность*) в точке  $i$  – это вторая разность от вторых разностей в точках  $l$ ,  $i$  и  $k$ :

$$v^{iv}(x_i) = \left. \frac{d^4 v(x)}{dx^4} \right|_i \approx \frac{v''(x_l) - 2v''(x_i) + v''(x_k)}{\lambda^2} = \frac{v_t - 4v_l + 6v_i - 4v_k + v_s}{\lambda^4}. \quad (1.10)$$

Рассмотрим, как выполняется учет заданных условий по МКР.

Если  $v_i = 0$  в точке  $i$ , то данное неизвестное просто исключается из системы алгебраических уравнений (соответственно число уравнений в системе уменьшается на одно).

Если  $v'(x_i) = 0$ , то, подставляя данное условие в (1.6), имеем  $\frac{v_l - v_k}{2\lambda} = 0$ , откуда  $v_l = v_k$ , и одно из этих неизвестных, например  $v_l$ , также исключается из системы уравнений.

Если  $v''(x_i) = 0$ , то из выражения второй разности (1.9) можно, например, выразить  $v_l = 2v_i - v_k$ . Данная зависимость также позволяет исключить одно неизвестное, в данном случае  $v_l$ .

### Пример расчета

Балка на двух опорах постоянного сечения нагружена распределенной нагрузкой  $p$  и сосредоточенной силой  $F = 0.2pl$  (рис. 1.4). Необходимо определить прогибы балки.

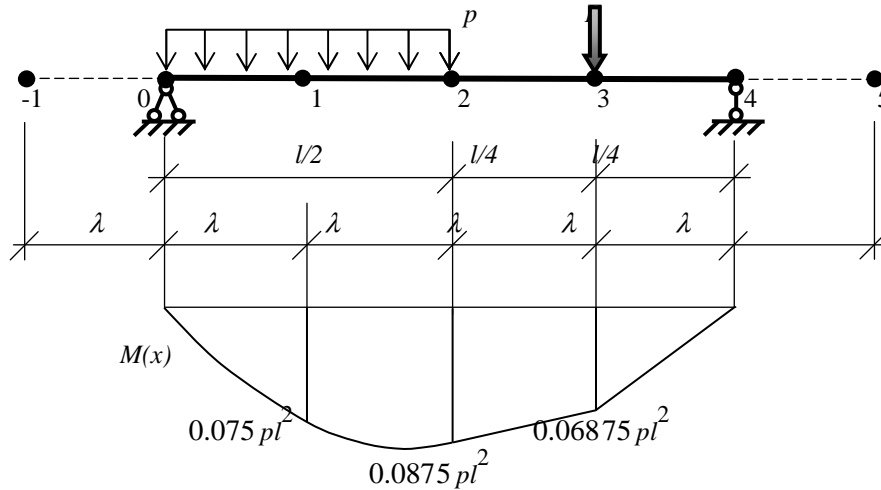


Рис. 1.4

Разделим балку на четыре равные части:  $\lambda = \Delta x = \frac{l}{4}$ . Поскольку на опорах  $v_0 = v_4 = 0$ , неизвестными будут узловые значения прогибов в точках 1, 2, 3. Примем в качестве математической модели этой задачи приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси балки [2]:

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{M}{EJ}. \quad (1.11)$$

Значения изгибающих моментов, необходимые в этом случае, приведены на рис. 1.4. Воспользовавшись формулой вторых разностей (1.9), запишем уравнение (1.11) последовательно для точек 1, 2 и 3:

$$\frac{v_0 - 2v_1 + v_2}{\lambda^2} = \frac{0.075 pl^2}{EJ}; \quad \frac{v_1 - 2v_2 + v_3}{\lambda^2} = \frac{0.0875 pl^2}{EJ}; \quad \frac{v_2 - 2v_3 + v_4}{\lambda^2} = \frac{0.06875 pl^2}{EJ}.$$

Подставив  $\lambda^2 = \left(\frac{l}{4}\right)^2 = \frac{l^2}{16}$  и исключив  $v_0$  и  $v_4$ , получим следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} -2v_1 + v_2 = 0.0046875 pl^4/EJ; \\ v_1 - 2v_2 + v_3 = 0.00546875 pl^4/EJ; \\ v_2 - 2v_3 = 0.004296875 pl^4/EJ. \end{cases}$$

Решив данную систему, имеем:

$$v_1 = -\frac{0.00732 pl^4}{EJ}, \quad v_2 = -\frac{0.00996 pl^4}{EJ}, \quad v_3 = -\frac{0.00713 pl^4}{EJ}.$$

Точные значения прогибов в соответствующих узлах балки:

$$-\frac{0.00687 pl^4}{EJ}, \quad -\frac{0.00938 pl^4}{EJ}, \quad -\frac{0.00658 pl^4}{EJ}.$$

Решим ту же задачу, исходя из дифференциального уравнения изгиба балки четвертого порядка:

$$\frac{d^4 v}{dx^4} = \frac{p}{EJ}. \quad (1.12)$$

В этом случае нет необходимости предварительно определять значения внутренних изгибающих моментов в узлах балки. В свою очередь, сосредоточенная сила  $F$  в узле 3 должна быть представлена в виде распределенной (на интервале  $\lambda$ ) нагрузки:  $\frac{F_3}{\lambda} = -\frac{4p}{5}$ , нагрузка же в узлах 1 и 2 соответственно равна:  $-p$ ,  $-\frac{p}{2}$ . Применив формулу четвертых разностей (1.10), запишем уравнение (1.12) для тех же точек 1, 2 и 3:

$$\begin{aligned} \frac{v_{-1} - 4v_0 + 6v_1 - 4v_2 + v_3}{\lambda^4} &= -\frac{p}{EJ}; \\ \frac{v_0 - 4v_1 + 6v_2 - 4v_3 + v_4}{\lambda^4} &= -\frac{p}{2EJ}; \\ \frac{v_1 - 4v_2 + 6v_3 - 4v_4 + v_5}{\lambda^4} &= -\frac{4p}{5EJ}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Здесь для записи четвертых разностей введены так называемые *законтурные* узлы -1 и 5, находящиеся вне расчетной области балки. Их можно исключить с помощью граничных условий (на опорах). Так, на левой опоре (узел 0):

$$v_0 = 0, \quad \frac{M_0}{EJ} = \frac{d^2 v(x)}{dx^2} \Big|_0 \approx \frac{v_{-1} - 2v_0 + v_1}{\lambda^2} = 0.$$

Отсюда  $v_{-1} = -v_1$ . Такие же условия на правой опоре (узел 4), поэтому  $v_5 = -v_3$ .

Подставив в (1.13)  $\lambda^4 = \left(\frac{l}{4}\right)^4 = \frac{l^4}{256}$  и исключив неизвестные:  $v_0 = v_4 = 0$ ,

$v_{-1} = -v_1$  и  $v_5 = -v_3$ , получим систему алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} 5v_1 - 4v_2 + v_3 = -pl^4 / 256 EJ; \\ -4v_1 + 6v_2 - 4v_3 = -pl^4 / 512 EJ; \\ v_1 - 4v_2 + 5v_3 = -4pl^4 / 1280 EJ. \end{cases}$$

Решением данной системы будут следующие значения прогибов в узлах балки:

$$v_1 = -\frac{0.00732 pl^4}{EJ}, \quad v_2 = -\frac{0.00996 pl^4}{EJ}, \quad v_3 = -\frac{0.00712 pl^4}{EJ},$$

что совпадает с результатами предыдущего расчета (использующего в качестве математической модели уравнение (1.11)).

## 1.2.2. Вариационно-разностный метод

ВРМ лишен большинства перечисленных для МКР недостатков, поскольку основан на вариационных принципах механики. Поведение деформируемых систем в этом случае описывается условием стационарности некоторого функционала, являющегося обычно выражением потенциальной (*функционал Лагранжа*) или дополнительной (*функционал Кастилиано*) энергии системы. Это условие стационарности эквивалентно основным дифференциальным уравнениям данной задачи, но при этом дает возможность понизить порядок производных, входящих в вариационное уравнение, упрощает формулировку граничных условий (например, при использовании функционала Лагранжа статические граничные условия не рассматриваются специально, а входят в вариационное уравнение и называются *естественными*), а также позволяет удобно алгоритмизировать все этапы расчета конструкции [4, 24].

Идея ВРМ состоит в замене вариационной задачи ее дискретным аналогом в сеточной области – т. е. искомая непрерывная функция, входящая в выражение полной потенциальной энергии системы, определяется дискретно, на некотором множестве узлов. При формировании системы алгебраических уравнений исходный функционал энергии, записанный для всей области, заменяется некоторой конечной суммой, а входящие в него производные – конечными разностями. Матрица коэффициентов системы разрешающих уравнений ВРМ получается симметричной, хорошо обусловленной и имеет ленточную структуру.

ВРМ получил свое развитие благодаря первой работе в этом направлении В. Вазова и Дж. Форсайта и последующим работам Н. П. Абовского, Д. В. Вайн-берга, Л. В. Енджиевского, А. С. Сахарова, А. Л. Синявского и других авторов. В этих исследованиях был рассмотрен широкий класс задач теории упругости, а также теории пластин и оболочек со сложным характером граничных условий.

Обозначим через  $U$  – *потенциальную энергию деформации системы* (в случае изгиба балки – это энергия внутреннего изгибающего момента  $M = EJv''$ ), а через  $W$  – *возможную работу внешних сил*, которые считаются при этом неизменными как по величине, так и по направлению. Выражение  $\Pi = U - W$  называется *полной потенциальной энергией системы*. Сформулируем *вариационный принцип Лагранжа*: среди всех геометрически возможных перемещений (т. е. удовлетворяющих условиям сплошности и заданным граничным условиям) в действительности имеют место только те перемещения, которые придают потенциальной энергии системы  $\Pi$  стационарное значение (в случае устойчивого равновесия потенциальная энергия системы имеет минимальное значение).

Выражение для полной потенциальной энергии (функционал Лагранжа) представляет собой квадратичную функцию от узловых значений перемещений (прогибов  $v_i$ ), и условие минимума этой энергии может быть записано в виде

$$\frac{\partial \Pi}{\partial v_i} = 0, \text{ или } \frac{\partial U}{\partial v_i} - \frac{\partial W}{\partial v_i} = 0,$$



где  $i$  пробегает все номера узлов, принадлежащих балке при выбранном шаге разбиения. Причем ненулевые значения производная принимает лишь в узлах, для которых соответствующие выражения в конечных разностях содержат  $v_i$ .

Поясним эти рассуждения на примере задачи изгиба балки, находящейся под действием распределенной нагрузки  $p$  (рис. 1.5, а). Пусть шаги деления одинаковы и равны  $\lambda$ , а количество узлов –  $n$ .

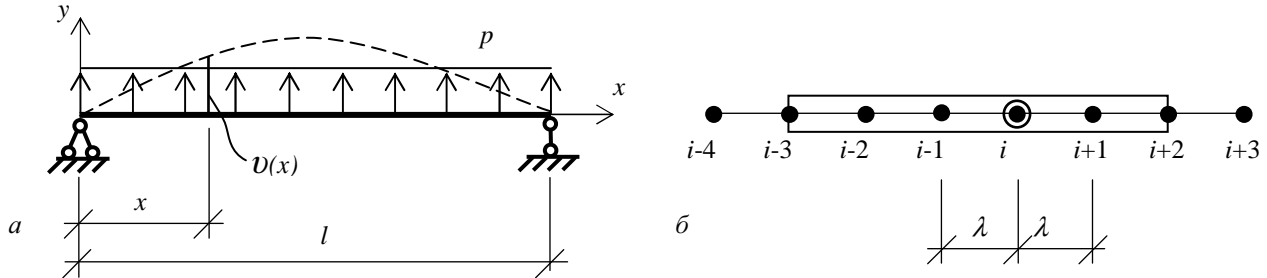


Рис. 1.5

Функционал Лагранжа в этом случае запишется так:

$$\Pi = U - W = \int_0^l \frac{[M(x)]^2}{2EJ} dx - \int_0^l v(x) p(x) dx = \frac{EJ}{2} \int_0^l \left[ \frac{d^2v}{dx^2} \right]^2 dx - \int_0^l v(x) p(x) dx. \quad (1.14)$$

При дискретизации интегралы приближенно заменяются суммированием по всем узлам, а вместо производных подставляются разностные отношения. Тогда выражение (1.14) примет следующий вид:

$$\Pi \approx \frac{EJ}{2} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{\lambda^2} \right]^2 \lambda - \sum_{i=1}^n v_i p_i \lambda, \quad (\lambda = \Delta x). \quad (1.15)$$

Перепишем выражение (1.15) в развернутом виде

$$\Pi \approx \frac{EJ}{2} \left[ \left( \frac{v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}}{\lambda^2} \right)^2 \lambda + \left( \frac{v_i - 2v_{i+1} + v_{i+2}}{\lambda^2} \right)^2 \lambda + \left( \frac{v_{i-2} - 2v_{i-1} + v_i}{\lambda^2} \right)^2 \lambda + \left( \frac{v_{i+1} - 2v_{i+2} + v_{i+3}}{\lambda^2} \right)^2 \lambda + \left( \frac{v_{i-3} - 2v_{i-2} + v_{i-1}}{\lambda^2} \right)^2 \lambda + \dots \right] - \quad (1.16)$$

$$- (v_i p_i \lambda)_i - (v_{i+1} p_{i+1} \lambda)_{i+1} - (v_{i-1} p_{i-1} \lambda)_{i-1} - (v_{i+2} p_{i+2} \lambda)_{i+2} - (v_{i-2} p_{i-2} \lambda)_{i-2} - \dots = 0$$

Здесь нижний индекс у круглых скобок указывает, к каким узлам относятся производные, т. е. какие это части потенциальной энергии.

Условие минимума полной потенциальной энергии:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial v_i} = \frac{EJ}{2} \left[ -\frac{4}{\lambda^4} (v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1}) + \frac{2}{\lambda^4} (v_i - 2v_{i+1} + v_{i+2}) + \frac{2}{\lambda^4} (v_{i-2} - 2v_{i-1} + v_i) \right] - p_i = 0. \quad (1.17)$$

При этом уравнение (1.16) сокращено на  $\lambda$  и учтено правило дифференцирования для вычисления полных дифференциалов:

$$\frac{\partial}{\partial v_i}(\phi^2) = \frac{\partial}{\partial v_i}(\phi\phi) = \phi \frac{\partial\phi}{\partial v_i} + \phi \frac{\partial\phi}{\partial v_i} = 2\phi \frac{\partial\phi}{\partial v_i},$$

где под  $\phi$  подразумеваем скобку, содержащую выражения производных в конечных разностях. Таким образом, при минимизации по  $v_i$  остались лишь скобки, содержащие  $v_i$  (для узла  $i$  и прилегающих  $i-1, i+1$ ).

Перепишем выражение (1.17) в следующем виде:

$$-2(v_{i-1} - 2v_i + v_{i+1})_i + (v_i - 2v_{i+1} + v_{i+2})_{i+1} + (v_{i-2} - 2v_{i-1} + v_i)_{i-1} = \left( \frac{p_i \lambda^4}{EJ} \right)_i. \quad (1.18)$$

Уравнением (1.18) будет удобно пользоваться, если ввести так называемые *весовые функции*  $\omega$ , зависящие от положения узла в расчетной области. Так, если узел находится внутри области –  $\omega = 1$ , на границе –  $\omega = 0,5$ , вне области –  $\omega = 0$ . Например, для узлов, приведенных на рис. 1.5, б,  $\omega_{i-2} = \omega_{i-1} = \omega_i = \omega_{i+1} = 1$ ,  $\omega_{i-3} = \omega_{i+2} = 0,5$ ,  $\omega_{i-4} = \omega_{i+3} = 0$ . В результате (1.18) можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \omega_{i-1} v_{i-2} - 2(\omega_{i-1} + \omega_i) v_{i-1} + (\omega_{i-1} + 4\omega_i + \omega_{i+1}) v_i - 2(\omega_i + \omega_{i+1}) v_{i+1} + \\ & + \omega_{i+1} v_{i+2} = \frac{p_i \lambda^4}{EJ} \omega_i. \end{aligned} \quad (1.19)$$

В частном случае, когда  $\omega_{i-1} = \omega_i = \omega_{i+1} = 1$ , уравнение (1.19) примет вид, эквивалентный выражению для четвертой разности (1.10).

### Пример расчета

Проиллюстрируем алгоритм ВРМ на примере расчета двухопорной балки (см. рис. 1.4). Запишем условие минимума полной потенциальной энергии балки, используя для этого выражение (1.19), где  $i$  последовательно принимает значения узлов с неизвестными перемещениями, т. е. 1, 2, 3:

$$\omega_0 v_{-1} - 2(\omega_0 + \omega_1) v_0 + (\omega_0 + 4\omega_1 + \omega_2) v_1 - 2(\omega_1 + \omega_2) v_2 + \omega_2 v_3 = \frac{p_1 \lambda^4}{EJ} \omega_1,$$

$$\omega_1 v_0 - 2(\omega_1 + \omega_2) v_1 + (\omega_1 + 4\omega_2 + \omega_3) v_2 - 2(\omega_2 + \omega_3) v_3 + \omega_3 v_4 = \frac{p_2 \lambda^4}{EJ} \omega_2,$$

$$\omega_2 v_1 - 2(\omega_2 + \omega_3) v_2 + (\omega_2 + 4\omega_3 + \omega_4) v_3 - 2(\omega_3 + \omega_4) v_4 + \omega_4 v_5 = \frac{p_3 \lambda^4}{EJ} \omega_3.$$

Подставим в полученные уравнения значения нагрузки  $p$  ( $p_1 = -p, p_2 = -\frac{p}{2}, p_3 = -\frac{4p}{5}$ ) и весовых функций ( $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 1, \omega_0 = \omega_4 = 0,5, \omega_{-1} = \omega_5 = 0$ ):

$$v_{-1} - 6v_0 + 11v_1 - 8v_2 + 2v_3 = -2p\lambda^4/EJ,$$

$$2v_0 - 8v_1 + 12v_2 - 8v_3 + 2v_4 = -p\lambda^4/EJ,$$

$$2v_1 - 8v_2 + 11v_3 - 6v_4 + v_5 = -8p\lambda^4/5EJ.$$

Подставив  $\lambda^4 = \frac{l^4}{256}$  и исключив неизвестные  $v_0 = v_4 = 0$ ,  $v_{-1} = -v_1$ ,  $v_5 = -v_3$ , получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 10v_1 - 8v_2 + 2v_3 = -pl^4/128 EJ ; \\ -8v_1 + 12v_2 - 8v_3 = -pl^4/256 EJ ; \\ 2v_1 - 8v_2 + 10v_3 = -8pl^4/1280 EJ . \end{cases}$$

Результатом будут такие же значения прогибов, что и при решении задачи МКР:

$$v_1 = -\frac{0,00732 pl^4}{EJ}, \quad v_2 = -\frac{0,00996 pl^4}{EJ}, \quad v_3 = -\frac{0,00712 pl^4}{EJ}.$$

В заключение данного параграфа укажем на еще один приближенный метод, в основе которого лежит вариационный принцип Лагранжа.

**Метод Ритца** позволяет получить, в отличие от большинства других методов, не числовое, а аналитическое приближенное решение вариационной задачи. Аппроксимация искомого решения здесь производится по всей расчетной области с помощью линейной комбинации независимых функций с произвольными (неизвестными) коэффициентами [18, 24, 31]. Например, для задачи изгиба балки функцию прогиба можно представить в виде

$$v(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \psi_i(x), \quad (1.20)$$

где  $\alpha_i$  – неизвестные постоянные множители, подлежащие определению;  $\psi_i$  – последовательность *аппроксимирующих (базисных)* функций, которые должны удовлетворять условиям линейной независимости и полноты, а также кинематическим граничным условиям (на опорах) [18]. Число членов  $n$  в сумме может быть различным, в зависимости от необходимой точности получаемого решения.

Если подставить аппроксимацию (1.20) в функционал полной потенциальной энергии системы (1.14), получим функцию  $n$  переменных

$$\Pi = \Pi(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n).$$

Условие минимума этой функции

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha_i} = 0, \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (1.21)$$

Выражение (1.21) является системой линейных алгебраических уравнений относительно  $\alpha_i$  (*система уравнений Ритца*). Решив систему и подставив найденные значения  $\alpha_i$  в (1.20), получим приближенное решение вариационной задачи (1.14) по Ритцу:

$$\bar{v}(x) = \Phi(x, \bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \dots, \bar{\alpha}_n).$$

### 1.2.3. Метод конечных элементов

МКЭ является одним из самых распространенных методов решения прикладных задач. Диапазон его применения чрезвычайно широк: строительство и машиностроение, гидро- и аэродинамика, горное дело и новейшая техника, а также различные задачи математической физики – теплопроводности, фильтрации, распространения волн и т. д.

Следует отметить, что возникновение МКЭ и развитие этого метода связано, прежде всего, с решением задач строительной механики и в настоящее время он успешно применяется при расчете самых разнообразных строительных конструкций как стержневых, так и континуальных.

Метод конечных элементов, как и многие другие численные методы, основан на представлении реальной *континуальной* конструкции ее *дискретной моделью* и замене дифференциальных уравнений, описывающих НДС сплошных тел, системой алгебраических уравнений. Вместе с тем МКЭ допускает ясную геометрическую, конструктивную и физическую интерпретацию.

Суть метода заключается в том, что область (одно-, двух- или трехмерная), занимаемая конструкцией, разбивается на некоторое число малых, но конечных по размерам подобластей (рис. 1.6). Последние носят название *конечных элементов* (КЭ), а сам процесс разбивки – *дискретизацией*.

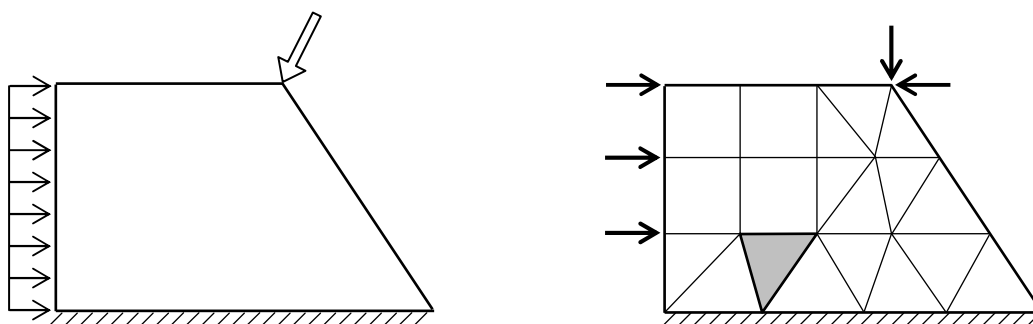


Рис. 1.6

В зависимости от типа конструкции и характера ее деформации КЭ могут иметь различную форму. Так, при расчете стержневых систем (фермы, балки, рамы) КЭ представляют собой участки стержней; для двумерных континуальных конструкций (пластины, плиты, оболочки) чаще всего применяют треугольные и прямоугольные (плоские или изогнутые) КЭ; а для трехмерных областей (толстые плиты, массивы) – КЭ в форме тетраэдра или параллелепипеда. В отличие от реального сооружения в дискретной модели конечные элементы связываются между собой только в отдельных точках (*узлах*) определенным конечным числом *узловых параметров*.

МКЭ – это вариационный метод. Функционал энергии для всей рассматриваемой области здесь представляется в виде суммы функционалов отдельных ее частей – конечных элементов. По области каждого элемента, независимо от других, задается свой закон распределения искомых функций. Такая кусочно-непрерывная аппроксимация выполняется с помощью специально подобранных аппроксимирующих функций, называемых также *координатными* или *интерполирующими*. С их помощью искомые непрерывные величины (перемещения, напряжения и т. д.) в пределах каждого КЭ выражаются через значения этих величин в узловых точках, а произвольная заданная нагрузка заменяется системой эквивалентных узловых сил.

При такой кусочно-непрерывной аппроксимации обеспечивается условие совместности лишь в узлах, а в остальных точках по границам КЭ это условие удовлетворяется в общем случае приближенно (в связи с этим различают КЭ разной степени совместности).

Наибольшее распространение получил метод конечных элементов в перемещениях, имеющий много общего с методом Ритца и ВРМ (в дальнейшем мы будем в основном рассматривать именно этот вариант МКЭ). Различие между традиционной схемой метода Ритца и МКЭ в форме метода перемещений заключается в выборе системы аппроксимирующих функций. Если в методе Ритца аппроксимация перемещений производится по всей области их определения, то в МКЭ – по каждому конечному элементу в отдельности, что позволяет использовать аппроксимирующие функции более простого вида. В первом случае функционал полной потенциальной энергии варьируется по неопределенным коэффициентам  $\alpha_i$ , во втором – по перемещениям в узлах сетки, что приводит к системе алгебраических уравнений метода перемещений (основными неизвестными являются непосредственно узловые перемещения). При этом использование кусочно-непрерывной аппроксимации позволяет получить редко заполненную или ленточную структуру матрицы коэффициентов системы уравнений и таким образом дает возможность применения более эффективных методов ее решения.

Число узлов и число перемещений в узле (*степень свободы узла*), принятые для конечного элемента, могут быть различными, однако не должны быть меньше минимально необходимых для описания напряженно-деформированного состояния КЭ в рамках принятой физической модели. Число независимых перемещений во всех узлах элемента определяет *степень свободы КЭ*. *Степень свободы всей конструкции* и соответственно порядок системы разрешающих уравнений определяется суммарным числом перемещений всех ее узлов. Поскольку основными неизвестными МКЭ в форме метода перемещений считаются узловые перемещения, степень свободы КЭ и всей конструкции в целом является чрезвычайно важным понятием в МКЭ. Понятия о степени свободы узла, КЭ и конструкции и степени их же *кинематической неопределенности* идентичны.

Способ разбивки рассматриваемой области на конечные элементы, их число и число степеней свободы, а также вид аппроксимирующих функций в конечном итоге определяют точность расчета конструкции. Следует отметить, что простым увеличением числа конечных элементов не всегда удается достичь повышения точности расчетов. Вопросы устойчивости и сходимости решения, а также оценки точности полученных результатов являются основными при использовании МКЭ.

По сравнению с другими численными методами МКЭ в лучшей степени алгоритмизирован и более гибок при описании геометрии и граничных условий рассматриваемой области. Кроме того, к достоинствам метода следует отнести его физическую наглядность и универсальность.

Применительно к стержневым системам МКЭ в форме метода перемещений может рассматриваться как матричная форма классического метода перемещений, отличающаяся только более глубокой формализацией алгоритма и ориентацией его на использование ЭВМ.

Существенный вклад в развитие МКЭ внесли российские и зарубежные ученые В. Г. Корнеев, А. М. Масленников, В. А. Постнов, Л. А. Розин, А. С. Сахаров, Н. Н. Шапошников, Дж. Аргирис, Ф. де Вебеке, Р. Галлагер, Ж. Деклу, О. Зенкевич, Р. Клаф, Дж. Оден, Г. Стренг, М. Тернер, Дж. Фикс, И. Чанг и многие другие.

К настоящему времени имеется большое количество изданий, посвященных как теоретическим, так и прикладным вопросам МКЭ. К числу наиболее известных изданий на русском языке можно отнести [3, 5, 9, 16, 17, 19, 26, 27, 28].

### **Последовательность действий при решении задачи МКЭ:**

- 1) построение математической модели задачи – в случае МКЭ в форме метода перемещений чаще всего используется вариационный принцип Лагранжа (условие минимума потенциальной энергии системы);
- 2) введение аппроксимирующих функций, т. е. аппроксимация искомых функций в пределах КЭ через значения переменных в его узлах;
- 3) дискретизация рассматриваемой конструкции, т. е. замена континуальной области совокупностью КЭ заданной формы, соединенных между собой в узлах конечным числом связей;
- 4) построение матриц жесткости и векторов нагрузки (приведение местной нагрузки к узловой) для каждого КЭ;
- 5) формирование глобальной матрицы жесткости и вектора узловых сил, т. е. системы разрешающих уравнений для конструкции в целом;
- 6) учет граничных условий для рассматриваемой области путем корректировки глобальной матрицы жесткости и вектора нагрузки;
- 7) решение полученной системы алгебраических уравнений;
- 8) определение необходимых компонентов напряженно-деформированного состояния (перемещений, деформаций, напряжений) конструкции через поэлементный их расчет в соответствии с физической моделью задачи.

## Конечный элемент изгибаемого стержня

Рассмотрим порядок построения матриц жесткости и векторов нагрузки конечных элементов, отложив пока вопрос о том, как они используются при решении задач МКЭ. Покажем это на примере изгибаемого стержня (рис. 1.7), применяемого для расчета плоских балок прямолинейного очертания.

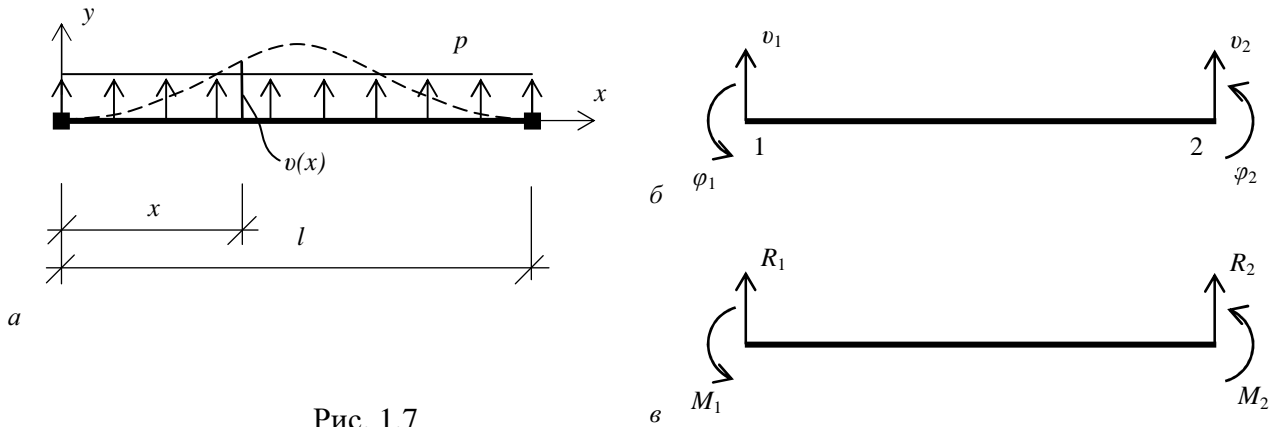


Рис. 1.7

Дифференциальное уравнение изогнутой оси балки, как известно, содержит четвертую производную от искомой функции прогиба:

$$\frac{d^4 v}{dx^4} = \frac{p}{EJ}.$$

Поэтому в пределах КЭ в качестве интерполирующей функции для прогиба используем полином третьей степени:

$$v(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 = [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3] \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\psi} \boldsymbol{\alpha}. \quad (1.22)$$

Здесь  $\boldsymbol{\psi}$  – матрица-строка членов интерполирующего полинома для КЭ;  $\boldsymbol{\alpha}$  – вектор коэффициентов интерполирующего полинома.

Число независимых коэффициентов  $\alpha_i$  в полиноме (размерность вектора  $\boldsymbol{\alpha}$ ) равно 4, что определяет число степеней свободы данного КЭ. Принимая во внимание, что балочный КЭ содержит 2 узла, имеем в каждом по 2 степени свободы, соответствующие вертикальному перемещению (прогибу)  $v$  и углу

поворота сечения  $\varphi = \frac{dv}{dx}$  (рис. 1.7, б).

Введем вектор обобщенных перемещений произвольной точки КЭ –  $\boldsymbol{u}$ :

$$\boldsymbol{u} = \begin{Bmatrix} v \\ \varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} v \\ \frac{dv}{dx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\psi} \\ \frac{d\boldsymbol{\psi}}{dx} \end{bmatrix} \boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix}. \quad (1.23)$$

Для определения неизвестных коэффициентов  $\alpha_i$  подставим в (1.23) граничные условия для балочного КЭ (рис. 1.7, а):

$$\text{при } x = 0: v(0) = v_1, \varphi(0) = \left. \frac{dv}{dx} \right|_0 = \varphi_1;$$

$$\text{при } x = l: v(l) = v_2, \varphi(l) = \left. \frac{dv}{dx} \right|_l = \varphi_2.$$

Получим следующую систему уравнений:

$$\mathbf{q}^e = \begin{Bmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = \mathbf{C} \boldsymbol{\alpha},$$

где  $\mathbf{q}^e$  – вектор обобщенных узловых перемещений (верхний индекс  $e$  обозначает принадлежность данных параметров отдельному КЭ);  $\mathbf{C}$  – матрица коэффициентов, зависящая от координат узлов КЭ.

Решив эту систему, получим

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{l^2} & -\frac{2}{l} & \frac{3}{l^2} & -\frac{1}{l} \\ \frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2} & -\frac{2}{l^3} & \frac{1}{l^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{q}^e.$$

Подставив вектор  $\boldsymbol{\alpha}$  в (1.22) и перемножив матрицы  $\boldsymbol{\psi}$  и  $\mathbf{C}^{-1}$ , получим следующее фундаментальное представление искомой непрерывной величины  $v(x)$  через значения обобщенных перемещений в узловых точках конечного элемента (вектор  $\mathbf{q}^e$ ):

$$v(x) = \boldsymbol{\psi} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{q}^e = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \begin{Bmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{q}^e. \quad (1.24)$$

Здесь  $\mathbf{N}$  – матрица функций формы КЭ. Входящие в нее функции формы  $N_i$  представляют собой так называемые полиномы Эрмита, подстрочный индекс соответствует порядковому номеру (в векторе  $\mathbf{q}$ ) обобщенного узлового перемещения, к которому эта функция относится:

$$N_1 = \left(1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3}\right); \quad N_2 = \left(x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}\right); \quad N_3 = \left(\frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3}\right); \quad N_4 = \left(-\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2}\right).$$



Каждая из функций формы  $N_i$  описывает распределение перемещений  $v(x)$  в балочном КЭ, когда соответствующее этой функции формы –  $i$ -е обобщенное узловое перемещение – равно единице, а остальные – равны нулю (рис. 1.8).

Запишем теперь вариационную постановку для задачи изгиба балки, состоящей из  $s$  элементов. Полная потенциальная энергия системы КЭ

$$\Pi = \sum_{e=1}^s \Pi^e = \sum_{e=1}^s \left( \frac{EJ}{2} \int_0^l \left[ \frac{d^2 v}{dx^2} \right]^2 dx - \int_0^l v p dx \right).$$

Вклад отдельного стержневого элемента с учетом аппроксимации (1.24):

$$\begin{aligned} \Pi^e &= \frac{EJ}{2} \int_0^l \left[ \frac{d^2 N}{dx^2} \mathbf{q}^e \right]^2 dx - \int_0^l N \mathbf{q}^e p dx = \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{q}^e)^T \mathbf{K}^e \mathbf{q}^e - (\mathbf{q}^e)^T \mathbf{P}^e. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Здесь матрица  $\mathbf{K}^e$  называется *матрицей жесткости* (МЖ) конечного элемента, а вектор  $\mathbf{P}^e$  – *вектором нагрузки* (ВН) элемента.

На базе элементных МЖ и ВН в порядке, изложенном далее, формируются *глобальная матрица жесткости* системы элементов  $\mathbf{K}$  и *глобальный вектор узловых сил*  $\mathbf{P}$ . Тогда аналогично выражению (1.25) функционал полной потенциальной энергии системы элементов можно записать в следующем виде:

$$\Pi = \frac{1}{2} (\mathbf{q})^T \mathbf{K} \mathbf{q} - (\mathbf{q})^T \mathbf{P}. \quad (1.26)$$

Здесь  $\mathbf{q}$  – *глобальный вектор узловых перемещений системы*.

Условие стационарности функционала (1.26) согласно правилам матричного дифференцирования

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{K} \mathbf{q} - \mathbf{P} = \mathbf{0}. \quad (1.27)$$

Матричное уравнение (1.27) носит название *системы разрешающих уравнений МКЭ* и представляет собой систему уравнений равновесия во всех узлах дискретной схемы, записанных относительно компонентов перемещений этих узлов.

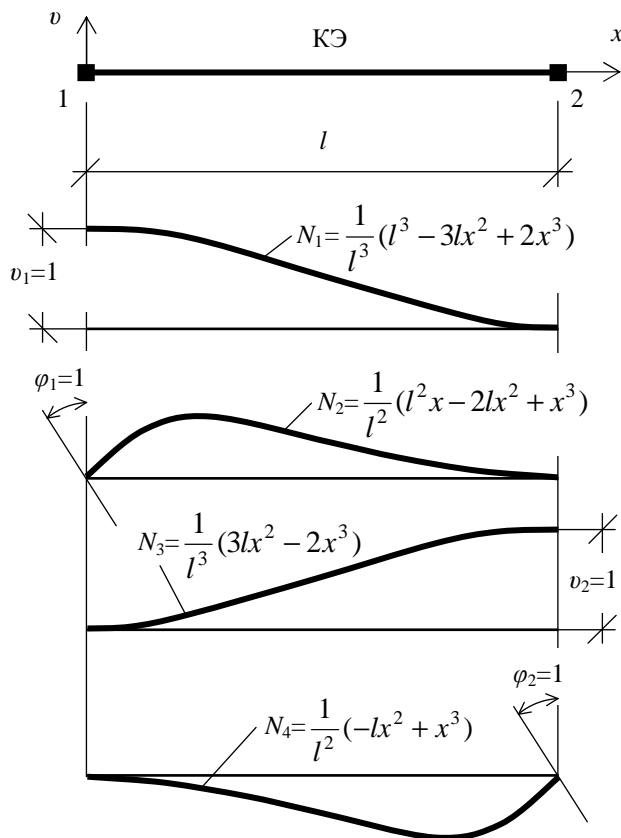


Рис. 1.8

Продифференцировав выражение (1.25) по вектору  $\mathbf{q}^e$ , получим вклад каждого КЭ в систему уравнений (1.27):

$$\frac{\partial \Pi^e}{\partial \mathbf{q}^e} = EJ \int_0^l \frac{d^2 \mathbf{N}^T}{dx^2} \frac{d^2 \mathbf{N}}{dx^2} dx \mathbf{q}^e - \int_0^l \mathbf{N}^T p dx = \mathbf{K}^e \mathbf{q}^e - \mathbf{P}^e. \quad (1.28)$$

Вычислим матрицу жесткости балочного КЭ, при этом обозначив вторую производную от  $i$ -й функции формы как  $N_i'' = \frac{d^2 N_i}{dx^2}$ .

$$\mathbf{K}^e = EJ \int_0^l \frac{d^2 \mathbf{N}^T}{dx^2} \frac{d^2 \mathbf{N}}{dx^2} dx = EJ \int_0^l \begin{bmatrix} N_1'' \\ N_2'' \\ N_3'' \\ N_4'' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1'' & N_2'' & N_3'' & N_4'' \end{bmatrix} dx = EJ \int_0^l \begin{bmatrix} N_1'' N_1'' & N_1'' N_2'' & N_1'' N_3'' & N_1'' N_4'' \\ N_2'' N_1'' & N_2'' N_2'' & N_2'' N_3'' & N_2'' N_4'' \\ N_3'' N_1'' & N_3'' N_2'' & N_3'' N_3'' & N_3'' N_4'' \\ N_4'' N_1'' & N_4'' N_2'' & N_4'' N_3'' & N_4'' N_4'' \end{bmatrix} dx.$$

Подставим в квадратную матрицу, стоящую под интегралом, выражения вторых производных от функций формы:

$$N_1'' = -\frac{6}{l^2} + \frac{12x}{l^3}; \quad N_2'' = -\frac{4}{l} + \frac{6x}{l^2}; \quad N_3'' = \frac{6}{l^2} - \frac{12x}{l^3}; \quad N_4'' = -\frac{2}{l} + \frac{6x}{l^2}.$$

Проинтегрировав каждый элемент матрицы, получим

$$\mathbf{K}^e = \frac{2EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 6 & 3l & -6 & 3l \\ 3l & 2l^2 & -3l & l^2 \\ -6 & -3l & 6 & -3l \\ 3l & l^2 & -3l & 2l^2 \end{bmatrix}. \quad (1.29)$$

Матрица жесткости КЭ всегда симметричная и квадратная, размерностью  $n \times n$ , где  $n$  – число степеней свободы (обобщенных узловых перемещений) элемента. Хорошо видно, что МЖ является особенной (вырожденной), поскольку ее 1-я строка эквивалентна 3-й, а 2-я эквивалентна 4-й, т. е. два уравнения из четырех в (1.29) оказываются линейно зависимыми. Физический смысл вырожденности состоит в возможности смещения балочного КЭ как жесткого целого, в связи с чем на перемещения элемента необходимо наложить не менее двух связей.

Определим вектор нагрузки КЭ, приняв при этом  $p = \text{const}$  и проинтегрировав соответствующие функции формы:

$$\mathbf{P}^e = \int_0^l \mathbf{N}^T p dx = p \int_0^l \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} dx = \frac{pl}{12} \begin{Bmatrix} 6 \\ l \\ 6 \\ -l \end{Bmatrix}. \quad (1.30)$$

Запишем матричное выражение (1.28) в следующем виде:

$$\mathbf{K}^e \mathbf{q}^e - \mathbf{P}^e = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix}. \quad (1.31)$$

Нетрудно заметить, что узловые силы  $P_i$  равны реакциям (с обратным знаком) по концам защемленного стержня соответственно по направлениям  $i$ -х обобщенных перемещений от действия постоянной распределенной нагрузки  $p$  (см. рис. 1.7, *a*). Из курса строительной механики стержневых систем можно получить и значения элементов матрицы жесткости  $k_{ij}$ , связывающих узловые силы с перемещениями в пределах КЭ. Физический смысл коэффициента  $k_{ij}$  точно такой же, как в канонических уравнениях метода перемещений, – это реакция по направлению  $i$  от единичного перемещения в направлении  $j$ .

Сказанное еще раз подтверждает то, что МКЭ для стержневых систем – это по существу матричная форма традиционного метода перемещений. Однако, несмотря на то, что основанный на этом положении способ построения матрицы жесткости и вектора нагрузки наиболее прост, общим подходом все же является использование вариационных принципов строительной механики (в особенности для континуальных систем).

Как уже отмечалось, МЖ конечного элемента в (1.31) является вырожденной, при этом наложение связей по направлению узловых перемещений (не менее двух) приводит к невырожденной матрице. Во введенных связях возникают узловые реактивные силы (см. рис. 1.7, *в*), вызванные действительными узловыми перемещениями  $q_1, q_2, q_3, q_4$  и местной нагрузкой  $p$ . Учитывая, к примеру, что  $i$ -я реакция, вызванная перемещением  $q_j$ , равна произведению  $k_{ij} q_j$ , а реакция от нагрузки  $p$  – узловой силе  $P_i$  с обратным знаком, можно записать

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ M_1 \\ R_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{Bmatrix}.$$

Тогда при известных узловых перемещениях вектор внутренних усилий  $\mathbf{S}^e$  балочного КЭ, компонентами которого являются концевые значения поперечной силы  $Q$  и изгибающего момента  $M$ , равен

$$\mathbf{S}^e = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ -M_1 \\ -R_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \frac{2EJ}{l^3} \begin{Bmatrix} 6(v_1 - v_2) + 3l(\varphi_1 + \varphi_2) \\ -3l(v_1 - v_2) - l^2(2\varphi_1 + \varphi_2) \\ 6(v_1 - v_2) + 3l(\varphi_1 + \varphi_2) \\ 3l(v_1 - v_2) + l^2(\varphi_1 + 2\varphi_2) \end{Bmatrix} - \frac{pl}{12} \begin{Bmatrix} 6 \\ -l \\ -6 \\ -l \end{Bmatrix}. \quad (1.32)$$

Следует также отметить, что при реализации МКЭ матрицу жесткости, вектор нагрузки и вектор узловых перемещений КЭ удобно представлять в блочном виде. Так, для  $k$ -го элемента с узлами  $l$  и  $m$  будет иметь место

$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{ll}^{(k)} & \mathbf{K}_{lm}^{(k)} \\ \mathbf{K}_{ml}^{(k)} & \mathbf{K}_{mm}^{(k)} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{q}^e = \begin{Bmatrix} q_l^{(k)} \\ q_m^{(k)} \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{P}^e = \begin{Bmatrix} P_l^{(k)} \\ P_m^{(k)} \end{Bmatrix}. \quad (1.33)$$

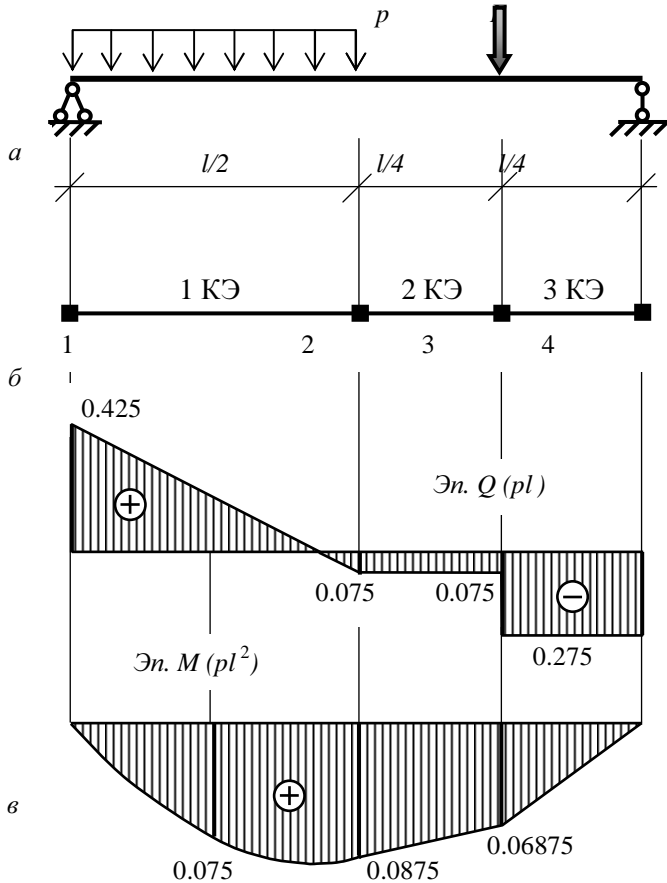


Рис. 1.9

### Пример расчета

Рассмотрим задачу изгиба балки постоянной жесткости (рис. 1.9). В предыдущих параграфах приведено решение этой задачи МКР и ВРМ. Выполним расчет балки МКЭ в порядке, изложенном выше.

**1-2. Построение математической модели задачи и аппроксимация перемещений** в пределах КЭ реализованы ранее, результатом являются выражения для МЖ и ВН балочного элемента (1.29) и (1.30).

**3. Дискретизация рассматриваемой конструкции.** Разбиение балки на КЭ производится так же, как и деление на участки при построении эпюр внутренних усилий. Примем дискретную схему, состоящую из трех КЭ, пронумеруем узлы и элементы (рис. 1.9, б).

**4. Составление МЖ и ВН для каждого КЭ.** Рассмотрим КЭ по порядку, принимая  $EJ = \text{const}$ .

1-й элемент:  $l_1 = 0.5l$ ;  $p_1 = -p$ ; узлы 1 и 2. Подставим их в (1.29) и (1.30):

$$\mathbf{K}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^{(1)} & \mathbf{K}_{12}^{(1)} \\ \mathbf{K}_{21}^{(1)} & \mathbf{K}_{22}^{(1)} \end{bmatrix} = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 96 & 24l & -96 & 24l \\ 24l & 8l^2 & -24l & 4l^2 \\ -96 & -24l & 96 & -24l \\ 24l & 4l^2 & -24l & 8l^2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{P}^{(1)} = \begin{Bmatrix} P_1^{(1)} \\ P_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \frac{ql}{48} \begin{Bmatrix} 12 \\ l \\ 12 \\ -l \end{Bmatrix}.$$

2-й элемент:  $l_2 = 0.25l$ ;  $p_2 = 0$ ; узлы 2 и 3. Составим МЖ и ВН:

$$\mathbf{K}^{(2)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{22}^{(2)} & \mathbf{K}_{23}^{(2)} \\ \mathbf{K}_{32}^{(2)} & \mathbf{K}_{33}^{(2)} \end{bmatrix} = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 768 & 96l & -768 & 96l \\ 96l & 16l^2 & -96l & 8l^2 \\ -768 & -96l & 768 & -96l \\ 96l & 8l^2 & -96l & 16l^2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{P}^{(2)} = \begin{Bmatrix} P_2^{(2)} \\ P_3^{(2)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

3-й элемент:  $l_3 = 0.25l$ ;  $q_3 = 0$ ; узлы 3 и 4. Вычисляем МЖ и ВН:

$$\mathbf{K}^{(3)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{33}^{(3)} & \mathbf{K}_{34}^{(3)} \\ \mathbf{K}_{43}^{(3)} & \mathbf{K}_{44}^{(3)} \end{bmatrix} = \frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 768 & 96l & -768 & 96l \\ 96l & 16l^2 & -96l & 8l^2 \\ -768 & -96l & 768 & -96l \\ 96l & 8l^2 & -96l & 16l^2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{P}^{(3)} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_3^{(3)} \\ \mathbf{P}_4^{(3)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

**5. Формирование глобальной матрицы жесткости и вектора узловых сил для всей конструкции** заключается в соединении отдельных КЭ, для которых вычислены МЖ и ВН, при обеспечении условий их статической совместности во всех узлах дискретной схемы. Объединение элементов может быть выполнено разными способами. Самый наглядный и простой – способ непосредственного сложения жесткостей. Для проведения суммирования необходимо выполнить группировку КЭ по узлам дискретной схемы. В этом случае глобальная матрица жесткости имеет следующий вид:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \mathbf{K}_{13} & \mathbf{K}_{14} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} & \mathbf{K}_{23} & \mathbf{K}_{24} \\ \mathbf{K}_{31} & \mathbf{K}_{32} & \mathbf{K}_{33} & \mathbf{K}_{34} \\ \mathbf{K}_{41} & \mathbf{K}_{42} & \mathbf{K}_{43} & \mathbf{K}_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^{(1)} & \mathbf{K}_{12}^{(1)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{21}^{(1)} & (\mathbf{K}_{22}^{(1)} + \mathbf{K}_{22}^{(2)}) & \mathbf{K}_{23}^{(2)} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{32}^{(2)} & (\mathbf{K}_{33}^{(2)} + \mathbf{K}_{33}^{(3)}) & \mathbf{K}_{34}^{(3)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{43}^{(3)} & \mathbf{K}_{44}^{(3)} \end{bmatrix}.$$

При этом учтено, что блоки  $\mathbf{K}_{13}$ ,  $\mathbf{K}_{14}$ ,  $\mathbf{K}_{24}$ ,  $\mathbf{K}_{31}$ ,  $\mathbf{K}_{41}$ ,  $\mathbf{K}_{42}$  не содержит ни одна из элементных МЖ, т. е. конечных элементов, содержащих одновременно узлы 1 и 3, 1 и 4, 2 и 4, в дискретной схеме нет.

Аналогично запишем вектор узловых сил для всей системы элементов:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}_3 \\ \mathbf{P}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1^{(1)} \\ (\mathbf{P}_2^{(1)} + \mathbf{P}_2^{(2)}) \\ (\mathbf{P}_3^{(2)} + \mathbf{P}_3^{(3)}) \\ \mathbf{P}_4^{(3)} \end{bmatrix}.$$

Подставив соответствующие блоки в приведенные выражения, получим следующую систему разрешающих уравнений:

$$\frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 96 & 24l & -96 & 24l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 24l & 8l^2 & -24l & 4l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -96 & -24l & 864 & 72l & -768 & 96l & 0 & 0 \\ 24l & 4l^2 & 72l & 24l^2 & -96l & 8l^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -768 & -96l & 1536 & 0 & -768 & 96l \\ 0 & 0 & 96l & 8l^2 & 0 & 32l^2 & -96l & 8l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -768 & -96l & 768 & -96l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 96l & 8l^2 & -96l & 16l^2 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \\ v_3 \\ \varphi_3 \\ v_4 \\ \varphi_4 \end{Bmatrix} = \frac{pl}{48} \begin{Bmatrix} -12 \\ -l \\ -12 \\ l \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Полученная глобальная матрица жесткости имеет ленточную структуру и так же, как и МЖ конечного элемента, является симметричной и вырожденной. Корректировка этой матрицы при учете кинематических граничных условий приводит к невырожденной системе линейных алгебраических уравнений.

**6. Учет граничных условий.** Статические граничные условия учитываются путем добавления в вектор узловых сил  $P$ , т. е. в правую часть системы уравнений компонентов внешней узловой нагрузки, действующих по направлению соответствующих узловых перемещений (сосредоточенной силы  $F$  и момента  $M$ ). В нашем случае к узлу 3 приложена сила  $F_3 = \frac{pl}{5}$ , соответственно в блок  $P_3$  записываются следующие компоненты узловой нагрузки:

$$P_3 = \begin{bmatrix} F_3 \\ M_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2pl \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{pl}{48} \begin{bmatrix} -9.6 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Кинематические граничные условия, т. е. заданные узловые перемещения для рассматриваемой балки, следующие:  $v_1 = v_4 = 0$ . Нулевые значения неизвестных могут быть учтены путем исключения из системы соответствующих этим неизвестным уравнений, в данном случае 1-го и 7-го. Подобная корректировка позволяет освободиться от взаимно зависимых уравнений (при изгибе балки их два) и делает глобальную матрицу жесткости невырожденной.

Исключение  $i$ -го неизвестного из системы уравнений можно выполнить одним из следующих способов:

- вычеркнуть, т. е. удалить  $i$ -ю строку и  $i$ -й столбец из матрицы жесткости и  $i$ -й элемент из векторов неизвестных (узловых перемещений) и правых частей (узловых сил);
- обнулить (за исключением главного диагонального элемента, который положить равным 1)  $i$ -ю строку и  $i$ -й столбец матрицы жесткости, а также  $i$ -й элемент вектора правых частей.

Таким образом, после добавления в правую часть системы уравнений узловой нагрузки  $P_3$  и исключения (вторым способом) 1-го и 7-го неизвестных получим систему линейных алгебраических уравнений в таком виде:

$$\frac{EJ}{l^3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8l^2 & -24l & 4l^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -24l & 864 & 72l & -768 & 96l & 0 & 0 \\ 0 & 4l^2 & 72l & 24l^2 & -96l & 8l^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -768 & -96l & 1536 & 0 & 0 & 96l \\ 0 & 0 & 96l & 8l^2 & 0 & 32l^2 & 0 & 8l^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 96l & 8l^2 & 0 & 16l^2 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \\ v_3 \\ \varphi_3 \\ v_4 \\ \varphi_4 \end{Bmatrix} = \frac{pl}{48} \begin{Bmatrix} 0 \\ -l \\ -12 \\ l \\ -9.6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Матрица коэффициентов при этом осталась симметричной, ленточной структуры, но теперь является также и положительно определенной.

**7. Решение системы уравнений.** В результате получаем следующие значения узловых перемещений:

$$\begin{Bmatrix} v_1 \\ \varphi_1 \\ v_2 \\ \varphi_2 \\ v_3 \\ \varphi_3 \\ v_4 \\ \varphi_4 \end{Bmatrix} = \frac{pl^3}{EJ} \begin{Bmatrix} 0 \\ -0.03125 \\ -0.00938 \ l \\ 0.00104 \\ -0.00658 \ l \\ 0.02057 \\ 0 \\ 0.02917 \end{Bmatrix}.$$

**8. Определение внутренних усилий в узлах конечных элементов.**

Выполним расчет для 1-го элемента, используя с этой целью выражение (1.32):

$$S^{(1)} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}^{(1)} = \frac{2EJ}{l_1^3} \begin{Bmatrix} 6(v_1 - v_2) + 3l_1(\varphi_1 + \varphi_2) \\ -3l(v_1 - v_2) - l_1^2(2\varphi_1 + \varphi_2) \\ 6(v_1 - v_2) + 3l_1(\varphi_1 + \varphi_2) \\ 3l(v_1 - v_2) + l_1^2(\varphi_1 + 2\varphi_2) \end{Bmatrix} - \frac{p_1 l_1}{12} \begin{Bmatrix} 6 \\ -l_1 \\ -6 \\ -l_1 \end{Bmatrix}.$$

Подставив  $l_1 = 0.5l$ ,  $p_1 = -p$ , а также значения узловых перемещений в данном элементе, получим

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix}^{(1)} = 4pl \begin{Bmatrix} 24(0 + 0.00938) + 6(-0.03125 + 0.00104) \\ -6l(0 + 0.00938) - l(-0.0625 + 0.00104) \\ 24(0 + 0.00938) + 6(-0.03125 + 0.00104) \\ 6l(0 + 0.00938) + l(-0.03125 + 0.00208) \end{Bmatrix} + \frac{pl}{48} \begin{Bmatrix} 12 \\ -l \\ -12 \\ -l \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.425 \ pl \\ 0 \\ -0.075 \ pl \\ 0.0875 \ pl^2 \end{Bmatrix}.$$

Аналогично вычисляются внутренние усилия и для остальных конечных элементов рассматриваемой балки. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов приведены на рис. 1.9, в. Следует отметить, что результаты расчета балки по МКЭ (как перемещения, так и внутренние усилия) в точности совпадают с решением, полученным при использовании традиционных методов сопротивления материалов и строительной механики [2, 29].

Таким образом, в этой главе на примере расчета простой балки были представлены наиболее характерные для задач механики деформируемого твердого тела численные методы. В следующем разделе перейдем к более детальному изучению наиболее популярного из этих методов – МКЭ. Будет рассмотрено применение этого метода к расчету стержневых систем, а также двумерных континуальных задач теории упругости, изгиба плит, оболочек.

## 2. ПРИМЕНЕНИЕ МКЭ К РАСЧЕТУ КОНСТРУКЦИЙ

Метод конечных элементов впервые был применен в инженерной практике в начале 50-х гг. XX в. Первоначально он развивался по двум независимым друг от друга направлениям – инженерному и математическому. На раннем этапе формулировки МКЭ основывались на принципах строительной механики, что ограничивало сферу его применения. И только когда были сформулированы основы метода в вариационной форме, стало возможным распространение его на многие другие задачи. Быстрое развитие МКЭ шло параллельно с прогрессом современной компьютерной техники и ее применением в различных областях науки и инженерной практики.

Значительный вклад в разработку МКЭ был сделан Дж. Аргирисом. Им впервые дана общая матричная формулировка расчета стержневых систем на базе фундаментальных энергетических принципов, определена матрица податливости, а также введено понятие матрицы жесткости (как обратной матрице податливости). Работы Дж. Аргириса и его сотрудников, опубликованные в период 1954–1960 гг., дали отправную точку для матричной формулировки известных численных методов и применения ЭВМ в расчетах конструкций.

Для развития МКЭ особое значение имели вариационные принципы механики и математические методы, основанные на этих принципах. Дискретизацию задачи на основе вариационного метода Ритца впервые в 1943 г. применил Р. Куррант. Лишь в 50-е гг. появились аналогичные работы Ж. Поли, Ж. Герша и др.

Первая работа, в которой была изложена современная концепция МКЭ, относится к 1956 г. Американские ученые М. Тэрнер, Р. Клафф, Г. Мартин и Л. Топп, решая плоскую задачу теории упругости, ввели элемент треугольного вида, для которого сформировали матрицу жесткости и вектор узловых сил. Название – *метод конечных элементов* ввел в 1960 г. Р. Клафф. В период 1960–1965 гг. опубликованы работы, в которых на основе вариационных принципов получены конечные элементы для решения задач изгиба плит, тонких оболочек, массивов. Среди них можно отметить работы Р. Мак-Лейа, Р. Мелоша, Дж. Бесселина, Ф. де Веубеке, М. Джонса, Т. Пиана. В 1967 г. издана первая монография о МКЭ О. Зенкевича и И. Чанга, в которой изложены основы метода и области его применения.

К семидесятым годам относится появление математической теории конечных элементов. Здесь можно выделить труды И. Бабушки, Р. Галлагера, Ж. Деклу, Дж. Одена, Г. Стренга, Дж. Фикса. Значительный вклад в разработку теоретических основ МКЭ внесли и российские ученые. В. Г. Корнеев указал на совпадение математической сущности МКЭ и ВРМ. Сопоставление МКЭ с рядом вариационных методов приведено в трудах Л. А. Розина [24, 25]. Под руководством А. С. Сахарова разработана моментная схема конечных элементов [15].

Период последних десятилетий особенно характерен для развития и применения МКЭ в таких областях механики сплошных сред, как оптимальное проектирование, учет нелинейного поведения, динамика конструкций и т. п.



## 2.1. Основные положения МКЭ

### 2.1.1. Различные виды и формы МКЭ

#### Виды МКЭ

По способу получения основных, т. е. разрешающих, уравнений различают четыре основных вида метода конечных элементов: прямой, вариационный, взвешенных невязок и энергетического баланса.

**Прямой метод** аналогичен матричному методу перемещений для стержневых систем, в основе его лежат положения, которые использовались на ранней стадии развития МКЭ. Этот метод удобен своей простотой и очевидным геометрическо-физическим значением отдельных шагов аппроксимации. Соотношения для КЭ здесь строятся непосредственно на основе трех групп уравнений (*трех сторон задачи*): *статической, геометрической и физической*. Однако область применения прямого метода весьма ограничена: его можно использовать лишь для конечных элементов простой геометрии с малым числом степеней свободы в узле [5, 10, 27].

**Вариационный метод** основан на принципах стационарности некоторой переменной, зависящей от одной или нескольких функций (такая переменная носит название *функционала*). Применительно к механике деформируемого твердого тела эта переменная представляет собой потенциальную (*функционал Лагранжа*) или дополнительную (*функционал Кастилиано*) энергию системы или формируется на основе этих двух энергий (*функционалы Хеллингера-Рейсснера, Ху-Вашицу*). Если в функционал подставить аппроксимирующие выражения искомых функций и применить к нему экстремальные принципы (соответственно *принцип Лагранжа, принцип Кастилиано* и т. д.), получим систему алгебраических уравнений, решением которой будут значения узловых неизвестных. В отличие от прямого вариационный метод может одинаково успешно применяться как к простым, так и сложным задачам [5, 11, 25, 27, 28].

**Метод невязок** представляет собой наиболее общий подход к построению основных соотношений МКЭ [5, 11, 16, 24, 27]. Этот метод целесообразно применять при решении задач, у которых трудно или невозможно сформулировать вариационное уравнение, т. е. функционал. Суть метода взвешенных невязок заключается во введении некоторой *невязки* – отклонении приближенного аппроксимативного решения от точного решения дифференциальных уравнений для данной задачи. Чтобы получить "наилучшее" решение, необходимо минимизировать некоторый интеграл от невязок по расчетной области. Для повышения эффективности в подынтегральное выражение наряду с самой невязкой обычно вводится так называемая *весовая функция*, в этом случае метод называется *методом взвешенных невязок*. Выбор схемы минимизации и весовых функций определяет различные варианты метода невязок. Наиболее часто применяемые из них – это *метод Галеркина*, который приводит к тем же уравнениям, что и вариационный подход, а также *метод наименьших квадратов*.

**Метод энергетического баланса** (*метод Одена*) основан на балансе различных видов энергии, записанном в интегральной форме. Этот метод успешно применяется при решении нелинейных и динамических задач [16, 17].

Из приведенных видов МКЭ в строительной механике особенно актуальны вариационный метод и метод взвешенных невязок Галеркина, которые для рассматриваемой задачи представляют собой два взаимно дополняющих метода одинаковой точности. Широкое применение этих методов обусловлено тем, что выражения в функционале или во взвешенном интеграле, как правило, имеют низший порядок производных по сравнению с производными в соответствующем дифференциальном уравнении для данной задачи. Это позволяет выбирать аппроксимирующие функции из более широкого семейства простых функций. Можно сказать, что вариационный вид МКЭ вышел из классического метода Ритца, а метод Галеркина – из обобщенного метода Бубнова-Галеркина. В принципе, из других методов также выводятся соответствующие виды МКЭ, однако их применяют значительно реже.

### **Формы МКЭ**

В МКЭ, аналогично классическим методам строительной механики, за основные неизвестные могут приниматься величины разного типа: кинематические (перемещения, деформации), статические (внутренние силы, напряжения и др.) или смешанные кинематические и статические параметры. В зависимости от выбора узловых неизвестных различают три формы МКЭ: метод перемещений, метод сил и смешанный метод. С этой точки зрения МКЭ можно рассматривать как обобщение традиционных методов строительной механики стержневых систем применительно к расчету континуальных систем [5, 24, 27, 28].

**Метод перемещений** – в настоящее время наиболее распространенная форма МКЭ. Это объясняется тем, что для заданной конструкции легче получить кинематически определимую основную систему метода перемещений, нежели статически определимую основную систему метода сил. Кроме того, матрица жесткости метода перемещений составляется без особых затруднений и, как правило, имеет разреженную или ленточную структуру.

В основе математической формулировки МКЭ в форме метода перемещений лежит *вариационный принцип Лагранжа*, т. е. *принцип минимума потенциальной энергии системы*. Основными неизвестными здесь являются перемещения узловых точек дискретной схемы, напряжения же вторичны и определяются путем численного дифференцирования перемещений.

К достоинствам метода относятся: простота реализации; удовлетворительные точность и устойчивость решения с гарантированной сходимостью к нижней границе. Минусы: точность определения напряжений намного ниже, чем перемещений, хотя именно значения напряжений важны при прочностных расчетах, к тому же поскольку приближенное решение отвечает нижней границе, то значения и перемещений, и напряжений оказываются заниженными.

*Принцип минимума дополнительной энергии* и связанные с ним схемы МКЭ в форме *метода сил*, а также *вариационный принцип*

*Рейсснера (смешанный метод)* не получили такого широкого распространения. Однако во многих случаях они могут быть эффективны, особенно в отношении вычисления напряжений. К тому же выполнение двойственных расчетов на основе альтернативных форм МКЭ позволяет, как правило, получить двухстороннюю оценку точного решения соответствующей задачи [5, 27].

Главным плюсом МКЭ в форме *метода сил* является то, что основные неизвестные здесь – напряжения. И если бы в реализации метода сил не было определенных сложностей, значения напряжений можно было получать той же степени точности, что и перемещения в методе перемещений. Кроме того, использование принципа Кастилиано дает верхнюю границу приближенного решения (т. е. напряжения завышены), что в принципе лучше при расчетах на прочность, нежели заниженная оценка. Тем не менее, пока нет алгоритмов, в той же степени простых и устойчивых, имеющих гарантированную сходимость в обширном классе задач, подобно МКЭ в форме метода перемещений.

В основе вариационной формулировки *смешанного метода* лежит принцип стационарности различных форм функционала Рейсснера. При данном подходе перемещения и напряжения в пределах каждого КЭ аппроксимируются одновременно, поэтому нет необходимости завышать требования к непрерывности искомых функций и их производных. Напротив, можно задавать именно нужные аппроксимации, а поскольку смешанные вариационные принципы приводят и к смешанному виду соотношений между напряжениями и перемещениями для конечного элемента, можно получать более точное решение.

Однако имеются и большие минусы. Так, функционал Рейсснера не является выпуклым, поверхность его в точке стационарности имеет вырожденную седлообразную форму. Система разрешающих уравнений, отвечающая формулировке смешанного метода, не является положительно определенной. Эти обстоятельства значительно затрудняют прямое использование функционала Рейсснера в методе конечных элементов.

Также существуют различные *гибридные формы* как метода перемещений, так и метода сил. По сути гибридные подходы схожи со смешанным методом. Отличает их то, что в гибридных моделях внутри конечного элемента за основные неизвестные принимаются величины одного типа, а на границах элемента независимо и в другой форме – величины другого или же обоих типов [5, 28].

Как правило, гибридные формулировки приводят к значительному усложнению алгоритма, поэтому эффективны лишь для ограниченного класса задач. Например, если в *гибридном методе сил* внутри элемента задать аппроксимацию компонент напряжений, в традиционной форме метода сил это бы привело к решению, соответствующему верхней границе. Однако аппроксимация перемещений вдоль контура элемента накладывает некоторые ограничения на математическую модель, уменьшает податливость и тем самым смещает получаемое решение в сторону точного. Сложность в том, что имеется возможность перегрузить ограничениями функционал дополнительной энергии и легко проскочить точное решение в сторону нижней границы.

## 2.1.2. Элементы и аппроксимирующие функции

МКЭ относится к методам дискретного анализа. Однако в отличие от численных методов, основывающихся на математической дискретизации дифференциальных уравнений, МКЭ базируется на физической дискретизации рассматриваемого объекта. Реальная конструкция как сплошная среда с бесконечно многим числом степеней свободы заменяется дискретной моделью связанных между собой элементов с конечным числом степеней свободы. Так как число возможных дискретных моделей для континуальной области неограниченно велико, то основная задача заключается в том, чтобы выбрать такую модель, которая лучше всего аппроксимирует данную область.

Сущность аппроксимации сплошной среды по МКЭ состоит в следующем:

- 1) рассматриваемая область разбивается на определенное число КЭ, семейство элементов по всей области называется *системой* или *сеткой конечных элементов*;
- 2) предполагается, что КЭ соединяются между собой в конечном числе точек – *узлов*, расположенных по контуру каждого из элементов;
- 3) искомые функции в пределах каждого КЭ (например, распределение перемещений, деформаций, напряжений и т. д.) с помощью *аппроксимирующих функций* выражаются через узловые значения, представляющие собой *основные неизвестные МКЭ*;
- 4) для анализа и расчета полученной системы конечных элементов действительны все принципы и методы, применяемые для любых дискретных систем.

### Конечные элементы

Элементы различают по размерности, форме, числу и виду узлов, числу и типу неизвестных в узлах, а также по виду аппроксимирующих функций. Без любой из этих характеристик КЭ определен не полностью.

Наиболее очевидна классификация конечных элементов **по размерности**.

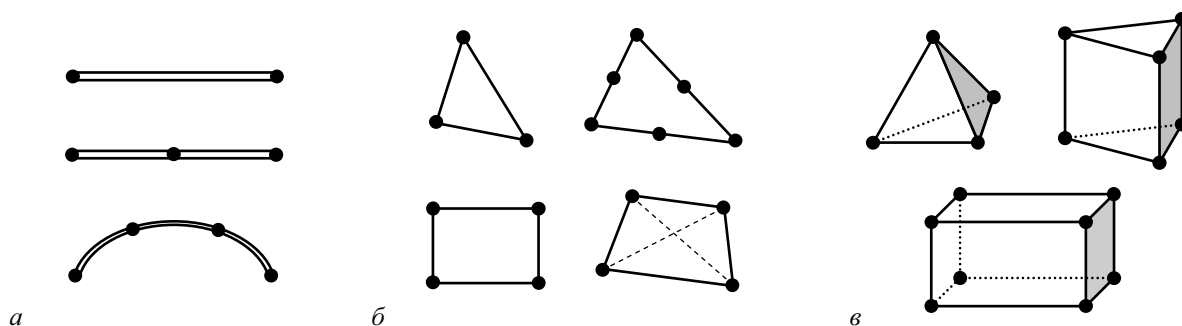


Рис. 2.1

*Одномерные* или *стержневые элементы* представляют собой участки прямой или кривой линии (рис. 2.1, а), как правило, используются при расчете стержневых систем.

*Двумерные* или *плоские элементы* – чаще всего имеют треугольную или четырехугольную форму, применяются при расчете пластин и изгибаемых плит.

Прямоугольник, как частный случай четырехугольного элемента, является самым простым для применения, но не пригодным для аппроксимации кривых и криволинейных границ области. Удобным в этом отношении является треугольный элемент, а также произвольный четырехугольник, который может быть построен непосредственно или скомбинирован из двух или четырех треугольников (рис. 2.1, б).

*Трехмерные* или *пространственные элементы* используются для расчета сплошных объемных конструкций и массивов. Основные формы трехмерных элементов – тетраэдр и призма с треугольным и четырехугольным основаниями (рис. 2.1, в).

Для аппроксимации области криволинейного очертания необходимо применять сетку с большим числом КЭ простой формы (с прямолинейными или плоскими сторонами). Это приводит к значительному увеличению объема вычислений – особенно в трехмерных задачах, при этом точность полученного решения может оказаться неудовлетворительной. Использование **криволинейных конечных элементов** позволяет существенно уменьшить количество КЭ в сетке, а также и общее число неизвестных в системе разрешающих уравнений МКЭ. Между тем вывод конечно-элементных соотношений для криволинейных элементов существенно сложнее, чем для элементов простой формы. В основе построения этих элементов лежит *метод отображения* (или *преобразования*) элементов с прямыми сторонами в локальной прямолинейной системе координат в элементы с кривыми сторонами в криволинейной системе координат и наоборот [3, 9, 26, 27]. Базовыми для построения криволинейных элементов являются, как правило, треугольные и прямоугольные элементы с прямыми сторонами. При этом для описания криволинейного контура элемента также используются различного вида аппроксимирующие функции. На рис. 2.2 приведены некоторые двумерные криволинейные элементы с разным характером аппроксимаций. Кругом обозначены узлы, с помощью которых аппроксимируется геометрия криволинейного элемента, жирной точкой – узлы с основными неизвестными.

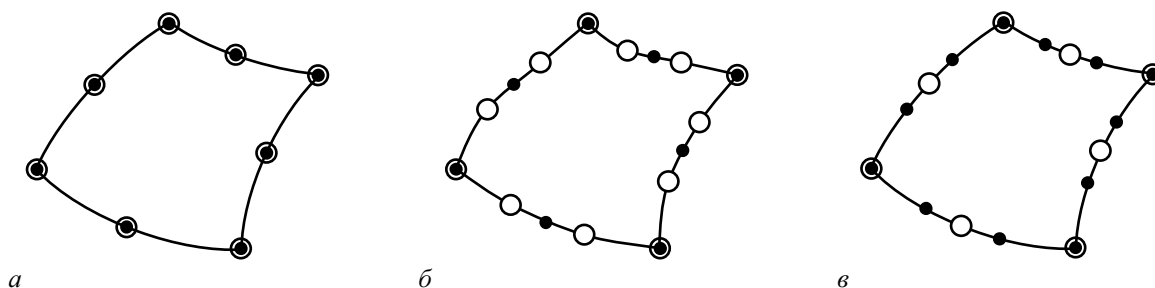


Рис. 2.2

Если для аппроксимации криволинейного контура используются те же узлы и те же аппроксимирующие функции, что и для основных неизвестных, то такие элементы называются *изопараметрическими* (рис. 2.2, а).

Если для аппроксимации геометрии элемента принять большее число узлов (и, следовательно, более высокий порядок аппроксимирующей функции), чем для аппроксимации основных неизвестных, то такие элементы называются *суперпараметрическими* (рис. 2.2, б).

Если число узлов для аппроксимации геометрии меньше, чем число узлов для аппроксимации основных неизвестных, то такие элементы называются *субпараметрическими* (рис. 2.2, в).

Конечные элементы различаются не только формой, но также числом и расположением **узловых точек**. Последние обычно размещаются на концах стержней, в вершинах и по сторонам треугольников, четырехугольников, тетраэдров и т. п. Для элементов одной и той же формы, в зависимости от принятой аппроксимации, число узлов и их положение могут быть различными. По расположению узлы бывают внешними и внутренними.

*Внешние узлы* связывают данный КЭ с соседними элементами. К этому типу относятся узлы в вершинах и по сторонам как плоских, так и объемных КЭ.

*Внутренние узлы* принадлежат только данному КЭ и не имеют связи с другими элементами. Так, например, у одномерного элемента крайние узлы, как правило, внешние, а узлы, находящиеся между ними – внутренние. Однако если узел является общим для двух или более элементов, то вне зависимости от своего нахождения этот узел – внешний.

За основные неизвестные МКЭ обычно принимаются значения искомых функций и их производных в узлах дискретной системы. Эти параметры часто называют *степенями свободы* по аналогии с соответствующим понятием в строительной механике стержневых систем, когда за основные неизвестные принимаются линейные перемещения или углы поворота узлов.

Степени свободы могут быть *внешними* или *внутренними* в зависимости от положения узла, которому принадлежат. Число степеней свободы КЭ равно сумме степеней свободы всех его внешних узлов. Узловые параметры во внутренних узлах вводятся только для проведения заданной аппроксимации и не носят характера основных неизвестных. Из матричного уравнения для КЭ их можно исключить при помощи несложной процедуры, основанной на геометрических [5] либо энергетических [16] принципах. Такой прием называется *конденсацией*, он может быть использован в общем случае для исключения степеней свободы любых внутренних узлов.

В зависимости от размещения узлов и типа узловых переменных различают три основных **семейства конечных элементов** (и соответствующих им аппроксимирующих функций), применяемых в МКЭ.

*Лагранжевы элементы* – содержат как внешние, так и внутренние узлы. В качестве узловых неизвестных здесь используются только значения искомых функций. Однако использование аппроксимирующих полиномов Лагранжа высоких порядков приводит к появлению большого числа внутренних узлов, что создает определенные трудности из-за необходимости их исключения.

*Серендиповы элементы* – устраняют данный недостаток, т. к. имеют только внешние узлы. Соответствующие аппроксимирующие функции ввели в МКЭ Б. Айронс и О. Зенкевич [9]. За узловые неизвестные в этом случае также принимаются только значения искомых функций.

*Эрмитовы элементы* – узловыми неизвестными здесь являются как значения искомых функций, так и значения ее производных. К данному семейству, например, относится рассмотренный в 1.2.3 балочный КЭ.

### Аппроксимирующие функции

Аппроксимация, как правило, дает приближенное, а не точное, описание действительного распределения искомых величин в элементе. Поэтому результаты расчета конструкции в общем случае также являются приближенными. Закономерно может быть поставлен вопрос о точности, устойчивости и сходимости решений, полученных МКЭ.

Под **точностью** понимается отклонение приближенного решения от *точного* или *истинного решения*. **Устойчивость**, прежде всего, определяется ростом *ошибок* при выполнении отдельных вычислительных операций. Неустойчивое решение является результатом неудачного выбора аппроксимирующих функций, «плохой» разбивки области на КЭ, некорректного представления граничных условий и т. п. Под **сходимостью** подразумевается постепенное приближение последовательных решений к *предельному*, по мере того как уточняются параметры дискретной модели, такие как размеры элементов, степень аппроксимирующих функций и т. п. В этом смысле понятие сходимости аналогично тому значению, которое оно имеет в обычных итерационных процессах. Таким образом, в сходящейся процедуре различие между последующими решениями уменьшается, стремясь в пределе к нулю.

Перечисленные выше понятия иллюстрируются рис. 2.3. Здесь абсцисса обозначает степень уточнения параметров дискретной модели, а ордината определяет полученное при этом уточнении приближенное решение. На графике показан монотонный тип сходимости, при котором точность решения повышается плавно. Более подробный анализ точности, устойчивости и сходимости решений по МКЭ приведен в [26, 28].

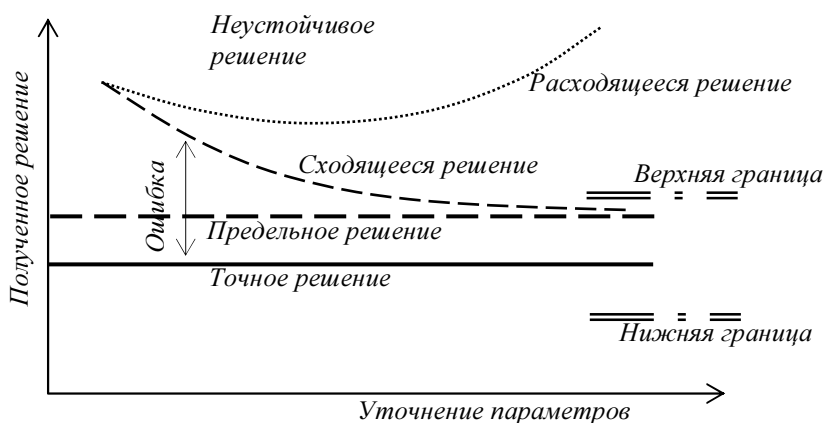


Рис. 2.3

**Ошибки метода конечных элементов.** Как следует из вышеизложенного, критерии устойчивости, сходимости и точности в основном определяются погрешностями различного рода операций, проводимых в МКЭ. Наряду с обычными ошибками округления и погрешностью приближенных методов линейной алгебры, применяемых в МКЭ, есть и ошибки, имеющие непосредственное отношение к методу конечных элементов:

- *ошибки дискретизации*, являющиеся результатом различий между действительной геометрией рассчитываемой области и ее аппроксимацией системой конечных элементов;
- *ошибки аппроксимации*, обусловленные разностью между действительным распределением искомых функций в пределах КЭ и их представлением с помощью аппроксимирующих функций.

Ошибки дискретизации уменьшаются с увеличением числа конечных элементов и соответственно с уменьшением их размеров, причем они стремятся к нулю, когда размер элемента стремится к нулю. Эти ошибки уменьшаются и с применением криволинейных элементов на соответствующих границах области. Ошибки аппроксимации не обязательно уменьшаются по мере уменьшения размеров элементов или повышения степени аппроксимации, поэтому могут ухудшать сходимость к точному решению или даже приводить к расходимости [11, 16, 28]. Однако эти ошибки можно свести к минимуму, если при построении аппроксимирующих функций обеспечить:

- 1) *непрерывность* искомой функции и ее производных в области КЭ до степени  $m-1$  включительно ( $m$  – наибольший порядок производных искомой функции, используемых в качестве основных неизвестных в эрмитовых элементах);
- 2) выполнение условий *полноты*, т. е. при уменьшении размеров КЭ аппроксимирующие функции должны обеспечить стремление значений искомой функции, а также ее производных к постоянным значениям;
- 3) выполнение условий *совместности* искомой функции и частично ее производных на границе между смежными элементами;
- 4) приближенное удовлетворение условий совместности не основных переменных (например, напряжений, если основные неизвестные – перемещения) на границах КЭ, а также *граничных условий* в рассматриваемой области;
- 5) исключение *концентрации напряжений* в КЭ, если в рассматриваемой области такие концентрации заведомо отсутствуют;
- 6) при перемещениях КЭ как *жесткого целого* в нем не должны возникать деформации.

Требование полноты аппроксимирующих функций необходимо для учета смещения КЭ как жесткого целого и обеспечения состояния постоянных деформаций в элементе. Механический смысл совместности заключается в непрерывности основных неизвестных на смежных границах соседних КЭ. В сложных эрмитовых элементах выполнение условий совместности достигается сложнее. Между тем имеются случаи, когда несовместные элементы дают очень хорошие результаты при быстрой сходимости решения к точному.



**Функции формы.** Аппроксимация какой-либо функции  $u$  в пределах КЭ может быть представлена в следующем виде:

$$u = N \mathbf{q}^e, \quad (2.1)$$

где  $N$  – матрица аппроксимирующих функций, называемых *функциями формы* конечного элемента;  $\mathbf{q}^e$  – вектор узловых неизвестных (обобщенных перемещений) в КЭ. Здесь и далее мы будем рассматривать МКЭ в форме метода перемещений, поэтому используем соответствующие обозначения и терминологию.

Для лагранжева и серендипова элементов одной искомой функции отвечает только одна степень свободы в каждом узле – узловое значение данной функции. Таким образом, матричное выражение (2.1) можно переписать в следующем развернутом виде:

$$u = [N_1 \quad N_2 \quad \dots \quad N_s] \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_s \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^s N_i q_i,$$

где  $N_i$  – функции формы КЭ, подстрочный индекс соответствует порядковому номеру узла в элементе;  $s$  – число узлов элемента.

Для эрмитова элемента вместо каждой из компонент  $q_i$  вводится набор узловых переменных, включающий как значения функции  $u$ , так и ее производных:  $u', u'', \dots, u^m$ . Аналогично вместо  $N_i$  используются  $N_i, N_{i1}, N_{i2}, \dots, N_{im}$ . В этом случае каждый из узлов КЭ будет иметь  $m+1$  степеней свободы.

Для построения функций формы КЭ могут применяться два способа: в первом из них используются так называемые *обобщенные координаты*, в основе второго – непосредственное использование *интерполяционных полиномов Лагранжа, Серендипа, Эрмита*.

Рассмотрим первый из подходов, особенно удобный для применения к элементам простой формы с относительно невысоким порядком аппроксимации. Проиллюстрируем процедуру получения функций формы на примере прямоугольного КЭ (рис. 2.4), приняв в качестве искомой функции одну из компонент перемещения произвольной точки – горизонтальное перемещение  $u$ .

Общий вид аппроксимирующего полинома для искомой функции  $u$ :

$$u = \sum_{i=1}^n \alpha_i \psi_i, \quad (2.2)$$

где  $\alpha_i$  – коэффициенты полинома, называемые здесь *обобщенными координатами элемента*;  $\psi_i$  – члены данного полинома.

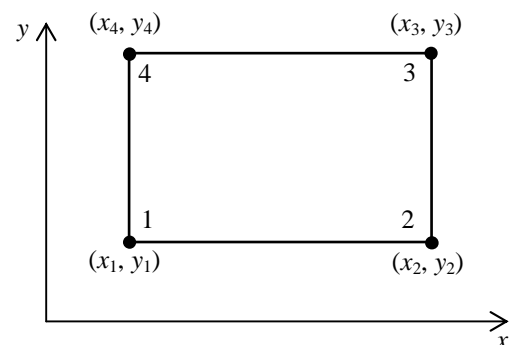
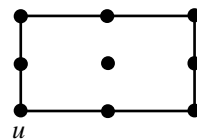
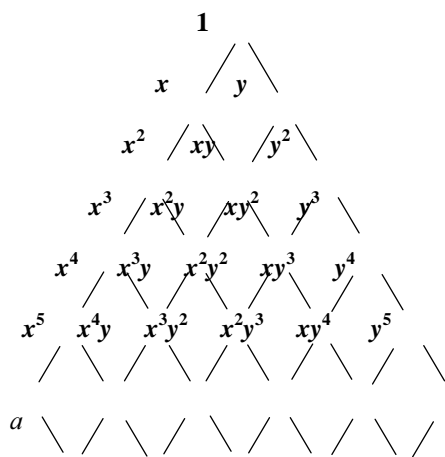


Рис. 2.4

Перечислим основные требования, которым должны удовлетворять аппроксимирующие полиномы:

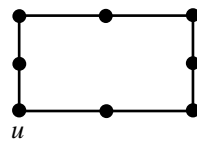
- в области, занимаемой конечным элементом, и на его границах они должны быть непрерывными функциями координат;
- число членов, удерживаемых в полиномах, должно соответствовать числу узловых неизвестных (степеней свободы) элемента;
- полиномы должны содержать константу и линейные члены (для обеспечения жесткого смещения КЭ);
- полиномы должны обеспечивать непрерывность переменных при переходе от элемента к элементу (данное требование накладывает ограничение на степень используемого полинома).

Для выбора двумерных полиномов можно пользоваться схемой в виде *треугольника Паскаля* (рис. 2.5, а). Рис. 2.5, б иллюстрирует применение данной схемы для лагранжева и серендипова прямоугольных элементов с квадратичной аппроксимацией искомой функции, а также для эрмитова элемента с кубическим порядком аппроксимации.



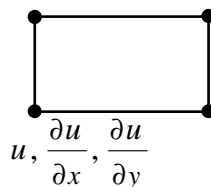
Лагранжев элемент:  

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy + \alpha_5 x^2 + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^2 y + \alpha_8 xy^2 + \alpha_9 x^2 y^2$$



Серендипов элемент:  

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 y^2 + \alpha_6 x^2 y + \alpha_7 xy^2 + \alpha_8 x^2 y^2$$



Эрмитов элемент:  

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy + \alpha_5 x^2 + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^2 y + \alpha_8 xy^2 + \alpha_9 x^3 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3$$

б

Рис. 2.5

Чтобы перейти от выражения (2.2) к форме (2.1), нужно принять  $n = s$ . Отбросим два симметричных члена  $x^2$  и  $y^2$  из полного полинома второго порядка (рис. 2.5, а), в результате получим следующее аппроксимирующее выражение для функции  $u(x, y)$  в двумерной области:

$$u(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy = [1 \ x \ y \ xy] \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = \psi \alpha. \quad (2.3)$$

Поочередно подставив в (2.3) координаты узлов, получим четыре уравнения:

$$\begin{aligned} u(x_1, y_1) &= \alpha_1 + \alpha_2 x_1 + \alpha_3 y_1 + \alpha_4 x_1 y_1, \\ u(x_2, y_2) &= \alpha_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 y_2 + \alpha_4 x_2 y_2, \\ u(x_3, y_3) &= \alpha_1 + \alpha_2 x_3 + \alpha_3 y_3 + \alpha_4 x_3 y_3, \\ u(x_4, y_4) &= \alpha_1 + \alpha_2 x_4 + \alpha_3 y_4 + \alpha_4 x_4 y_4. \end{aligned} \quad (2.4)$$

В матричном виде система (2.4) может быть записана как

$$\mathbf{q}^e = \mathbf{C} \boldsymbol{\alpha}, \quad (2.5)$$

где  $\mathbf{C}$  – матрица коэффициентов при неизвестных  $\alpha_i$ , зависящая от координат узлов конечного элемента:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3 y_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & x_4 y_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q}^e = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix}.$$

Решив систему (2.5), получим

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{q}^e. \quad (2.6)$$

Если матрица  $\mathbf{C}$  оказывается вырожденной и обратной ей матрицы не существует, значит, выбор аппроксимирующего полинома (2.3) является неудачным. В случае прямоугольного элемента можно доказать, что  $\det(\mathbf{C}) = -\Delta^2$ , где  $\Delta$  – площадь прямоугольника, следовательно, матрица  $\mathbf{C}$  – невырожденная.

Подставив (2.6) в (2.3), получим равенство, аналогичное (2.1):

$$u(x, y) = \boldsymbol{\psi} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{q}^e = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{q}^e.$$

Матрица функций формы здесь определяется следующим выражением:

$$\mathbf{N} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] = \boldsymbol{\psi} \mathbf{C}^{-1} = [1 \quad x \quad y \quad xy] \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} \end{bmatrix},$$

где  $d_{ij}$  – элементы некоторой матрицы  $\mathbf{D}$ , обратной матрице  $\mathbf{C}$ , т. е.  $\mathbf{D} = \mathbf{C}^{-1}$ .

Для лагранжевых элементов с известным в явном виде аппроксимирующим полиномом, аналогичным (2.3), описанная процедура может быть применена в принципе всегда. Эрмитовы элементы требуют незначительных дополнений, как это можно видеть в 1.2.3. Однако для сложных элементов приведенный подход становится неэффективным и вместо него обычно применяется второй способ – непосредственной интерполяции [9, 16, 26, 27].

### 2.1.3. Общий алгоритм статического расчета МКЭ

В принципе общий алгоритм расчета МКЭ сводится к последовательности шагов (матричных операций), в результате выполнения которых определяются необходимые параметры решения задачи (перемещения, деформации, напряжения). На практике расчеты по МКЭ всегда выполняются с применением компьютерных технологий, реализующих известные матричные формулы и выражения для получения промежуточных и конечных результатов. Поэтому алгоритм расчета реальных конструкций несколько отличается от порядка решения задач по МКЭ, изложенного в 1.2.3.

Ниже приведены основные этапы статического расчета конструкции МКЭ.

**1. Дискретизация конструкции.** Рассматриваемая область представляется в виде совокупности конечных элементов, соединенных между собой в узловых точках. Сами элементы могут иметь различную форму и размеры, например, в виде стержня, треугольной пластинки, прямоугольной в плане оболочки, пространственного тетраэдра (рис. 2.6, а). Выбор типа КЭ и общего их числа зависит от вида и формы конструкции, от требуемой точности, от характера внешней нагрузки и наложенных связей. Например, при расчете стержневых систем каждый стержень постоянного сечения принимается за отдельный элемент (рис. 2.6, б). Решение в этом случае получается точным.

Дискретизация континуальных систем (пластины, оболочки, массивы) является более сложной задачей. Общих рекомендаций по нанесению сетки или разбивке области на отдельные элементы нет. Обычно руководствуются предварительными представлениями о характере ожидаемого результата и в местах предполагаемых высоких градиентов искомых величин сетку КЭ сгущают. Однако следует помнить, что применение неравномерной разбивки может вызвать дополнительные трудности, связанные с ухудшением обусловленности системы разрешающих уравнений. Вообще рациональная разбивка требует некоторых практических навыков. Она может быть самой разнообразной. При решении двумерных задач (балка-стенка, изгиб плиты) дискретизация области обычно производится треугольными и прямоугольными элементами (рис. 2.6, в). Предполагается, что вся действующая нагрузка приводится к узловой, поэтому, например, в случае распределенной нагрузки для ее более точного моделирования бывает необходимо вводить дополнительные узлы и элементы. Заданные перемещения, жесткие или упругие связи также должны быть отнесены к узлам.

Таким образом, первый этап заключается в составлении *конечно-элементной схемы* – дискретной модели конструкции. Здесь можно выделить следующие действия:

- а) выбор типа КЭ (по геометрии, виду аппроксимации и т. п.);
- б) разбивку области на КЭ (с нумерацией узлов и элементов);
- в) описание каждого элемента: топологические (номера узлов в сетке), физико-механические (модуль упругости и т. п.), геометрические характеристики;

- г) описание каждого узла (координаты в общей системе координат);
- д) описание заданных узловых нагрузок и перемещений.

Несмотря на то, что перечисленные выше действия не опираются на строгие теоретические рекомендации и во многом выполняются интуитивно, первый этап имеет большое значение для дальнейшего расчета конструкции.

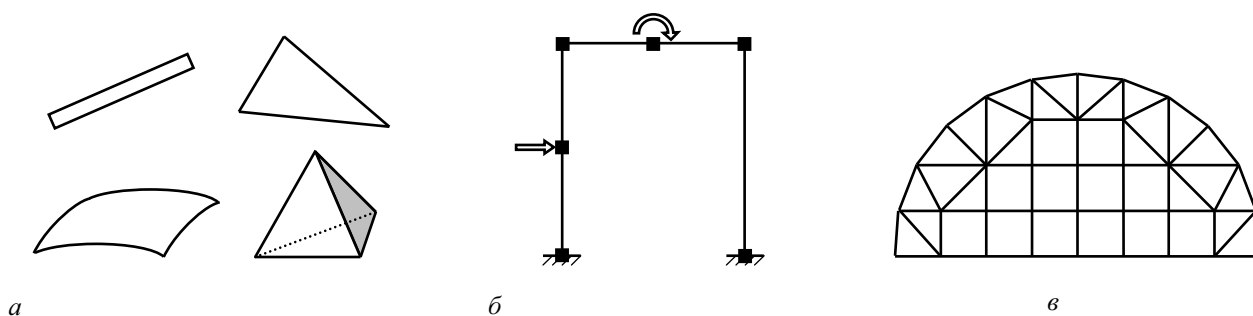


Рис. 2.6

**2. Построение глобальной матрицы жесткости и вектора узловых сил.** Процедура основана на формировании МЖ и ВН отдельных элементов и их размещении в глобальных МЖ и ВН путем обхода по всем конечным элементам дискретной модели.

Расчеты по МКЭ различных конструкций отличаются принципиально только применяемыми элементными МЖ, ВН и матричными операторами для определения внутренних усилий и напряжений. Данные матрицы и векторы строятся на основе вариационных принципов с учетом принятой геометрии КЭ и выбранных аппроксимаций. В случае если МЖ и ВН конечного элемента построены в *локальной* (местной) системе координат, не совпадающей с *глобальной*, необходимо преобразовать их для глобальной системы.

Размещение элементных МЖ (ВН) в глобальной МЖ (ВН) может быть выполнено одним из следующих способов [21]:

- 1) непосредственного сложения жесткостей;
- 2) конгруэнтного преобразования;
- 3) при помощи конечно-разностных операторов.

**Способ непосредственного сложения жесткостей**, используемый в большинстве случаев, реализуется следующим образом:

- МЖ отдельного элемента представляется в блочной форме, где число блоков (в строке или в столбце) определяется количеством узлов КЭ, размерность каждого блока соответствует числу степеней свободы в узле;
- каждая строка или столбец блочной МЖ элемента соответствует глобальному номеру узла в конечно-элементной модели конструкции;
- глобальная МЖ также представляется в виде блоков, аналогично элементной, число блоков соответствует общему числу узлов дискретной модели;
- МЖ каждого элемента размещается поблочно в глобальной МЖ согласно адресам блоков, т. е. глобальным номерам узлов.

На рис. 2.7 изображена схема размещения МЖ треугольного элемента (три узла, две степени свободы в узле) в глобальной МЖ. Здесь 1, 2, 3 – локальные номера узлов в элементе,  $i, j, k$  – глобальные номера узлов.

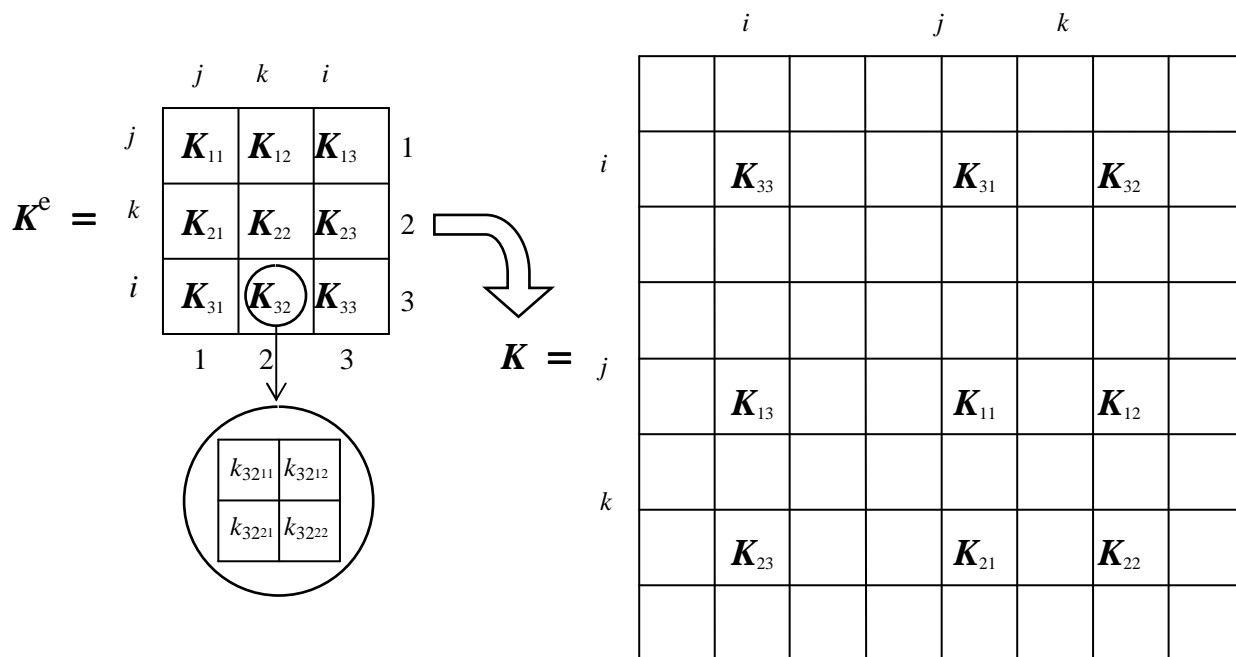


Рис. 2.7

По аналогичной схеме из элементных ВН формируется глобальный ВН для всей конструкции.

Таким образом, данный этап включает следующие основные действия, выполняемые в цикле для каждого из конечных элементов:

- составление элементных МЖ и ВН в локальной системе координат;
- преобразование элементных МЖ и ВН из локальной в глобальную систему координат – в том случае, если локальная система не совпадает с глобальной;
- размещение элементных МЖ и ВН в глобальных МЖ и ВН.

Сформированная на этом этапе МЖ системы является вырожденной или особенной. Она может быть преобразована в невырожденную при учете кинематических граничных условий (внешних связей, наложенных на некоторые узлы и исключающих перемещение конструкции как абсолютно твердого тела).

**3. Учет заданных граничных условий.** Пусть в результате выполнения второго этапа система разрешающих уравнений имеет вид

$$\mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{P}, \quad (2.7)$$

где глобальная матрица жесткости  $\mathbf{K}$  содержит коэффициенты  $k_{ij}$ ; вектор узловых перемещений  $\mathbf{q}$  – компоненты перемещений  $q_i$ ; вектор узловой нагрузки  $\mathbf{P}$  – узловые силы  $p_i$ . ( $i = 1, \dots, n$ ;  $j = 1, \dots, n$ ;  $n$  – число степеней свободы системы).

**Статические граничные условия** учитываются при формировании вектора нагрузки  $\mathbf{P}$ . Проблема решается просто, если внешние нагрузки заданы непосредственно в узловых точках. Распределенные же нагрузки заменяются эквивалентными обобщенными узловыми силами  $P_{узл}$ , при этом с целью уменьшения погрешности расчета часто приходится разбивать конструкцию на более мелкие элементы. Эти узловые силы добавляются к тем, что получены при формировании (на 2-м этапе) вектора  $\mathbf{P}$  из элементарных нагрузок  $P_{эл}$ :

$$P_l = P_{l\text{эл}} + P_{l\text{узл}}; \quad (l = 1, \dots, n_p),$$

где  $n_p$  – число компонент узловой нагрузки.

**Кинематические граничные условия**, как правило, представляются в виде заданных узловых перемещений (равных и не равных нулю). Нулевые перемещения соответствуют абсолютно жестким опорным связям, наложенным на некоторые узлы дискретной модели конструкции. Отличные от нуля заданные перемещения могут быть обусловлены неточностью изготовления (монтажа), регулированием усилий, смещением (осадкой) опор и т. п.

Пусть  $q_m$  – заданное перемещение по направлению  $m$ -й степени свободы ( $m = 1, \dots, n_q$ ). Тогда корректировка системы уравнений (2.7) может быть произведена следующим образом (в цикле по всем компонентам заданных узловых перемещений  $n_q$ ):

1) из вектора  $\mathbf{P}$  вычитается  $m$ -й столбец матрицы  $\mathbf{K}$ , умноженный на  $q_m$ :

$$p_i = p_i - k_{im} q_m, \quad (i = 1, \dots, n);$$

2) обнуляются  $m$ -я строка и  $m$ -й столбец матрицы  $\mathbf{K}$ :

$$k_{im} = 0; \quad k_{mi} = 0, \quad (i = 1, \dots, n);$$

3)  $m$ -й коэффициент главной диагонали принимается равным единице:  $k_{mm} = 1$ ;

4)  $m$ -ю компоненту вектора  $\mathbf{P}$  следует положить равной  $q_m$ , т. е.  $p_m = q_m$ .

Если заданное перемещение  $q_m \neq 0$ , то выполняются все перечисленные пункты, если  $q_m = 0$  – выполняются только 2, 3 и 4-й пункты. Во втором случае также можно вычеркнуть  $m$ -ю строку и  $m$ -й столбец из матрицы  $\mathbf{K}$  и  $m$ -ю компоненту из векторов  $\mathbf{P}$  и  $\mathbf{q}$ , тем самым уменьшив размерность системы алгебраических уравнений МКЭ на число компонент заданных смещений –  $n_q$ .

Помимо жестких связей и смещений опор в реальной конструкции могут иметь место **упругие связи** (*упругое основание*). Наиболее простой является дискретная модель основания, когда упругие связи приложены в отдельных узлах. В этом случае к МЖ всей системы просто добавляется диагональная матрица, состоящая из коэффициентов жесткости упругих связей:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_{\text{сист}} + \mathbf{K}_{\text{упр.осн}} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{1\text{упр}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_{2\text{упр}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & k_{n\text{упр}} \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

**Учет распределенного упругого основания** будет более точным, если при его дискретизации использовать вариационные принципы (например, принцип Лагранжа). При таком подходе для каждого конечного элемента, подобно МЖ, строится так называемая *матрица реакций основания*. Последняя добавляется к МЖ элемента, и далее расчет производится в обычном порядке. Подробнее о расчете конструкций на упругом основании изложено в [8, 13].

Последовательность действий при учете заданных граничных условий:

- а) замена произвольной внешней нагрузки на эквивалентные узловые силы и добавление их в глобальный ВН;
- б) дополнение МЖ при учете заданного упругого основания;
- в) корректировка глобальной системы уравнений (МЖ и ВН) при учете заданных ненулевых смещений узлов;
- г) преобразование глобальной системы уравнений при учете жестких опорных связей (нулевых перемещений).

В результате учета граничных условий глобальная система разрешающих уравнений будет сформирована в окончательном и в то же время достаточном для получения искомого решения виде.

**4. Решение системы разрешающих уравнений.** Окончательная система разрешающих уравнений МКЭ для статической задачи представляет собой *систему линейных алгебраических уравнений* с симметричной, положительно определенной матрицей коэффициентов, как правило, ленточной структуры.

Прежде всего следует выбрать метод решения СЛАУ. Для небольших и средних задач – от несколько десятков до несколько десятков тысяч неизвестных – обычно используются известные **прямые методы**: Гаусса, разложения Холецкого,  $LDL^T$ -факторизации и т. п. [12, 23, 31]. Для более сложных систем, требующих огромного объема вычислений и значительной памяти, приходится искать и, если необходимо, создавать специально подходящие для данной задачи эффективные алгоритмы, основанные как на прямых, так и на итерационных методах. Помимо перечисленных, для решения систем разрешающих уравнений МКЭ эффективны такие прямые методы, как *метод быстрого преобразования Фурье, методы Гивенса, Хаусхолдера, блочного разложения* [3, 16]. В ряде случаев целесообразно применять методы, учитывающие разреженность матриц [7], а также плохую обусловленность систем уравнений [23].

Касаясь **итерационных методов**, отметим следующее. Классические из них – методы Якоби, Гаусса-Зейделя, несмотря на сравнительную простоту, при решении даже средних задач характеризуются крайне медленной сходимостью. Более эффективными (в которых при меньшем числе итераций достигается такая же точность решения) являются следующие итерационные методы: *метод последовательной верхней релаксации* (модификация процедуры Гаусса-Зейделя с ускорением сходимости), некоторые *градиентные методы*, в частности, *сопряженный метод Ньютона, метод Шелдона*, а также ряд *блочных итерационных методов* [16, 23].



Можно применять и **комбинированные подходы**. Так, точность решения, полученного прямым методом, может быть значительно улучшена с помощью дополнительных вычислений, называемых *итерационным уточнением* [16].

Отметим некоторые особенности, присущие системе разрешающих уравнений МКЭ. Эти особенности могут значительно влиять на точность получаемого решения, объем вычислений и режим работы вычислительной техники.

**Во-первых**, при рациональной нумерации узлов матрица коэффициентов СЛАУ имеет ленточную структуру. Это означает, что ненулевые коэффициенты матрицы содержатся только в пределах некоторой полосы – *ленты*, занимающей диагональное положение в матрице (рис. 2.8). Внутри ленты могут находиться и нулевые коэффициенты. Важным моментом является то, что область нулевых элементов матрицы, расположенная выше и ниже ленты, остается нулевой и в процессе решения системы уравнений. Очевидно, что с уменьшением ширины ленты уменьшается и объем производимых вычислений. Ширина ленты определяется по формуле

$$m = (r_{max} + 1) n_s.$$

Здесь  $r_{max}$  – величина наибольшей разности между глобальными номерами узлов в пределах каждого КЭ, определяемая при обходе по всем элементам системы;  $n_s$  – число степеней свободы узла. Для уменьшения ширины ленты следует стремиться к оптимальной нумерации узлов, при которой параметр  $r_{max}$  принимает минимальное значение. Пример разбивки двумерной области на прямоугольные элементы с разными вариантами нумерации узлов приведен на рис. 2.9. Рациональная нумерация узлов дает  $m = 10$ , а нерациональная –  $m = 16$  (при  $n_s = 2$ ).

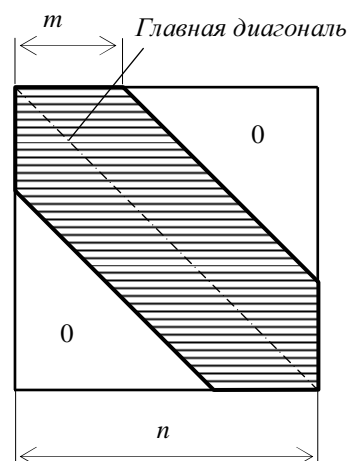


Рис. 2.8

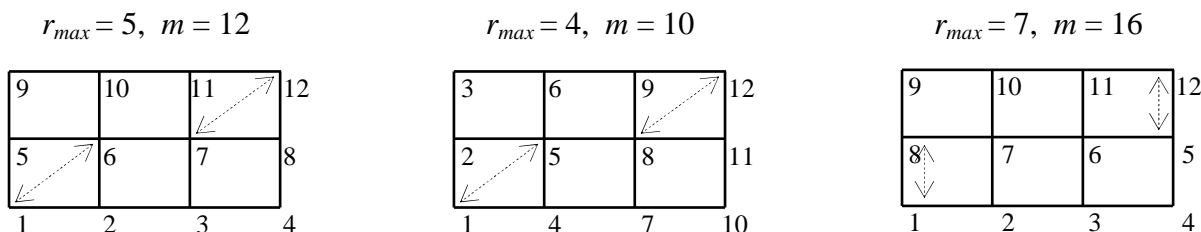


Рис. 2.9

**Во-вторых**, при решении больших СЛАУ (свыше тысячи уравнений) важным фактором является значительное накопление ошибок округления, возникающих в процессе огромного количества арифметических операций.

Так, например, при использовании метода Гаусса число умножений примерно равно  $\frac{1}{3}mn^2$ , где  $n$  – порядок системы,  $m$  – ширина «ленты». В этом случае уже при нескольких сот уравнений рекомендуется применять двойную точность вычислений (16 знаков после запятой), иначе следует считаться с неизбежной погрешностью получаемого решения.

Основная доля задач в строительстве (исключение составляют крупные сооружения, сложные и ответственные в инженерном плане конструкции и т. п.) относится к задачам средней технической сложности, для которых, как уже было сказано выше, используются прямые методы решения систем уравнений. К тому же при практических расчетах часто бывает необходимо учитывать различные виды нагрузок, к примеру, собственный вес, временную нагрузку от кранового и другого оборудования, снеговую и ветровую нагрузки и т. д. Решение системы уравнений по каждому *виду загрузки* также удобнее всего выполнять с помощью прямых методов. Такое утверждение основывается на том, что любой из прямых методов можно представить в виде двух независимых процедур:

- а) приведения матрицы коэффициентов СЛАУ к треугольному виду посредством последовательных исключений или же факторизацией (разложением исходной матрицы на несколько треугольных);
- б) решения систем с треугольными матрицами коэффициентов для каждого вектора нагрузки – вида загрузки.

**5. Определение внутренних усилий (напряжений).** Результатом решения системы разрешающих уравнений МКЭ в форме метода перемещений будут компоненты узловых перемещений дискретной модели конструкции.

Вычисление же необходимых компонент напряженного состояния конструкции производится поэлементно в следующем порядке:

- а) формируется вектор узловых перемещений для каждого конечного элемента  $q^e$  (посредством выборки из глобального вектора узловых перемещений  $q$  соответствующих компонент);
- б) если локальная система координат для отдельного КЭ не совпадает с глобальной, производится преобразование вектора узловых перемещений  $q^e$  данного элемента;
- в) на основе геометрических и физических соотношений формируется матрица усилий (напряжений) для КЭ –  $G$ ;
- г) вычисляется вектор узловых значений внутренних усилий (напряжений) для КЭ –  $S^e$ , который связан с узловыми перемещениями в общем случае следующим соотношением:

$$S^e = G q^e.$$

Основные этапы статического расчета конструкций МКЭ и последовательность их выполнения приведены в виде схемы на рис. 2.10.

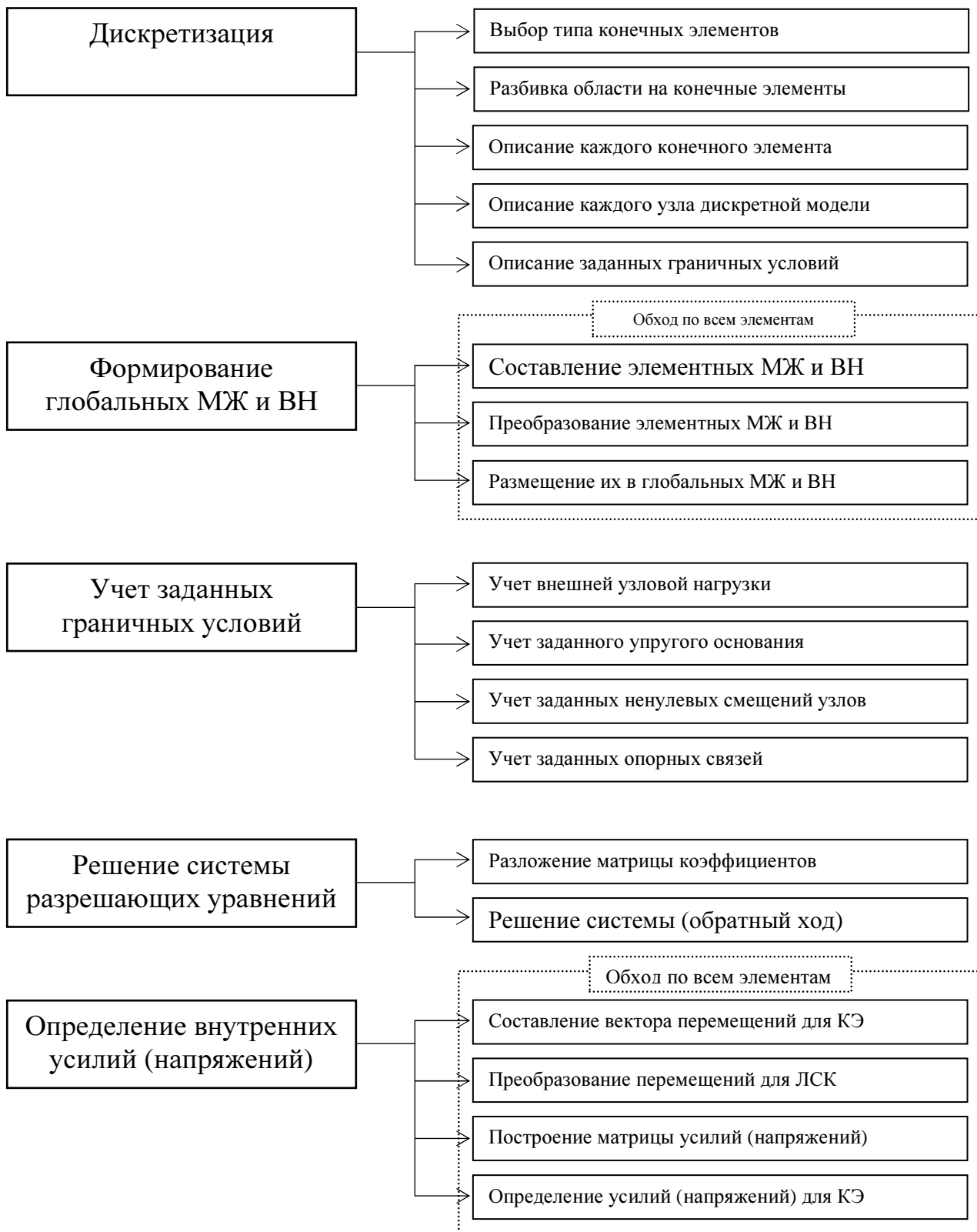


Рис. 2.10

## 2.1.4. Понятие о суперэлементном подходе

Сложная структура современных инженерных сооружений: многоэтажных высотных зданий, производственных объектов и т. д., с одной стороны, и стремление к использованию все более точных дискретных схем, с другой стороны, приводят к системам разрешающих уравнений очень большого порядка. Несмотря на то, что современные вычислительные средства и имеющиеся алгоритмы позволяют решать такие системы, возникают определенные трудности с хранением глобальной матрицы жесткости, с точностью решения из-за накопления ошибок округления при огромном числе арифметических операций, с большими затратами «ручного» труда при подготовке исходной информации для расчета и значительными затратами машинного времени.

Разделение системы разрешающих уравнений МКЭ на несколько систем меньшего порядка может быть выполнено уже на этапе построения конечно-элементной модели. Это достигается с помощью введения в дискретную модель конструкции так называемых *суперэлементов* (СЭ). СЭ – это укрупненный элемент, включающий в себя некоторую группу обычных (*базисных*) конечных элементов. Суперэлементы обычно повторяют форму и размеры естественных частей реальных конструкций и сооружений: этажи и фрагменты зданий, блоки корпусов, различные конструктивные части сооружений. В основе объединения базисных элементов в СЭ лежит процедура конденсации, применяемая здесь для исключения неизвестных во внутренних узлах суперэлемента [20, 21].

Пусть рассматриваемая область разделена на несколько СЭ (рис. 2.11, а), каждый из которых, в свою очередь, состоит из некоторого числа базисных КЭ (рис. 2.11, б). Условие равновесия СЭ определяется системой алгебраических уравнений:

$$\mathbf{K}^{se} \mathbf{q}^{se} = \mathbf{P}^{se}, \quad (2.9)$$

где  $\mathbf{K}^{se}$  – матрица жесткости СЭ, составленная из матриц жесткости базисных КЭ;  $\mathbf{q}^{se}$  – вектор узловых перемещений для СЭ;  $\mathbf{P}^{se}$  – вектор узловых сил, приложенных к СЭ.

Выделим в пределах СЭ внутренние  $t$  и граничные  $s$  узлы (рис. 2.11, б). Тогда матричное уравнение (2.9) можно представить в блочном виде:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{tt} & \mathbf{K}_{ts} \\ \mathbf{K}_{st} & \mathbf{K}_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_t \\ \mathbf{q}_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}_t \\ \mathbf{P}_s \end{Bmatrix}. \quad (2.10)$$

Исключим из выражения (2.10) вектор внутренних перемещений СЭ:

$$\mathbf{q}_t = \mathbf{K}_{tt}^{-1} \mathbf{P}_t - \mathbf{K}_{tt}^{-1} \mathbf{K}_{ts} \mathbf{q}_s. \quad (2.11)$$

В результате получим следующее матричное уравнение:

$$[K_{ss} - K_{st} K_{tt}^{-1} K_{ts}] q_s = \{P_s - K_{st} K_{tt}^{-1} P_t\} \quad \text{или} \quad \bar{K}^{se} q_s^{se} = \bar{P}^{se}. \quad (2.12)$$

Здесь  $\bar{K}^{se} = [K_{ss} - K_{st} K_{tt}^{-1} K_{ts}]$  – матрица граничных жесткостей;  $\bar{P}^{se} = \{P_s - K_{st} K_{tt}^{-1} P_t\}$  – вектор граничных нагрузок суперэлемента. Матричное уравнение (2.12) представляет собой математическую модель взаимодействия рассматриваемого СЭ со смежными СЭ дискретной области.

Далее на основе матриц граничных жесткостей и векторов граничных нагрузок всех суперэлементов составляется МЖ и ВН для всей конструкции. Полученная таким путем система разрешающих уравнений МКЭ будет содержать значительно меньшее число неизвестных (перемещений в граничных узлах СЭ), чем система уравнений, где неизвестными являются перемещения во всех узлах конечно-элементной схемы.

Найденные из решения этой системы граничные перемещения  $q_s$  позволяют определить перемещения внутренних узлов  $q_t$  каждого СЭ по формуле (2.11). Это может быть выполнено без особых вычислительных затрат, так как СЭ имеют сравнительно меньшие, чем вся конструкция, размеры. Затем по узловым перемещениям рассчитываются деформации и напряжения по каждому базисному КЭ.

Таким образом, применение СЭ позволяет существенно сэкономить затраты ручного труда и машинное время без изменения точности расчета. Наибольший эффект суперэлементный подход дает в случае, когда рассчитываемая конструкция обладает регулярной структурой (к примеру, высотное здание, телебашня и т. п.).

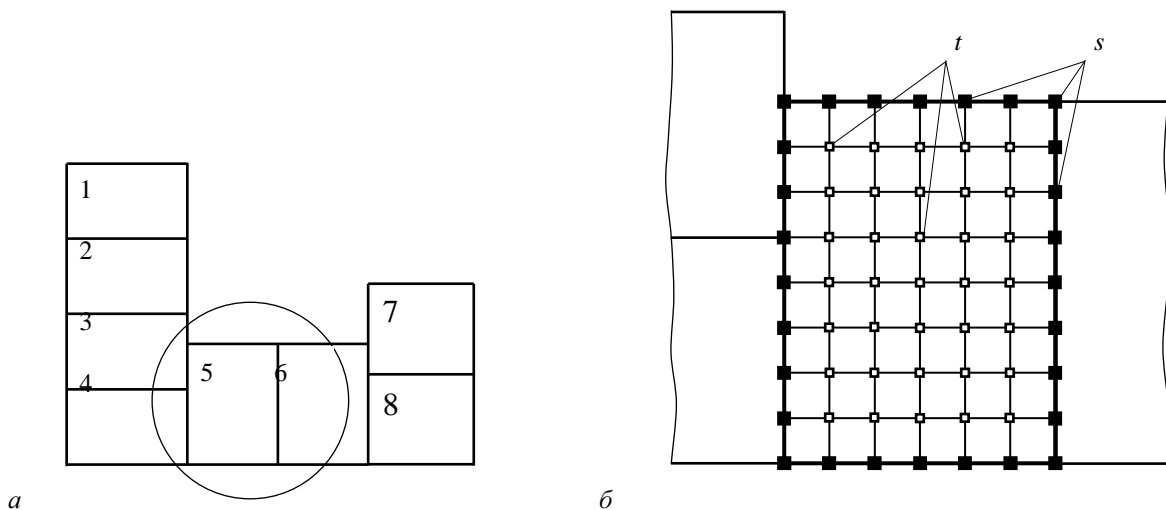


Рис. 2.11

## 2.2. Расчет плоских стержневых систем МКЭ

### 2.2.1. Стержневые конечные элементы

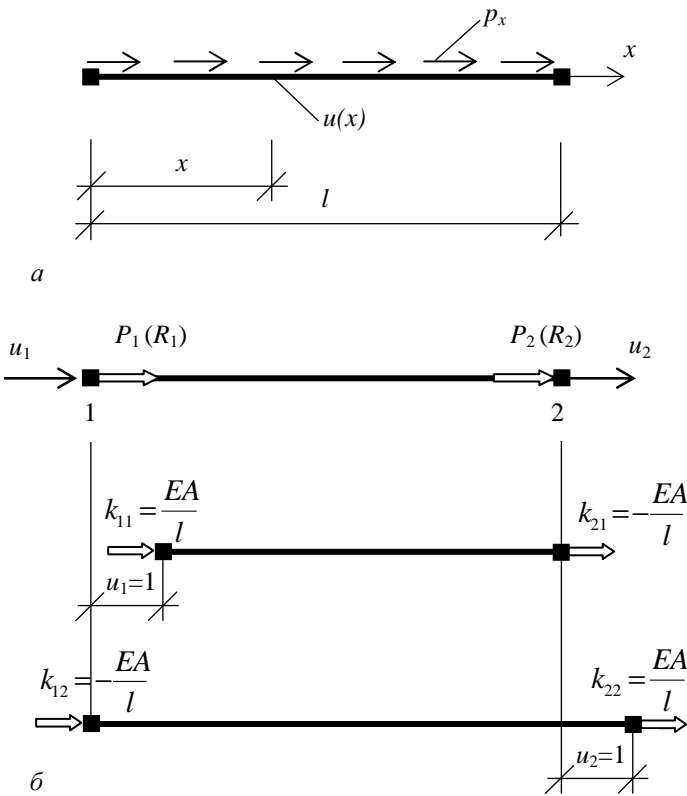


Рис. 2.12

В 1.2.3 построены матрица жесткости и вектор нагрузки балочного КЭ (изгибаемого стержня). На рис. 2.12, а приведен стержневой КЭ постоянной жесткости, подвергающийся растяжению (сжатию) и используемый при расчете плоских ферм. В случае линейной аппроксимации перемещений по длине стержня имеем два узла по концам элемента, по одной степени свободы в каждом (рис. 2.12, б). Для такого КЭ удобно применить *прямой метод* построения МЖ и ВН.

Запишем матрицу жесткости элемента  $\mathbf{K}^e$ , вектор узловых перемещений  $\mathbf{q}^e$  и вектор узловой нагрузки  $\mathbf{P}^e$  в следующем виде:

$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{q}^e = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{P}^e = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}.$$

Каждый коэффициент  $k_{ij}$  выражает реакцию в узловой связи по направлению  $i$ -й степени свободы на единичное перемещение  $u_j = 1$ . На рис. 2.12, б показаны возможные перемещения  $u_j = 1$  ( $j = 1, 2$ ) и вызываемые ими реакции  $k_{ij}$  в связях по концам стержня. Так, например, при  $u_1 = 1$  реакция по 1-му направлению  $k_{11} = \frac{EA}{l}$ , а по 2-му —  $k_{21} = -\frac{EA}{l}$  (знак минус означает, что в действительности эта реакция направлена в противоположную сторону).

Каждая узловая сила  $P_i$  равна половине равнодействующей распределенной продольной нагрузки интенсивностью  $p_x$ , т. е.  $P_i = \frac{p_x l}{2}$  ( $i = 1, 2$ ).

Сформированные таким образом МЖ и ВН для данного КЭ будут иметь следующий вид:

$$\mathbf{K}^e = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{P}^e = \frac{p_x l}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (2.13)$$

При известных узловых перемещениях продольные силы по концам элемента определяются по формуле, аналогичной (1.32):

$$\mathbf{S}^e = \begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -R_1 \\ R_2 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{l} \begin{Bmatrix} (u_2 - u_1) \\ (u_2 - u_1) \end{Bmatrix} - \frac{p_x l}{2} \begin{Bmatrix} -1 \\ 1 \end{Bmatrix}. \quad (2.14)$$

Рассмотрим теперь КЭ с тремя степенями свободы в узле, соответствующими горизонтальному смещению  $u$ , прогибу  $v$  и углу поворота сечения  $\varphi$  (рис. 2.13). Данный КЭ применяется для расчета плоских рам, а в комбинации со стержневым (см. рис. 2.12) и балочным (см. рис. 1.7) элементами – для расчета комбинированных плоских стержневых систем. Очевидно, что рассматриваемый КЭ можно получить совмещением этих двух элементов. Введем вектор узловых перемещений для данного КЭ:

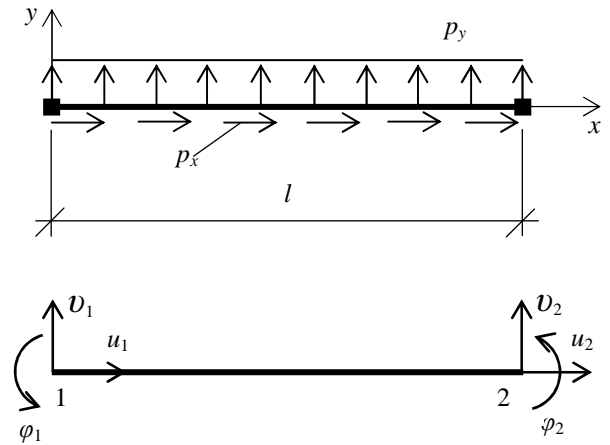


Рис. 2.13

$$\mathbf{q}^e = \{u_1 \ v_1 \ \varphi_1 \ u_2 \ v_2 \ \varphi_2\}^T.$$

Тогда на основе выражений (1.29), (1.30) и (2.13) можно составить МЖ и ВН для конечного элемента плоской рамы в следующем виде:

$$\mathbf{K}^e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} & 0 & -\frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} & 0 & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} & 0 & \frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} & 0 & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{P}^e = \frac{l}{12} \begin{Bmatrix} 6p_x \\ 6p_y \\ p_y l \\ 6p_x \\ 6p_y \\ -p_y l \end{Bmatrix}. \quad (2.15)$$

Значения внутренних усилий по концам элемента:

$$S^e = \begin{Bmatrix} N_1 \\ Q_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{EA}{l}(u_2 - u_1) + \frac{p_x l}{2} \\ \frac{6EJ}{l^3}(2(v_1 - v_2) + l(\varphi_1 + \varphi_2)) - \frac{p_y l}{2} \\ -\frac{2EJ}{l^2}(3(v_1 - v_2) + l(2\varphi_1 + \varphi_2)) + \frac{p_y l^2}{12} \\ \frac{EA}{l}(u_2 - u_1) - \frac{p_x l}{2} \\ \frac{6EJ}{l^3}(2(v_1 - v_2) + l(\varphi_1 + \varphi_2)) + \frac{p_y l}{2} \\ \frac{2EJ}{l^2}(3(v_1 - v_2) + l(\varphi_1 + 2\varphi_2)) + \frac{p_y l^2}{12} \end{Bmatrix}. \quad (2.16)$$

### 2.2.2. Преобразование МЖ и ВН при повороте координатных осей

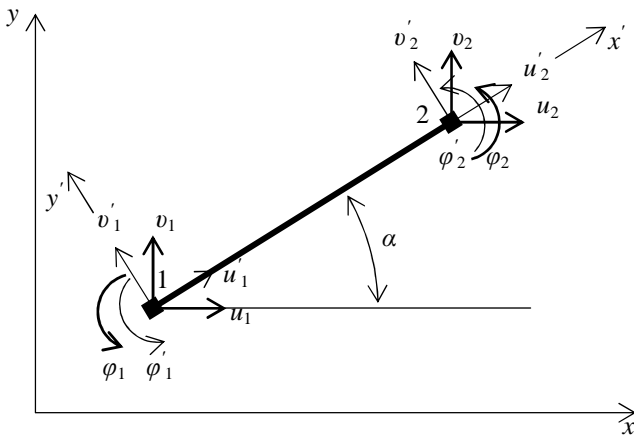


Рис. 2.14

Матрицы жесткости и вектора нагрузки стержневых КЭ формируются, как правило, в удобной для их вывода системе координат, называемой *локальной* (ЛСК). Однако при расчете конструкции может оказаться, что ЛСК отдельных элементов не будут совпадать с *глобальной* системой координат (ГСК), выбранной для всей стержневой системы в целом. Поэтому в процессе формирования системы разрешающих уравнений МКЭ необходимо для каждого КЭ осуществлять переход из ЛСК в ГСК.

Преобразование координат по существу связано с поворотом локальных осей отдельного КЭ по отношению к глобальным осям для всей системы. Рассмотрим данную процедуру на примере конечного элемента плоской стержневой системы (рис. 2.14). Пусть  $u'_i, v'_i, \varphi'_i$  – узловые перемещения  $i$ -го узла элемента в ЛСК,  $u_i, v_i, \varphi_i$  – узловые перемещения в ГСК ( $i = 1, 2$ ). Согласно рис. 2.14 можно записать следующие зависимости:

$$\begin{aligned} u'_1 &= u_1 \cos \alpha + v_1 \sin \alpha = u_1 l + v_1 m; & u'_2 &= u_2 l + v_2 m; \\ v'_1 &= -u_1 \sin \alpha + v_1 \cos \alpha = -u_1 m + v_1 l; & v'_2 &= -u_2 m + v_2 l; \\ \varphi'_1 &= \varphi_1; & \varphi'_2 &= \varphi_2, \end{aligned} \quad (2.17)$$

где  $l = \cos \alpha$ ,  $m = \sin \alpha$ .



Перепишем выражения (2.17) в матричной форме:

$$\mathbf{q}'^e = \begin{Bmatrix} u'_1 \\ v'_1 \\ \varphi'_1 \\ u'_2 \\ v'_2 \\ \varphi'_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -m & l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m & l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{L} \mathbf{q}^e. \quad (2.18)$$

Здесь матрица  $\mathbf{L}$  называется *матрицей преобразования координат*.

Представим матрицы и векторы, входящие в (2.18), в блочном виде

$$\mathbf{q}'^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}'_1{}^e \\ \mathbf{q}'_2{}^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{L}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{L}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_1^e \\ \mathbf{q}_2^e \end{Bmatrix} = \mathbf{L} \mathbf{q}^e, \quad (2.19)$$

где блоки  $\mathbf{L}_1$  и  $\mathbf{L}_2$  имеют размерность 3x3:

$$\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} l & m & 0 \\ -m & l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для балочного КЭ (см. рис. 1.7) при  $u'_1 = u'_2 = 0$  в матрице преобразований координат используются блоки размерностью 2x3:

$$\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_2 = \begin{bmatrix} -m & l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

а в случае КЭ для расчета фермы (см. рис. 2.12) при  $v'_1 = \varphi'_1 = \varphi_1 = v'_2 = \varphi'_2 = \varphi_2 = 0$  – блоки размерностью 1x2:

$$\mathbf{L}_1 = \mathbf{L}_2 = [l \quad m].$$

Решив уравнения (2.19) относительно глобальных перемещений, получим

$$\mathbf{q}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_1^e \\ \mathbf{q}_2^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{L}_1)^{-1} & 0 \\ 0 & (\mathbf{L}_2)^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}'_1{}^e \\ \mathbf{q}'_2{}^e \end{Bmatrix} = (\mathbf{L})^{-1} \mathbf{q}'^e.$$

Обратная матрица  $\mathbf{L}_i^{-1}$  для стержневого КЭ плоской рамы (см. рис. 2.13) равна

$$(\mathbf{L}_1)^{-1} = (\mathbf{L}_2)^{-1} = \begin{bmatrix} l & -m & 0 \\ m & l & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (\mathbf{L}_1)^T = (\mathbf{L}_2)^T.$$

Таким образом, получим следующее соотношение для перехода из ЛСК в ГСК:

$$\mathbf{q}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_1^e \\ \mathbf{q}_2^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{L}_1)^T & 0 \\ 0 & (\mathbf{L}_2)^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{q}'_1{}^e \\ \mathbf{q}'_2{}^e \end{Bmatrix} = \mathbf{L}^T \mathbf{q}'^e. \quad (2.20)$$

Поскольку компоненты узловых сил имеют такие же направления, что и компоненты перемещений, для их преобразования используется аналогичное выражение

$$\mathbf{P}^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{p}_1^e \\ \mathbf{p}_2^e \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{L}_1)^T & 0 \\ 0 & (\mathbf{L}_2)^T \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{p}'_1^e \\ \mathbf{p}'_2^e \end{Bmatrix} = \mathbf{L}^T \mathbf{P}'^e. \quad (2.21)$$

Преобразование координат по (2.20), (2.21) справедливо и для других типов стержневых КЭ.

Выражения, устанавливающие связь между узловыми силами в КЭ и его узловыми перемещениями соответственно в глобальной и локальной системах координат, имеют вид:

$$\mathbf{K}^e \mathbf{q}^e = \mathbf{P}^e; \quad \mathbf{K}'^e \mathbf{q}'^e = \mathbf{P}'^e. \quad (2.22)$$

На основании того, что работа узловых сил на перемещениях соответствующих узлов не зависит от системы координат (т. е. является инвариантной по отношению к системам координат), можно записать

$$(\mathbf{q}^e)^T \mathbf{P}^e = (\mathbf{q}'^e)^T \mathbf{P}'^e. \quad (2.23)$$

Подставляя векторы нагрузки из (2.22) в равенство (2.23) и учитывая преобразование (2.19), получим

$$(\mathbf{q}^e)^T \mathbf{K}^e \mathbf{q}^e = (\mathbf{L} \mathbf{q}^e)^T \mathbf{K}'^e \mathbf{L} \mathbf{q}^e.$$

Отсюда следует

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{L}^T \mathbf{K}'^e \mathbf{L}. \quad (2.24)$$

Таким образом, если при формировании глобальной матрицы жесткости и вектора узловых сил системы конечных элементов возникает необходимость перехода из ЛСК в ГСК, следует использовать выражения (2.21) и (2.24).

После решения системы разрешающих уравнений и определения глобальных узловых перемещений обычно производится поэлементный расчет внутренних усилий (напряжений). В этом случае для компонент узловых перемещений по формуле (2.19) выполняется обратный переход из ГСК в ЛСК для каждого конечного элемента.

### 2.2.3. Пример расчета стержневой системы

В качестве примера рассмотрим плоскую раму, нагружение и геометрические характеристики которой показаны на рис. 2.15, а. Конечно-элементная схема с нумерацией узлов и элементов представлена на рис. 2.15, б.

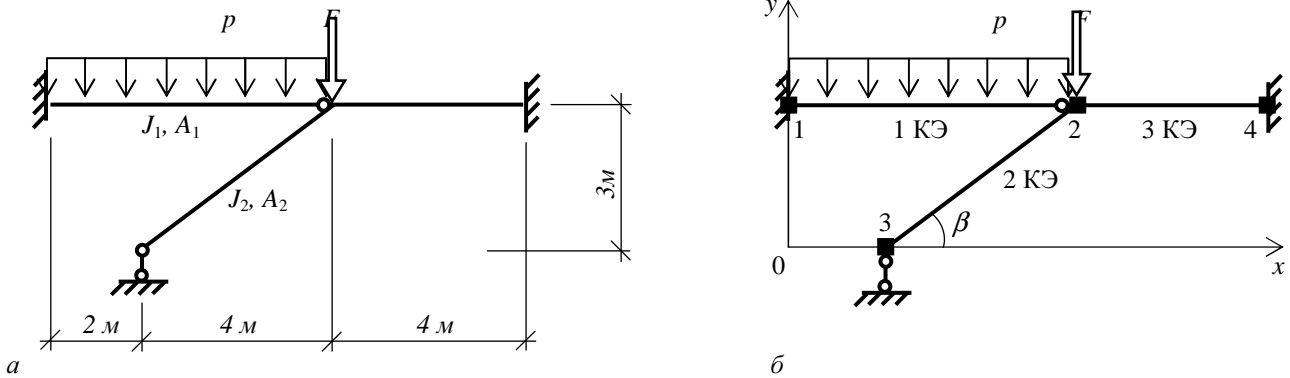


Рис. 2.15

Примем следующие значения нагрузки:  $p = 5$  кН/м,  $F = 10$  кН, геометрические характеристики поперечных сечений:  $A_1 = 26.8 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ ,  $J_1 = 1840 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$ ,  $A_2 = A_3 = 34.8 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ ,  $J_2 = J_3 = 3460 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$ , модуль упругости  $E = 2 \cdot 10^8$  кН/м<sup>2</sup>.

На основе выражений (2.15) сформируем МЖ и ВН для каждого конечного элемента рамы.

Для 1-го элемента ЛСК совпадает с ГСК. Подставив в (2.15)  $l = 6$  м,  $A = 26.8 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ ,  $J = 1840 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$ ,  $p_x = 0$ ,  $p_y = -5$  кН/м, получим

$$K^{(1)} = \begin{bmatrix} 89333.3 & 0 & 0 & -89333.3 & 0 & 0 \\ 0 & 204.44 & 613.33 & 0 & -204.44 & 613.33 \\ 0 & 613.33 & 2453.33 & 0 & -613.33 & 1226.67 \\ -89333.3 & 0 & 0 & 89333.3 & 0 & 0 \\ 0 & -204.44 & -613.33 & 0 & 204.44 & -613.33 \\ 0 & 613.33 & 1226.67 & 0 & -613.33 & 2453.33 \end{bmatrix}; \quad P^{(1)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -15 \\ -15 \\ 0 \\ -15 \\ 15 \end{Bmatrix}.$$

Для 2-го элемента  $l = 5$  м,  $A = 34.8 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ ,  $J = 3460 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$ ,  $p_x = 0$ ,  $p_y = 0$ . Вычислим МЖ и ВН сначала в локальной системе:

$$K'^{(2)} = \begin{bmatrix} 139200 & 0 & 0 & -139200 & 0 & 0 \\ 0 & 664.32 & 1660.8 & 0 & -664.32 & 1660.8 \\ 0 & 1660.8 & 5536 & 0 & -1660.8 & 2768 \\ -139200 & 0 & 0 & 139200 & 0 & 0 \\ 0 & -664.32 & -1660.8 & 0 & 664.32 & -1660.8 \\ 0 & 1660.8 & 2768 & 0 & -1660.8 & 5536 \end{bmatrix}; \quad P'^{(2)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Поскольку ЛСК этого элемента не совпадает с ГСК, выполним преобразование координат согласно (2.21), (2.24), т. е.

$$\mathbf{K}^{(2)} = (\mathbf{L}^{(2)})^T \mathbf{K}'^{(2)} \mathbf{L}^{(2)}, \quad \mathbf{P}^{(2)} = (\mathbf{L}^{(2)})^T \mathbf{P}'^{(2)},$$

где матрица  $\mathbf{L}$  для 2-го элемента, с учетом  $l = \cos \beta = 0.8$  и  $m = \sin \beta = 0.6$ , равна

$$\mathbf{L}^{(2)} = \begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -m & l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & l & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -m & l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.6 & 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.8 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.6 & 0.8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Выполнив, таким образом, преобразование, получим

$$\mathbf{P}^{(2)} = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{K}^{(2)} = \begin{bmatrix} 89327.15 & 66497.1 & -996.48 & -89327.16 & -66497.13 & -996.48 \\ 66497.13 & 50537.17 & 1328.64 & -66497.13 & -50537.17 & 1328.64 \\ -996.48 & 1328.64 & 5536 & 996.48 & -1328.64 & 2768 \\ -89327.16 & -66497.13 & 996.48 & 89327.15 & 66497.13 & 996.48 \\ -66497.13 & -50537.17 & -1328.64 & 66497.13 & 50537.17 & -1328.64 \\ -996.48 & 1328.64 & 2768 & 996.48 & -1328.64 & 5536 \end{bmatrix}.$$

Так как ЛСК для 3-го элемента совпадает с ГСК, преобразования координат не требуется. Подставив в (2.15)  $l = 4$  м,  $A = 34.8 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>,  $J = 3460 \cdot 10^{-8}$  м<sup>4</sup>,  $p_x = 0$ ,  $p_y = 0$ , получим

$$\mathbf{K}^{(3)} = \begin{bmatrix} 174000 & 0 & 0 & -174000 & 0 & 0 \\ 0 & 1297.5 & 2595 & 0 & -1297.5 & 2595 \\ 0 & 2595 & 6920 & 0 & -2595 & 3460 \\ -174000 & 0 & 0 & 174000 & 0 & 0 \\ 0 & -1297.5 & -2595 & 0 & 1297.5 & -2595 \\ 0 & 2595 & 3460 & 0 & -2595 & 6920 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{P}^{(3)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

При формировании глобальной матрицы жесткости и вектора узловых сил будем руководствоваться следующим представлением векторов узловых перемещений для каждого конечного элемента и аналогичного вектора для всей стержневой системы:

$$\mathbf{q}^{(1)} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ \varphi'_2 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{q}^{(2)} = \begin{Bmatrix} u_3 \\ v_3 \\ \varphi_3 \\ u_2 \\ v_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{q}^{(3)} = \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \varphi_2 \\ u_4 \\ v_4 \\ \varphi_4 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \varphi_2 \\ \varphi'_2 \\ u_3 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix}.$$

Здесь шарнирное прикрепление 1-го элемента к узлу 2 учтено введением дополнительной степени свободы – угла поворота правого узла 1-го элемента  $\varphi'_2$ . Кроме того, из глобального вектора узловых перемещений  $\mathbf{q}$  заведомо исключены компоненты, соответствующие заданным нулевым значениям перемещений:

$$u_1 = v_1 = \varphi_1 = v_3 = u_4 = v_4 = \varphi_4 = 0.$$

Глобальная матрица жесткости  $\mathbf{K}$  образуется внесением на соответствующие позиции коэффициентов матриц  $\mathbf{K}^{(1)}, \mathbf{K}^{(2)}, \mathbf{K}^{(3)}$ , их суммированием. Подобным же образом формируется вектор узловых сил системы  $\mathbf{P}$ . Добавив в него сосредоточенную силу во 2-м узле  $P_{y2} = -F = -10$  кН, получим систему разрешающих уравнений МКЭ в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} 352660.45 & 66497.13 & 996.48 & 0 & -89327.16 & 996.48 \\ 66497.13 & 52039.11 & 1266.36 & -613.33 & -66497.13 & -1328.64 \\ 996.48 & 1266.36 & 12456 & 0 & -996.48 & 2768 \\ 0 & -613.33 & 0 & 2453.33 & 0 & 0 \\ -89327.16 & -66497.13 & -996.48 & 0 & 89327.16 & -996.48 \\ 996.48 & -1328.64 & 2768 & 0 & -996.48 & 5536 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \varphi_2 \\ \varphi'_2 \\ u_3 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -25 \\ 0 \\ 15 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Так как кинематические граничные условия были учтены при формировании системы (путем исключения заданных нулевых неизвестных и соответствующих им уравнений), полученная СЛАУ является невырожденной и ее решением будут следующие значения узловых перемещений:

$$\mathbf{q} = \begin{Bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ \varphi_2 \\ \varphi'_2 \\ u_3 \\ \varphi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10^{-10} \\ -0.0153 \\ 0.00215 \\ 0.00229 \\ -0.01144 \\ -0.00681 \end{Bmatrix}.$$

Векторы узловых перемещений для каждого КЭ:

$$\mathbf{q}^{(1)} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 10^{-10} \\ -0.0153 \\ 0.00229 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{q}^{(2)} = \begin{Bmatrix} -0.01144 \\ 0 \\ -0.00681 \\ 10^{-10} \\ -0.0153 \\ 0.00215 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{q}^{(3)} = \begin{Bmatrix} 10^{-10} \\ -0.0153 \\ 0.00215 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

Подставив узловые перемещения в выражение (2.16), получим следующие значения внутренних усилий по концам каждого из элементов:

$$\mathbf{S}^{(1)} = \begin{Bmatrix} N_1 \\ Q_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10^{-5} \\ 19.53 \\ -27.19 \\ 10^{-5} \\ -10.47 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{S}^{(2)} = \begin{Bmatrix} N_1 \\ Q_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -3.72 \\ 4.96 \\ 0 \\ -3.72 \\ 4.96 \\ 24.81 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{S}^{(3)} = \begin{Bmatrix} N_1 \\ Q_1 \\ M_1 \\ N_2 \\ Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2 \cdot 10^{-5} \\ -14.27 \\ 24.81 \\ -2 \cdot 10^{-5} \\ -14.27 \\ -32.26 \end{Bmatrix}.$$

Полученные результаты в виде картины перемещений рамы и эпюр внутренних усилий приведены на рис. 2.16.

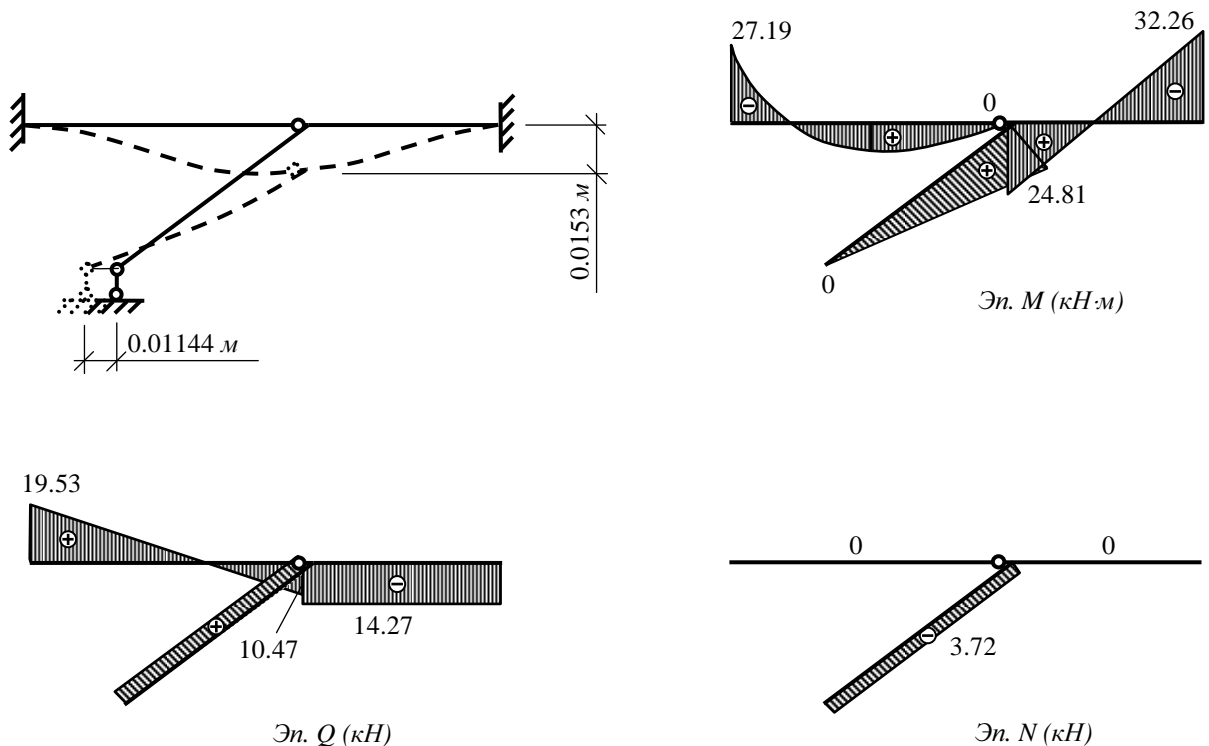


Рис. 2.16

## 2.3. МКЭ для континуальных систем

### 2.3.1. Плоская задача теории упругости

Решение двумерных континуальных задач было одним из первых примеров успешного применения метода конечных элементов. Ниже приведена конечно-элементная формулировка и основные соотношения МКЭ применительно к плоской задаче теории упругости. Данная задача имеет широкое поле приложений при расчете НДС самых разнообразных конструкций и сооружений.

Пусть  $\Omega$  – двумерная область с границей  $S$  (рис. 2.17, а), являющаяся плоской проекцией упругого тела толщиной  $h$  (таким образом, объем тела  $V = h\Omega$ ). На части  $S_g$  границы заданы статические граничные условия (в том числе и нулевые) в виде распределенной нагрузки  $g$  (в том числе и нулевой), отнесенной к единице площади граничной поверхности ( $g_x, g_y$  – соответственно  $x$ - и  $y$ -компоненты нагрузки). На другой части границы области –  $S_u$  ( $S_g \cup S_u = S$ ) заданы кинематические граничные условия – в виде ограничений, накладываемых на перемещения точек (например, заданных перемещений как нулевых – жесткие связи, так и отличных от нуля).

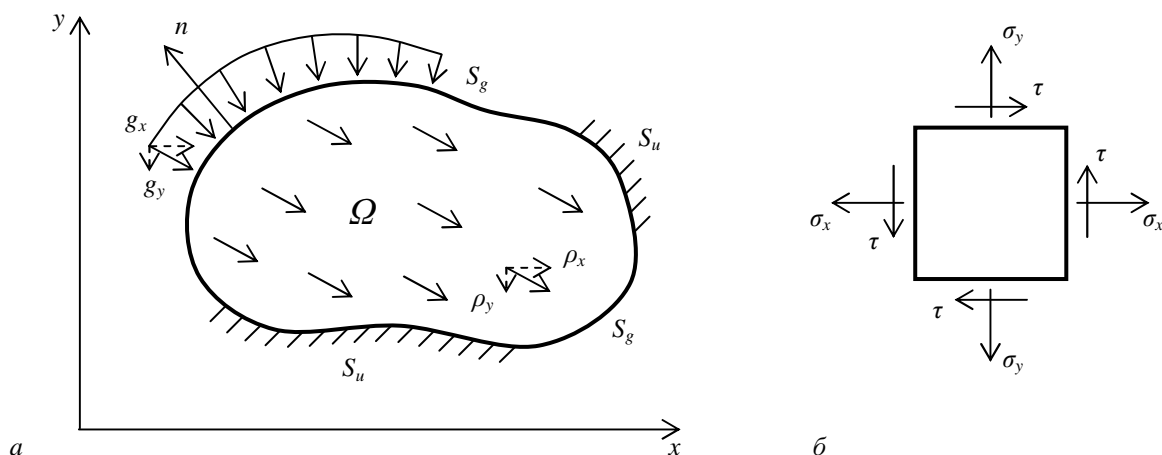


Рис. 2.17

#### Основные уравнения плоской задачи теории упругости

Запишем эти уравнения для статической задачи [1].

1. Уравнения равновесия (статические уравнения) в каждой точке области  $\Omega$ :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \rho_x \\ \rho_y \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \text{ или в сокращенном виде: } \mathbf{A}^T \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\rho} = \mathbf{0} \in \Omega. \quad (2.25)$$

2. Уравнения Коши (геометрические уравнения) в каждой точке  $\Omega$ :

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} \quad \text{или} \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}\mathbf{u} \in \Omega. \quad (2.26)$$

3. Обобщенный закон Гука (физические уравнения) в каждой точке  $\Omega$ :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{или} \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon} \in \Omega. \quad (2.27)$$

4. Статические граничные условия в каждой точке части границы  $S_g$ :

$$\begin{bmatrix} l & 0 & m \\ 0 & m & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} g_x \\ g_y \end{Bmatrix} \quad \text{или} \quad (\mathbf{L}_s)^T \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{g}_s \in S_g. \quad (2.28)$$

5. Кинематические граничные условия в каждой точке  $S_u$ :

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_s \\ v_s \end{Bmatrix} \quad \text{или} \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_s \in S_u. \quad (2.29)$$

В уравнениях (2.25)–(2.29):  $\boldsymbol{\sigma}$  – вектор напряжений, содержащий компоненты нормальных  $\sigma_x, \sigma_y$  и касательного  $\tau$  напряжений в области  $\Omega$  (рис. 2.17, б);  $\mathbf{u}$  – вектор перемещений, содержащий горизонтальное  $u$  и вертикальное  $v$  перемещения точек в области  $\Omega$ ;  $\boldsymbol{\varepsilon}$  – вектор деформаций, содержащий компоненты линейных  $\varepsilon_x, \varepsilon_y$  и угловой  $\gamma_{xy}$  деформаций в области  $\Omega$ ;  $\boldsymbol{\rho}$  – вектор заданных объемных сил в области  $\Omega$ ;  $\mathbf{g}_s$  – вектор заданных поверхностных сил на части границы  $S_g$ ;  $\mathbf{u}_s$  – вектор заданных перемещений на части границы  $S_u$ ;  $\mathbf{A}$  – матричный оператор дифференцирования;  $\mathbf{L}_s$  – матрица направляющих косинусов внешней нормали  $\mathbf{n}$  к границе  $S$  ( $l = \cos(\mathbf{n}, x)$ ,  $m = \cos(\mathbf{n}, y)$ );  $\mathbf{E}$  – матрица упругих постоянных для изотропного материала (*матрица упругости*).

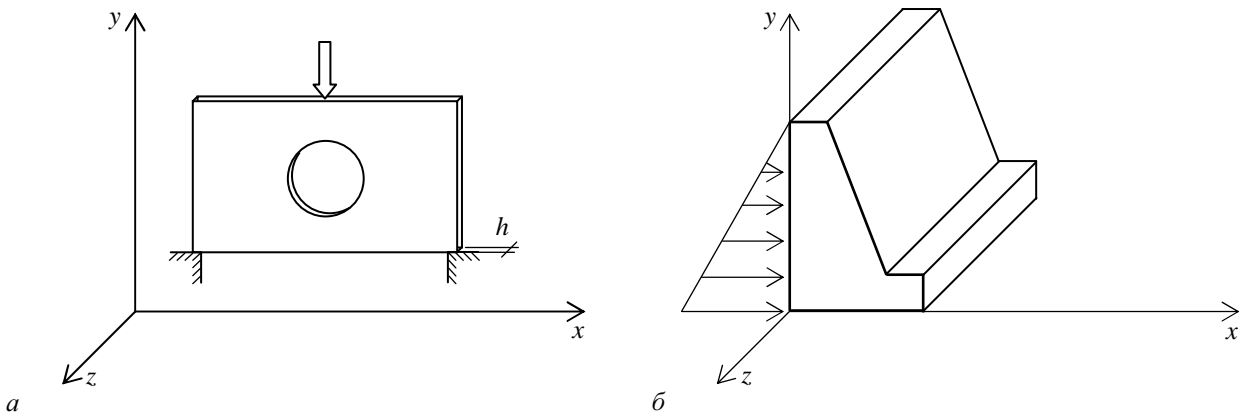


Рис. 2.18



Матрица  $\mathbf{E}$  записана в виде, используемом при *плоском напряженном состоянии* (ПНС). ПНС имеет место в том случае, если рассматриваемое тело представляет собой тонкую пластинку, грани которой свободны от нормальных напряжений –  $\sigma_z = 0$  (например, тонкостенная конструкция, рис. 2.18, а). В случае *плоского деформированного состояния* (ПДС), когда перемещения всех точек тела параллельны одной плоскости – плоскости деформации (например, подпорная стенка, рис. 2.18, б), вид матрицы  $\mathbf{E}$  остается прежним с заменой величин  $E, \nu$  на величины  $E' = \frac{E}{1-\nu^2}, \nu' = \frac{\nu}{1-\nu}$ .

Таким образом, полная дифференциальная постановка плоской задачи теории упругости описывается уравнениями (2.25)–(2.27). Совместно с заданными граничными условиями (2.28), (2.29) указанные дифференциальные уравнения образуют различные краевые задачи теории упругости. Однако при численном решении этих задач с помощью МКЭ более приемлемыми являются все же не дифференциальные, а вариационные постановки. Они позволяют определять искомые функции из условия экстремума какого-либо функционала, который, как правило, выражает энергию или работу рассматриваемой системы.

Наиболее распространена вариационная постановка, основанная на функционале Лагранжа или функционале полной потенциальной энергии системы. Последняя, как известно, складывается из потенциальной энергии упругой деформации и взятой со знаком минус работы внешних сил (как объемных, так и поверхностных) на действительных перемещениях:

$$\Pi_{\mathcal{L}}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathbf{A}\mathbf{u})^T \mathbf{E} \mathbf{A}\mathbf{u} h d\Omega - \int_{\Omega} (\mathbf{u})^T \boldsymbol{\rho} h d\Omega - \int_{S_g} (\mathbf{u})^T \mathbf{g}_s h dS. \quad (2.30)$$

Необходимое условие экстремума функционала (2.30) – равенство нулю *вариации* данного функционала:

$$\Pi_{\mathcal{L}}(\mathbf{u}) \rightarrow \min \text{ или } \delta\Pi_{\mathcal{L}} = 0,$$

совместно с дополнительным условием (2.29) представляет вариационную постановку плоской задачи теории упругости в перемещениях (принцип стационарности функционала Лагранжа). Ее решением являются перемещения  $u(x,y)$  и  $v(x,y)$ , используемые затем при вычислении деформаций и напряжений.

### Конечно-элементная дискретизация задачи

Подставив аппроксимирующее выражение (2.1), связывающее вектор непрерывных перемещений  $\mathbf{u}$  с вектором узловых перемещений  $\mathbf{q}^e$ , в функционал (2.30), получим следующее вариационное уравнение для системы КЭ:

$$\Pi_{\mathcal{L}} = \sum^e \Pi^e(\mathbf{q}^e) = \sum^e \left( \frac{1}{2} \int_{\Omega^e} (\mathbf{A}\mathbf{N}\mathbf{q}^e)^T \mathbf{E} \mathbf{A}\mathbf{N}\mathbf{q}^e h d\Omega - \int_{\Omega^e} (\mathbf{N}\mathbf{q}^e)^T \boldsymbol{\rho} h d\Omega - \int_{S_g^e} (\mathbf{N}\mathbf{q}^e)^T \mathbf{g}_s h dS \right),$$

где  $\Omega^e$  – часть области  $\Omega$ , занимаемая отдельным элементом;  $S_g^e$  – часть границы элемента, совпадающая с частью общей границы всей области  $S_g$ .

Условие экстремума функционала (2.30) запишем в следующем виде:

$$\sum^e \frac{\partial \Pi^e(\mathbf{q}^e)}{\partial \mathbf{q}^e} = \sum^e \left( \int_{\Omega^e} (\mathbf{AN})^T \mathbf{E} \mathbf{AN} h d\Omega \cdot \mathbf{q}^e - \int_{\Omega^e} (\mathbf{N})^T \boldsymbol{\rho} h d\Omega - \int_{S_g^e} (\mathbf{N})^T \mathbf{g}_s h dS \right) = 0. \quad (2.31)$$

Матричное уравнение (2.31) представляет собой систему разрешающих уравнений МКЭ, причем выражение в скобках определяет вклад каждого КЭ в эту систему. Матрица жесткости КЭ определяется следующим выражением:

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} (\mathbf{AN})^T \mathbf{E} \mathbf{AN} h d\Omega = \int_{\Omega^e} (\mathbf{B})^T \mathbf{E} \mathbf{B} h d\Omega. \quad (2.32)$$

Здесь  $\mathbf{B}$  – матрица, элементы которой получены путем дифференцирования функций формы (*матрица градиентов функций формы*). Вектор нагрузки КЭ учитывает распределенные по элементу объемные силы и распределенные по части его границы поверхностные нагрузки:

$$\mathbf{P}^e = \int_{\Omega^e} (\mathbf{N})^T \boldsymbol{\rho} h d\Omega + \int_{S_g^e} (\mathbf{N})^T \mathbf{g}_s h dS.$$

Обычно на практике поверхностная нагрузка  $\mathbf{g}_s$  распределяется по узловым точкам, лежащим на границе  $S_g$ , вручную. Полученные таким образом узловые силы добавляются непосредственно в глобальный вектор нагрузки. В этом случае элементный ВН принимает такой вид:

$$\mathbf{P}^e = \int_{\Omega^e} (\mathbf{N})^T \boldsymbol{\rho} h d\Omega. \quad (2.33)$$

Подставив аппроксимацию (2.1) в уравнения (2.26) и (2.27), получим матричные выражения, позволяющие определять деформации и напряжения в КЭ через известные узловые перемещения:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{ANq}^e = \mathbf{Bq}^e; \quad \boldsymbol{\sigma}^e = \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{EANq}^e = \mathbf{EBq}^e, \quad (2.34)$$

Простота и обоснованность схемы МКЭ, основанной на принципе минимума потенциальной энергии, в какой-то мере сдерживают развитие конечно-элементных формулировок, опирающихся на альтернативные вариационные принципы. Как указывалось в 2.1.1, принципы Кастилиано и Рейсснера, в свою очередь, также имеют некоторые положительные стороны, в частности, дают верхнюю границу получаемого решения. Однако их развитие и применение ограничены возникающими при построении соответствующих конечно-элементных соотношений трудностями.

Преимущества и недостатки форм МКЭ, основанных на применении функционалов Кастилиано, Рейсснера и их модификаций (т. е. метода сил и смешанного метода), рассматриваются в [5, 27].

## 2.3.2. Конечные элементы плоской задачи теории упругости

Чаще всего при решении плоской задачи теории упругости МКЭ используются элементы треугольной и прямоугольной формы.

Рассмотрим *треугольный элемент* толщиной  $h$  с тремя узлами в вершинах (рис. 2.19, а). В каждом из узлов примем по две степени свободы, соответствующие горизонтальному и вертикальному перемещениям (рис. 2.19, б).

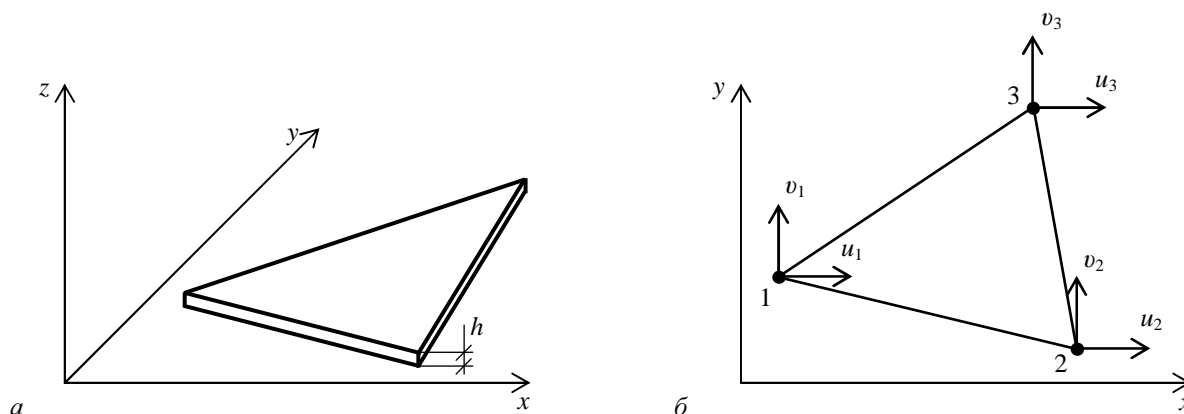


Рис. 2.19

МЖ и ВН конечного элемента построим непосредственно в глобальной системе координат с использованием вариационного метода. В качестве интерполирующих функций для перемещений используем линейные полиномы от  $x$ ,  $y$  (число членов в полиноме соответствует числу степеней свободы КЭ):

$$u(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y; \quad v(x, y) = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y.$$

Таким образом, вектор перемещений произвольной точки КЭ

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{bmatrix} \{\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \quad \alpha_5 \quad \alpha_6\}^T. \quad (2.35)$$

Для определения неизвестных коэффициентов  $\alpha_i$  подставим в (2.35) координаты узлов элемента. В результате получим следующую систему уравнений:

$$\mathbf{q} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_2 & y_2 \\ 0 & x_3 & y_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} = \mathbf{C} \boldsymbol{\alpha}.$$

Здесь  $\mathbf{q}$  – вектор обобщенных узловых перемещений;  $\mathbf{C}$  – матрица, образованная подстановкой координат узлов КЭ;  $\boldsymbol{\alpha}$  – вектор неопределенных коэффициентов.

Решив систему относительно коэффициентов, получим

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} 2\Delta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s & 0 & d & 0 & b & 0 \\ t & 0 & c & 0 & a & 0 \\ 0 & 2\Delta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & d & 0 & b \\ 0 & t & 0 & c & 0 & a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{q}^e.$$

Элементы обратной матрицы  $\mathbf{C}^{-1}$  соответственно равны:  $a = x_2 - x_1$ ,  $b = y_1 - y_2$ ,  $c = x_1 - x_3$ ,  $d = y_3 - y_1$ ,  $s = -b - d$ ,  $t = -a - c$ ,  $2\Delta = ad - bc$  ( $\Delta$  – площадь треугольного элемента,  $\Delta = \Omega^e$ ).

Подставив вектор  $\boldsymbol{\alpha}$  в (2.35) и перемножив матрицу членов интерполирующего полинома на матрицу  $\mathbf{C}^{-1}$ , получим аппроксимирующее выражение для перемещений  $u$  и  $v$  в пределах элемента через значения этих величин в узловых точках:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{q}.$$

Входящие в матрицу  $\mathbf{N}$  функции формы соответственно равны

$$N_1 = \frac{1}{2\Delta} (2\Delta + sx + ty); \quad N_2 = \frac{1}{2\Delta} (dx + cy); \quad N_3 = \frac{1}{2\Delta} (bx + ay).$$

Продифференцируем функции формы посредством матричного оператора  $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} \mathbf{N} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} s & 0 & d & 0 & b & 0 \\ 0 & t & 0 & c & 0 & a \\ t & s & c & d & a & b \end{bmatrix}. \quad (2.36)$$

Подставив (2.36) в (2.32) и учитывая то, что подынтегральное выражение содержит только константы, получим

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} (\mathbf{B})^T \mathbf{E} \mathbf{B} h d\Omega = (\mathbf{B})^T \mathbf{E} \mathbf{B} h \int_{\Omega^e} d\Omega = (\mathbf{B})^T \mathbf{E} \mathbf{B} h \Delta.$$

В окончательном виде МЖ треугольного элемента приведена ниже:

$$\mathbf{K}^e = \kappa \begin{bmatrix} s^2 + \mu t^2 & st(v + \mu) & ds + \mu ct & vcs + \mu dt & bs + \mu at & vas + \mu bt \\ & t^2 + \mu s^2 & vdt + \mu cs & ct + \mu ds & vbt + \mu as & at + \mu bs \\ & & d^2 + \mu c^2 & cd(v + \mu) & bd + \mu ac & vad + \mu bc \\ & & & c^2 + \mu d^2 & vbc + \mu ad & ac + \mu bd \\ & & & & b^2 + \mu a^2 & ab(v + \mu) \\ & & & & & a^2 + \mu b^2 \end{bmatrix}, \quad (2.37)$$

*симметрично*

где  $\kappa = \frac{Eh}{4\Delta(1-\nu^2)}$ ;  $\mu = \frac{1-\nu}{2}$ .

Используя (2.33), запишем ВН для треугольного элемента:

$$\mathbf{P}^e = \int_{\Omega^e} (\mathbf{N})^T \boldsymbol{\rho} h d\Omega = \int_{\Omega^e} \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \\ N_3 & 0 \\ 0 & N_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \rho_x \\ \rho_y \end{Bmatrix} h d\Omega.$$

При постоянных в пределах КЭ объемных силах можно воспользоваться формулами интегрирования по площади треугольника [10], в результате получим

$$\mathbf{P}^e = \frac{h\Omega^e}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \rho_x \\ \rho_y \end{Bmatrix} = \frac{h\Delta}{3} \begin{Bmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ \rho_x \\ \rho_y \\ \rho_x \\ \rho_y \end{Bmatrix}. \quad (2.38)$$

Это значит, что объемные силы, действующие в направлениях  $x$  и  $y$ , распределяются в узлы треугольного элемента на три равные части.

После того, как найдены узловые перемещения, определяются деформации и напряжения в каждом КЭ. Подставив (2.36) в (2.34), получим следующее выражение для деформаций:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} s & 0 & d & 0 & b & 0 \\ 0 & t & 0 & c & 0 & a \\ t & s & c & d & a & b \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{Bmatrix} su_1 + du_2 + bu_3 \\ tv_1 + cv_2 + av_3 \\ tu_1 + sv_1 + cu_2 + dv_2 + au_3 + bv_3 \end{Bmatrix}$$

и напряжений:

$$\sigma^e = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau \end{Bmatrix} = \frac{E}{2\Delta(1-\nu^2)} \begin{Bmatrix} su_1 + du_2 + bu_3 + \nu(tv_1 + cv_2 + av_3) \\ \nu(su_1 + du_2 + bu_3) + tv_1 + cv_2 + av_3 \\ \mu(tu_1 + sv_1 + cu_2 + dv_2 + au_3 + bv_3) \end{Bmatrix}. \quad (2.39)$$

Поскольку первые производные аппроксимирующих функций (матрица градиентов (2.36)) – константы, деформации и напряжения по области треугольного КЭ также постоянны. Принято относить их к центру тяжести элемента.

Используя треугольные КЭ, мы получаем кусочно-постоянное поле напряжений в рассматриваемой области. На рис. 2.20 приведен простой пример балки, нагруженной постоянным изгибающим моментом. Можно видеть, что полученные с помощью МКЭ постоянные величины напряжений, приведенные к центрам тяжести элементов, "берут вилку" точное решение (рассмотрено поперечное сечение в средней части балки). На практике для уточнения значений напряжений и удобства представления результатов расчета часто применяется процедура *осреднения* величин в общих узлах смежных элементов. Для большей точности рекомендуется производить *весовое осреднение* напряжений (т. е. учитывать вклад каждого КЭ в соответствии с его размерами и положением центра тяжести).

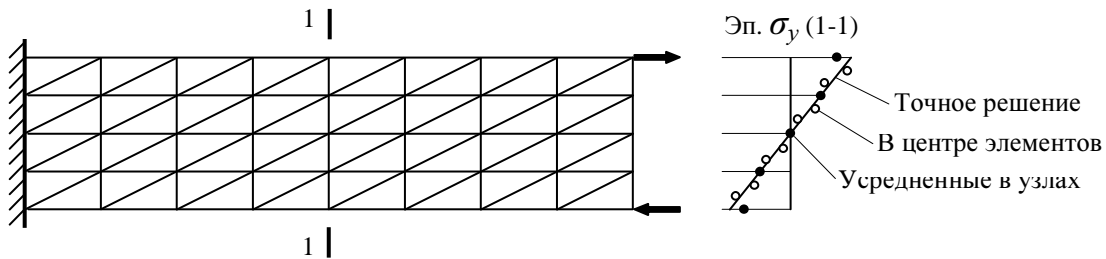


Рис. 2.20

Рассмотрим *прямоугольный КЭ* с четырьмя узлами в вершинах (рис. 2.21). Элемент имеет восемь степеней свободы – по две в каждом узле. Нумерация узлов против часовой стрелки, первый узел – в нижнем левом углу.

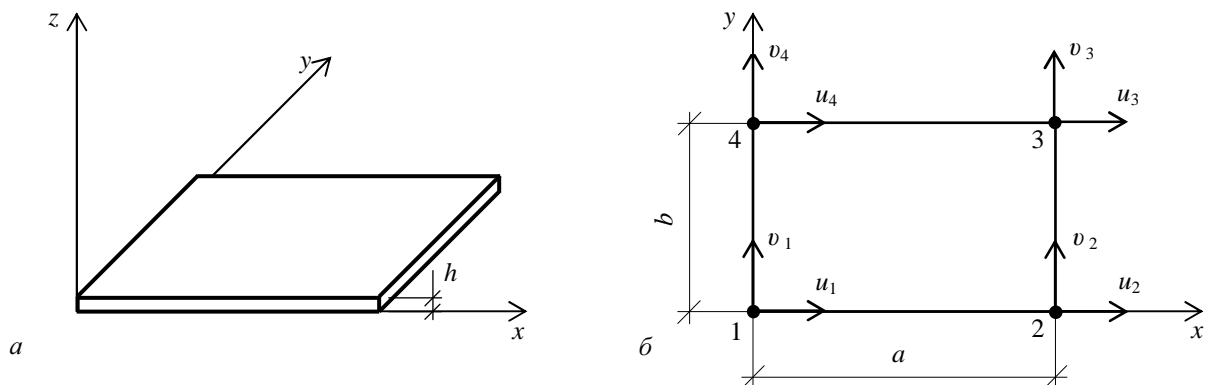


Рис. 2.21

В случае прямоугольного элемента можно предложить несколько различных аппроксимаций. Ниже приведены некоторые из них.

1. С линейным законом изменения перемещений по сторонам элемента [26]:

$$u(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy; \quad v(x, y) = \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy. \quad (2.40)$$

2. С линейным законом изменения нормальных напряжений в элементе [5, 19]:

$$\sigma_x(y) = \alpha_1 + \alpha_2 y; \quad \sigma_y(x) = \alpha_3 + \alpha_4 x; \quad \tau = \alpha_5.$$

Исходя из данного закона распределения напряжений, используя (2.26), (2.27), можно получить следующую аппроксимацию для перемещений (удовлетворяющую уравнениям равновесия, но не обеспечивающую межэлементную непрерывность перемещений):

$$u(x, y) = \frac{\alpha_1 - \alpha_3 \nu}{E} x + \frac{\alpha_2}{E} xy - \frac{\alpha_4}{2E} (\nu x^2 + y^2) + \alpha_6 y + \alpha_7;$$

$$v(x, y) = \frac{\alpha_3 - \alpha_1 \nu}{E} y + \frac{\alpha_4}{E} xy - \frac{\alpha_2}{2E} (x^2 + \nu y^2) + \left(\frac{\alpha_5}{G} - \alpha_6\right) x + \alpha_8.$$

3. С квадратичным законом изменения перемещений по сторонам элемента:

$$u(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 xy + \alpha_4 y - 0.5 \alpha_7 y^2; \quad v(x, y) = \alpha_5 + \alpha_6 y + \alpha_7 xy + \alpha_8 x - 0.5 \alpha_3 x^2.$$

Используем первую, самую простую из приведенных аппроксимаций. Для получения функций формы, отвечающих принятому закону изменения перемещений, воспользуемся тем же способом, что и для треугольного элемента.

Выразим узловые перемещения в прямоугольном КЭ через коэффициенты  $\alpha$ :

$$\mathbf{q}^e = \begin{Bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & 0 & 0 \\ 1 & a & b & ab & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a & b & ab \\ 1 & 0 & b & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & b & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \\ \alpha_7 \\ \alpha_8 \end{Bmatrix} = \mathbf{C} \mathbf{a}.$$

Обратив матрицу  $\mathbf{C}$  и подставив коэффициенты  $\alpha$  в (2.39), получим следующую аппроксимацию перемещений по области элемента:

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \mathbf{q} = \mathbf{N} \mathbf{q}. \quad (2.41)$$

Функции формы для прямоугольного КЭ имеют вид

$$N_1 = \left(1 - \frac{x}{a}\right) \left(1 - \frac{y}{b}\right); \quad N_2 = \frac{x}{a} \left(1 - \frac{y}{b}\right); \quad N_3 = \frac{x}{a} \frac{y}{b}; \quad N_4 = \frac{y}{b} \left(1 - \frac{x}{a}\right).$$

Подставив производные функций формы, т. е. матрицу градиентов, в (2.32) и взяв интеграл по площади прямоугольника ( $d\Omega = dx dy$ , пределы интегрирования: от 0 до  $a$  и от 0 до  $b$  соответственно), в конечном итоге получим

$$\mathbf{K}^e = \mathbf{K} \begin{bmatrix} 2(d+c_\mu) & s+t & c_\mu-2d & s-t & -d-c_\mu & -s-t & d-2c_\mu & t-s \\ & 2(c+d_\mu) & t-s & -c-d_\mu & -s-t & -c-d_\mu & s-t & d_\mu-2c \\ & & 2(d+c_\mu) & -s-t & d-2c_\mu & s-t & -d-c_\mu & s+t \\ & & & 2(c+d_\mu) & t-s & d_\mu-2c & s+t & -c-d_\mu \\ & & & & 2(d+c_\mu) & s+t & c_\mu-2d & s-t \\ & & & & & 2(c+d_\mu) & t-s & c-2d_\mu \\ & & & & & & 2(d+c_\mu) & -s-t \\ & & & & & & & 2(c+d_\mu) \end{bmatrix},$$

*симметрично*

где

$$\kappa = \frac{E\delta}{(1-\nu^2)}; \quad \mu = \frac{1-\nu}{2}; \quad c = \frac{a}{6b}; \quad c_\mu = \mu c; \quad d = \frac{b}{6a}; \quad d_\mu = \mu d; \quad s = \frac{\nu}{4}; \quad t = \frac{\mu}{4}.$$

Вектор нагрузки для прямоугольного элемента

$$\mathbf{P}^e = \int_0^a \int_0^b \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \\ N_3 & 0 \\ 0 & N_3 \\ N_4 & 0 \\ 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \rho_x \\ \rho_y \end{Bmatrix} h dx dy = \frac{abh}{4} \begin{Bmatrix} \rho_x \\ \rho_y \\ \rho_x \\ \rho_y \\ \rho_x \\ \rho_y \\ \rho_x \\ \rho_y \end{Bmatrix},$$

т. е. объемные силы распределяются в узлы КЭ на четыре равные части.

Подстановка аппроксимации (2.41) в (2.34) дает следующие выражения для компонент деформаций и напряжений в области прямоугольного КЭ:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma \end{Bmatrix} = \frac{1}{a} \begin{Bmatrix} -du_1 + du_2 + \eta u_3 - \eta u_4 \\ m(-cv_1 - \xi v_2 + \xi v_3 + cv_4) \\ m(-cu_1 - \xi u_2 + \xi u_3 + cu_4) - dv_1 + dv_2 + \eta v_3 - \eta v_4 \end{Bmatrix};$$

$$\boldsymbol{\sigma}^e = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau \end{Bmatrix} = \frac{E}{a(1-\nu^2)} \begin{Bmatrix} -\chi u_1 + \chi u_2 + \eta u_3 - \eta u_4 + m\nu(-\theta v_1 - \xi v_2 + \xi v_3 + \theta v_4) \\ \nu(-\chi u_1 + \chi u_2 + \eta u_3 - \eta u_4) + m(-\theta v_1 - \xi v_2 + \xi v_3 + \theta v_4) \\ \mu m(-\theta u_1 - \xi u_2 + \xi u_3 + \theta u_4) + \mu(-\chi v_1 + \chi v_2 + \eta v_3 - \eta v_4) \end{Bmatrix}.$$

Здесь  $\mu = \frac{1-\nu}{2}$ ;  $m = \frac{a}{b}$ ;  $\xi = \frac{x}{a}$ ;  $\eta = \frac{y}{b}$ ;  $\theta = 1 - \xi$ ;  $\chi = 1 - \eta$ .



### 2.3.3. Пример решения плоской задачи

В качестве примера рассмотрим консольную пластину, равномерно нагруженную по свободному краю (рис. 2.22, а). На область пластины нанесена сетка из 12 треугольных конечных элементов, содержащая 12 узловых точек (рис. 2.22, б). Распределенная нагрузка  $p$  заменена эквивалентными сосредоточенными силами, приложенными в узлах 10, 11, 12. Собственный вес пластины не учитывается, т. е.  $\rho_x = \rho_y = 0$  для всех элементов.

Вычисление МЖ треугольных элементов производим с помощью выражения (2.37).

Так, для 1-го элемента, содержащего узлы 1, 4 и 5, матрица жесткости будет следующая:

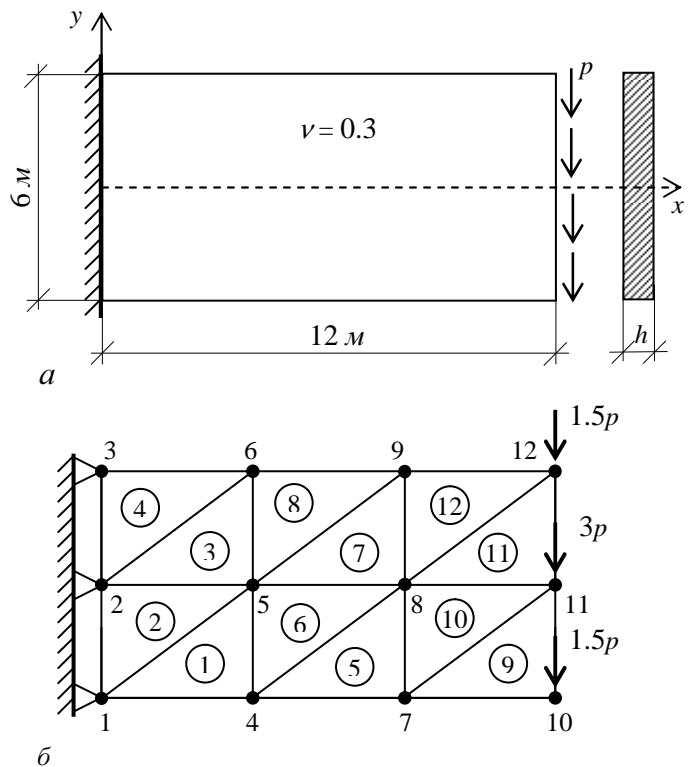


Рис. 2.22

$$\mathbf{K}^{(1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11}^{(1)} & \mathbf{K}_{14}^{(1)} & \mathbf{K}_{15}^{(1)} \\ \mathbf{K}_{41}^{(1)} & \mathbf{K}_{44}^{(1)} & \mathbf{K}_{45}^{(1)} \\ \mathbf{K}_{51}^{(1)} & \mathbf{K}_{54}^{(1)} & \mathbf{K}_{55}^{(1)} \end{bmatrix} = Eh \begin{bmatrix} 0.4121 & 0 & -0.4121 & 0.1648 & 0 & -0.1648 \\ 0 & 0.1442 & 0.1923 & -0.1442 & -0.1923 & 0 \\ -0.4121 & 0.1923 & 0.6685 & -0.3571 & -0.2564 & 0.1648 \\ 0.1648 & -0.1442 & -0.3571 & 0.8768 & 0.1923 & -0.7326 \\ 0 & -0.1923 & -0.2564 & 0.1923 & 0.2564 & 0 \\ -0.1648 & 0 & 0.1648 & -0.7326 & 0 & 0.7326 \end{bmatrix}$$

Поскольку размеры и положение всех нечетных элементов одинаковы, численное выражение их матриц жесткости точно такое же. Для четных конечных элементов получим

$$\mathbf{K}^{(2)} = \mathbf{K}^{(4)} = \mathbf{K}^{(6)} = \mathbf{K}^{(8)} = \mathbf{K}^{(10)} = \mathbf{K}^{(12)} = Eh \begin{bmatrix} 0.2564 & 0 & 0 & -0.1923 & -0.2564 & 0.1923 \\ 0 & 0.7326 & -0.1648 & 0 & 0.1648 & -0.7326 \\ 0 & -0.1648 & 0.4121 & 0 & -0.4121 & 0.1648 \\ -0.1923 & 0 & 0 & 0.1442 & 0.1923 & -0.1442 \\ -0.2564 & 0.1648 & -0.4121 & 0.1923 & 0.6685 & -0.3571 \\ 0.1923 & -0.7326 & 0.1648 & -0.1442 & -0.3571 & 0.8768 \end{bmatrix}$$

Так как собственный вес пластины не учитывается, в соответствии с (2.38) векторы нагрузки всех элементов будут равны нулю.



Сравним полученные величины с аналитическим решением данной задачи:

$$v_{11} = -225 \frac{P}{Eh}, \quad \sigma_{x3} = 15.1 \frac{P}{h}.$$

Как можно видеть, результаты расчета по МКЭ (особенно напряжения) в значительной степени отклоняются от точного решения. Это значит, что для получения удовлетворительных результатов необходимо сгустить сетку треугольных элементов или использовать более точные элементы, например, прямоугольные.

В табл. 2.1 приведены результаты расчета (вертикальное перемещение середины свободного края и напряжение  $\sigma_x$  в верхней точке закрепленного края пластины), полученные для разных сеток как треугольных, так и прямоугольных элементов. Рис. 2.23 иллюстрирует сходимость решения для перемещений и напряжений в зависимости от числа степеней свободы и типа применяемых конечных элементов.

Таблица 2.1

Сетка	Число степеней свободы	Треугольный элемент			Прямоугольный элемент		
		Число элементов	$v \left( \frac{P}{Eh} \right)$	$\sigma_x \left( \frac{P}{h} \right)$	Число элементов	$v \left( \frac{P}{Eh} \right)$	$\sigma_x \left( \frac{P}{h} \right)$
2 × 1	12	4	73.7	0.74	2	152.5	6.67
2 × 2	18	8	97.3	3.54	4	156.2	6.83
3 × 2	24	12	120.3	5.10	6	184.4	8.94
4 × 3	40	24	153.5	7.21	12	200.8	10.34
6 × 4	70	48	180.5	9.23	24	213.1	11.70
7 × 5	96	70	192.2	10.13	35	216.6	12.19
Точное решение			225.0	15.1		225.0	15.1

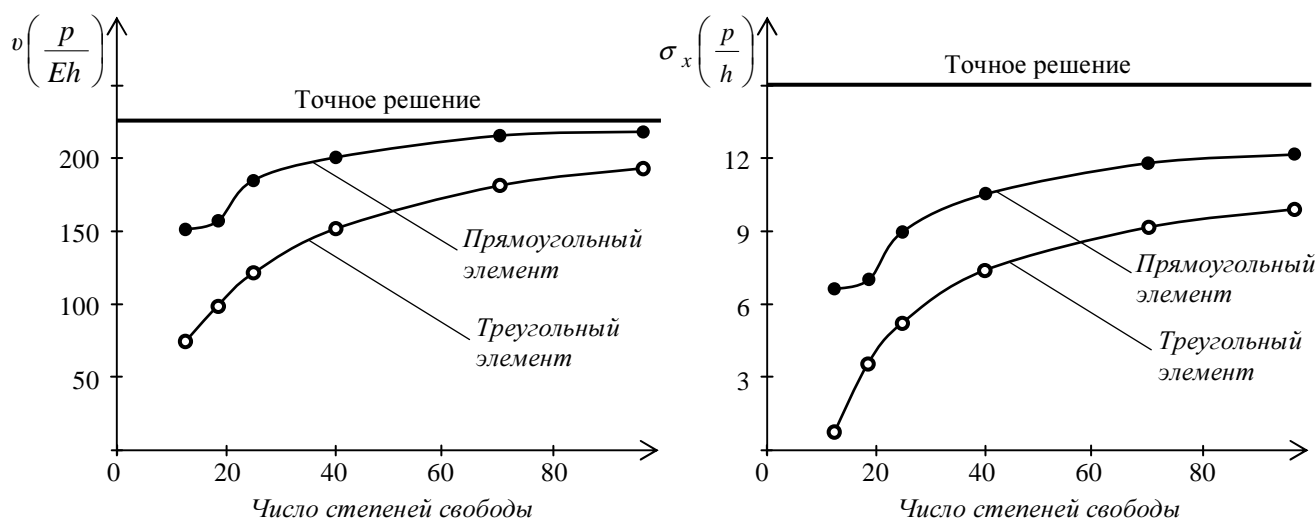


Рис.

## 2.3.4. Метод сил и смешанная формулировка МКЭ

Как уже отмечалось, для численного решения задач теории упругости в основном используется МКЭ в форме метода перемещений. Основными неизвестными здесь являются перемещения узловых точек, напряжения же вторичны и определяются путем численного дифференцирования перемещений. Вместе с тем для ряда задач могут быть более удобны схемы МКЭ в форме метода сил и смешанного метода, особенно в отношении получения напряжений. Кроме того, выполнение двойственного расчета на основе двух противоположных форм МКЭ позволяет, как правило, получить двухстороннюю оценку точного решения соответствующей задачи.

### Метод сил

Рассмотрим один из вариантов МКЭ в форме метода сил, позволяющий эффективно решать широкий класс задач непосредственно в напряжениях. В основе его лежит аппроксимация *разрывных полей напряжений* и использование *метода штрафа* для удовлетворения уравнениям равновесия. Соответствующая вариационная формулировка задачи со штрафом имеет вид условия стационарности функционала дополнительной энергии

$$\Pi(\boldsymbol{\sigma}) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}^T (\mathbf{E})^{-1} \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \int_{S_u} (\mathbf{u}_s)^T (\mathbf{L}_s)^T \boldsymbol{\sigma} dS + \infty \int_{\Omega} [(\mathbf{A})^T \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\rho}]^T [(\mathbf{A})^T \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\rho}] d\Omega$$

$$\text{при дополнительном условии } (\mathbf{L}_s)^T \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{g}_s \in S_g. \quad (2.42)$$

При использовании вариационной постановки в напряжениях основные ограничения на гладкость искомых функций накладывают уравнения равновесия (необходимо обеспечить существование кусочно-непрерывных производных от компонент напряжений). Так, согласно им для плоской задачи теории упругости обязательным является дифференцируемость напряжений  $\sigma_x$  лишь по  $x$ ,  $\sigma_y$  – лишь по  $y$ , а  $\tau$  – и по  $x$ , и по  $y$ . Таким образом, нормальные напряжения могут претерпевать разрывы на площадках, перпендикулярных к границам элементов. По сравнению с *непрерывной аппроксимацией* использование такого допущения способствует расширению класса статически допустимых полей напряжений, среди которых разыскивается решение. Это позволяет в большей мере минимизировать функционал дополнительной энергии, в результате решение задачи в среднем более близко к точному. Использование такого рода *разрывных аппроксимаций* ведет к необходимости применять особый класс конечных элементов. Расположение узловых точек здесь должно обеспечивать выполнение условий разрывности по нормальным напряжениям.

На рис. 2.24 показан один из простых элементов такого вида, представляющий собой прямоугольник, четыре узла в вершинах которого отвечают касательным напряжениям, два узла по каждой из боковых сторон – нормальным напряжениям  $\sigma_x$ , два узла по верхней и нижней сторонам –  $\sigma_y$ .

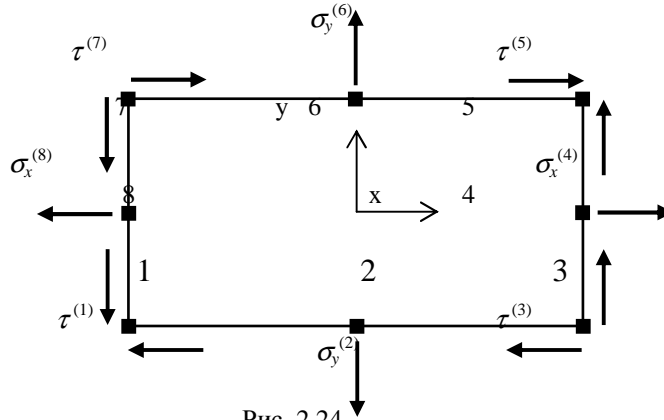


Рис. 2.24

Распределение напряжений здесь представлено следующими полиномами:

$$\sigma_x = \alpha_1 + \alpha_2 x; \quad \sigma_y = \alpha_3 + \alpha_4 y; \quad \tau = \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 x y. \quad (2.43)$$

Подставив данные аппроксимации в уравнения равновесия, получим

$$\alpha_2 + \alpha_7 + \alpha_8 x + \rho_x = 0; \quad \alpha_4 + \alpha_6 + \alpha_8 y + \rho_y = 0. \quad (2.44)$$

Очевидно, что при постоянных по элементу объемных силах  $\rho_x, \rho_y$  условиям (2.44) можно удовлетворить лишь в том случае, когда тождественно выполняется следующее условие:

$$\alpha_8 x = \alpha_8 y = 0. \quad (2.45)$$

Так как этого не обеспечивает точное интегрирование штрафного слагаемого функционала (2.42), для приведенного элемента предлагается искусственно понижать точность вычисления интегралов, что облегчает обращение в ноль выражения в интегральной части штрафного члена. Несмотря на то, что данный конечный элемент дает приемлемую точность и сходимость результатов решения задач в напряжениях, имеют место существенные недостатки. Во-первых, для вычисления коэффициентов *матрицы податливости*, относящихся к штрафному слагаемому, необходимо применять процедуру численного интегрирования. Во вторых, для основной части функционала (2.42) и его штрафного слагаемого используются разные, по крайней мере по точности, аппроксимации напряжений – соответственно более низкого порядка для штрафного слагаемого. Свободными от этих недостатков являются предлагаемая ниже модель разрывных аппроксимаций и конечный элемент плоской задачи теории упругости в напряжениях.

Рассмотрим приведенное выше условие (2.45). Для конечного элемента (рис. 2.24) и аппроксимации (2.43) точное выполнение его возможно лишь при использовании одноточечной схемы интегрирования штрафного слагаемого, т. е. при понижении порядка интегрирования. Однако если расположить узлы, соответствующие касательным напряжениям, на осях  $x, y$  (рис. 2.25, а), условие (2.45) сократится до равенства  $\alpha_8 x = \alpha_8 y$ .

Подставим это равенство в аппроксимацию (2.43), получим следующие варианты полиномов для  $\tau$ :

$$\tau = \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 x^2; \quad \tau = \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 y^2.$$

Для каждого полинома определим узловые функции формы и усредним их. Тогда вектору узловых напряжений

$$\sigma^e = \{ \tau^{(1)} \sigma_y^{(2)} \tau^{(3)} \sigma_x^{(4)} \tau^{(5)} \sigma_y^{(6)} \tau^{(7)} \sigma_x^{(8)} \}_T \quad (2.46)$$

будут отвечать следующие функции формы:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4} - \frac{y}{2b} - \frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{4b^2}; & N_2 &= \frac{1}{2} - \frac{y}{2b}; \\ N_3 &= \frac{1}{4} + \frac{x}{2a} + \frac{x^2}{4a^2} - \frac{y^2}{4b^2}; & N_4 &= \frac{1}{2} + \frac{x}{2a}; \\ N_5 &= \frac{1}{4} + \frac{y}{2b} - \frac{x^2}{4a^2} + \frac{y^2}{4b^2}; & N_6 &= \frac{1}{2} + \frac{y}{2b}; \\ N_7 &= \frac{1}{4} - \frac{x}{2a} + \frac{x^2}{4a^2} - \frac{y^2}{4b^2}; & N_8 &= \frac{1}{2} - \frac{x}{2a}. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Аппроксимацию касательных напряжений в пределах данного элемента, а именно функцию формы  $N_7(x,y)$ , иллюстрирует рис. 2.25, б.

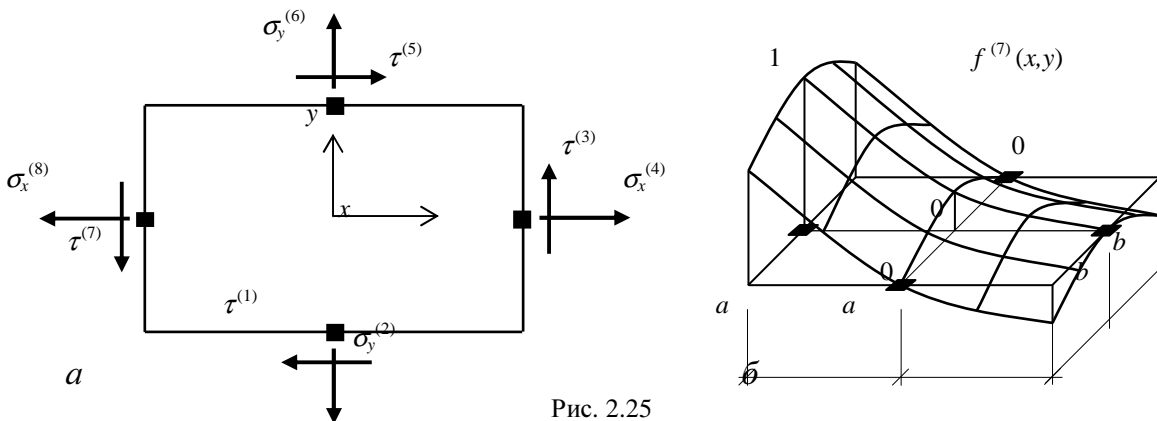


Рис. 2.25

Выразив напряжения через узловые значения (2.46) и функции формы (2.47) и подставив их в условие стационарности функционала (2.42), аналитически, т. е. точным интегрированием, получим матрицу податливости конечного элемента в виде

$$\mathbf{K}_{\text{nod}} = \kappa \begin{bmatrix} 113\mu & 0 & 37\mu & 0 & -7\mu & 0 & 37\mu & 0 \\ 0 & 240 & 0 & -180\nu & 0 & 120 & 0 & -180\nu \\ 37\mu & 0 & 113\mu & 0 & 37\mu & 0 & -7\mu & 0 \\ 0 & -180\nu & 0 & 240 & 0 & -180\nu & 0 & 120 \\ -7\mu & 0 & 37\mu & 0 & 113\mu & 0 & 37\mu & 0 \\ 0 & 120 & 0 & -180\nu & 0 & 240 & 0 & -180\nu \\ 37\mu & 0 & -7\mu & 0 & 37\mu & 0 & 113\mu & 0 \\ 0 & -180\nu & 0 & 120 & 0 & -180\nu & 0 & 240 \end{bmatrix} + \\
+ \infty \begin{bmatrix} 4m+n & 0 & -m-n & -1 & n-2m & 0 & -m-n & 1 \\ 0 & 3m & -1 & 0 & 0 & -3m & 1 & 0 \\ -m-n & -1 & m+4n & 0 & -m-n & 1 & m-2n & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3n & 1 & 0 & 0 & -3n \\ n-2m & 0 & -m-n & 1 & 4m+n & 0 & -m-n & -1 \\ 0 & -3m & 1 & 0 & 0 & 3m & -1 & 0 \\ -m-n & 1 & m-2n & 0 & -m-n & -1 & m+4n & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -3n & -1 & 0 & 0 & 3n \end{bmatrix}.$$

Здесь первая матрица-слагаемое соответствует основной части функционала (2.42), вторая – штрафной части этого функционала. Приняты следующие обозначения:  $\kappa = \frac{ab}{180E}$ ;  $\mu = 2(1-\nu)$ ;  $m = \frac{a}{3b}$ ;  $n = \frac{b}{3a}$ , где  $a, b$  – размеры конечного элемента. Параметр штрафа  $\infty$  имеет физический смысл коэффициента податливости как можно более слабого упругого основания. Значение его должно быть достаточно большим и ограничено сверху лишь точностью вычислений. Так, для практических расчетов можно принять  $\infty = 10^5 \kappa$ .

### Смешанный метод

Рассмотрим смешанную конечно-элементную модель, позволяющую эффективно решать задачи теории упругости непосредственно и в перемещениях, и в напряжениях. В основе ее также лежит аппроксимация разрывных полей напряжений и использование метода штрафа для удовлетворения уравнениям равновесия.

Вариационная формулировка смешанной задачи отвечает принципу стационарности различных форм функционала Рейсснера, куда непосредственно входят как компоненты перемещений, так и напряжений. Как уже указывалось, этот функционал не является выпуклым, поверхность его в точке стационарности имеет явно выраженный седлообразный характер. Данное обстоятельство значительно затрудняет использование его в методе конечных элементов (матрица коэффициентов в этом случае не является симметричной и положительно определенной).

Выпуклый смешанный функционал можно получить, если вычесть из первой формы функционала Рейсснера функционал Лагранжа:

$$\begin{aligned} \Pi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) = \Pi_{p1}(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) - \Pi_{\mathcal{L}}(\mathbf{u}) = & \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma})^T \mathbf{A} \mathbf{u} \, d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma})^T (\mathbf{E})^{-1} \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega - \\ & - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathbf{A} \mathbf{u})^T \mathbf{E} \mathbf{A} \mathbf{u} \, d\Omega - \int_{S_u} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_s)^T (\mathbf{L}_s)^T \boldsymbol{\sigma} \, dS \end{aligned} \quad (2.48)$$

при дополнительных условиях:  $(\mathbf{A})^T \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\rho} = 0 \in \Omega$ ,  $(\mathbf{L}_s)^T \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{g}_s \in S_g$ .

Платой за выпуклость функционала стало перемещение условий равновесия из естественных (для функционала Рейсснера) в дополнительные для функционала (2.48). Чтобы удовлетворить этим условиям, применим метод штрафа:

$$\begin{aligned} \Pi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}) = & \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma})^T \mathbf{A} \mathbf{u} \, d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma})^T (\mathbf{E})^{-1} \boldsymbol{\sigma} \, d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\mathbf{A} \mathbf{u})^T \mathbf{E} \mathbf{A} \mathbf{u} \, d\Omega + \\ & + \alpha \int_{\Omega} [(\mathbf{A})^T \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\rho}]^T [(\mathbf{A})^T \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\rho}] \, d\Omega - \int_{S_u} (\mathbf{u} - \mathbf{u}_s)^T (\mathbf{L}_s)^T \boldsymbol{\sigma} \, dS \end{aligned} \quad (2.49)$$

при дополнительном условии  $(\mathbf{L}_s)^T \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{g}_s \in S_g$ .

Нетрудно видеть, что функционал (2.49) эквивалентен вариационной постановке задачи в форме наименьших квадратов. Это обстоятельство обеспечивает условие выпуклости и делает функционал удобным для применения МКЭ. Задав аппроксимирующее выражение для перемещений  $\mathbf{u} = \mathbf{N}_q \mathbf{q}^e$  и соответственно для напряжений  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{N}_\sigma \boldsymbol{\sigma}^e$  и варьируя в дискретном виде функционал (2.49), получим следующее матричное уравнение равновесия для КЭ с симметричной, положительно определенной матрицей коэффициентов:

$$\begin{bmatrix} \int_{\Omega} (\mathbf{A} \mathbf{N}_q)^T \mathbf{E} \mathbf{A} \mathbf{N}_q \, d\Omega & - \int_{\Omega} (\mathbf{A} \mathbf{N}_q)^T \mathbf{N}_\sigma \, d\Omega \\ - \int_{\Omega} (\mathbf{N}_\sigma)^T \mathbf{A} \mathbf{N}_q \, d\Omega & \int_{\Omega} (\mathbf{N}_\sigma)^T \mathbf{E}^{-1} \mathbf{N}_\sigma \, d\Omega - \alpha \int_{\Omega} (\mathbf{A}^T \mathbf{N}_\sigma)^T \mathbf{A}^T \mathbf{N}_\sigma \, d\Omega \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \mathbf{q}^e \\ \boldsymbol{\sigma}^e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{P}}^e \\ \bar{\mathbf{q}}^e \end{Bmatrix},$$

где  $\mathbf{N}_q, \mathbf{N}_\sigma$  – матрицы функций формы для перемещений и для напряжений соответственно;  $\mathbf{q}^e, \boldsymbol{\sigma}^e$  – векторы узловых перемещений и напряжений в элементе;  $\bar{\mathbf{P}}^e, \bar{\mathbf{q}}^e$  – соответственно векторы узловых сил и смещений в элементе.

Аппроксимация перемещений в пределах конечного элемента может быть аналогичная той, которая используется в МКЭ в форме метода перемещений. Для напряжений же более целесообразно применение разрывных аппроксимаций, подобных рассмотренным выше, т. е. (2.47).

С целью иллюстрации рассмотренных подходов решалась задача определения НДС консольной пластины (см. рис. 2.22, а). Использовались разные сетки конечных элементов, так, например, на рис. 2.26, а приведена сетка 2×3 при расчете пластины методом сил, на рис. 2.26, б – смешанным методом.



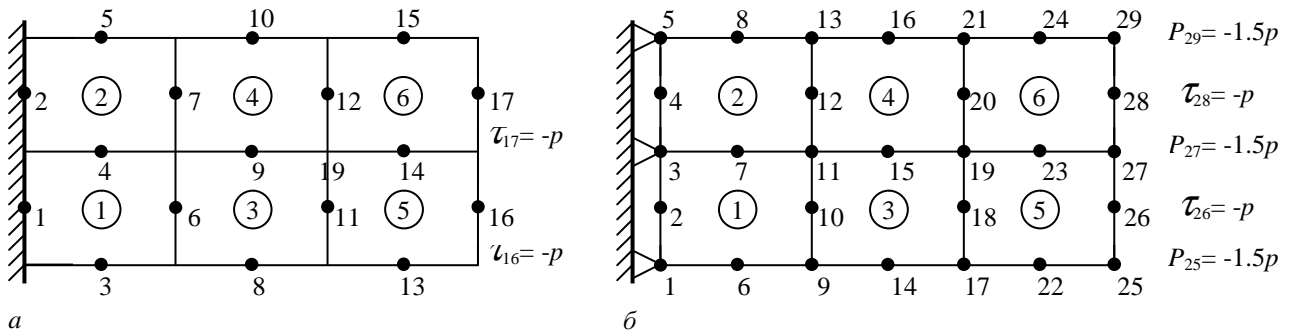


Рис. 2.26

В табл. 2.2 приведены результаты расчетов – значения вертикального перемещения  $v$  середины свободного края и напряжения  $\sigma_x$  в верхней точке закрепленного края пластины. Рис. 2.27 иллюстрирует сходимость решений, полученных с помощью различных форм МКЭ. Очевидно, что по точности определения напряжений методы сил и смешанный являются более эффективными в сравнении с традиционной схемой МКЭ в перемещениях.

Таблица 2.2

Сетка	Число элементов	Метод сил		Смешанный метод		
		Число степеней свободы	$\sigma_x \left( \frac{p}{h} \right)$	Число степеней свободы	$v \left( \frac{p}{Eh} \right)$	$\sigma_x \left( \frac{p}{h} \right)$
2 × 2	4	24	16.63	42	156.2	15.97
3 × 2	6	34	16.20	58	183.8	15.84
3 × 3	9	48	14.17	80	189.4	14.19
4 × 3	12	62	14.42	102	197.6	14.26
5 × 4	20	98	14.56	158	211.7	14.35
6 × 4	24	116	14.90	186	215.9	14.43
Точное решение			15.1		225.0	15.1

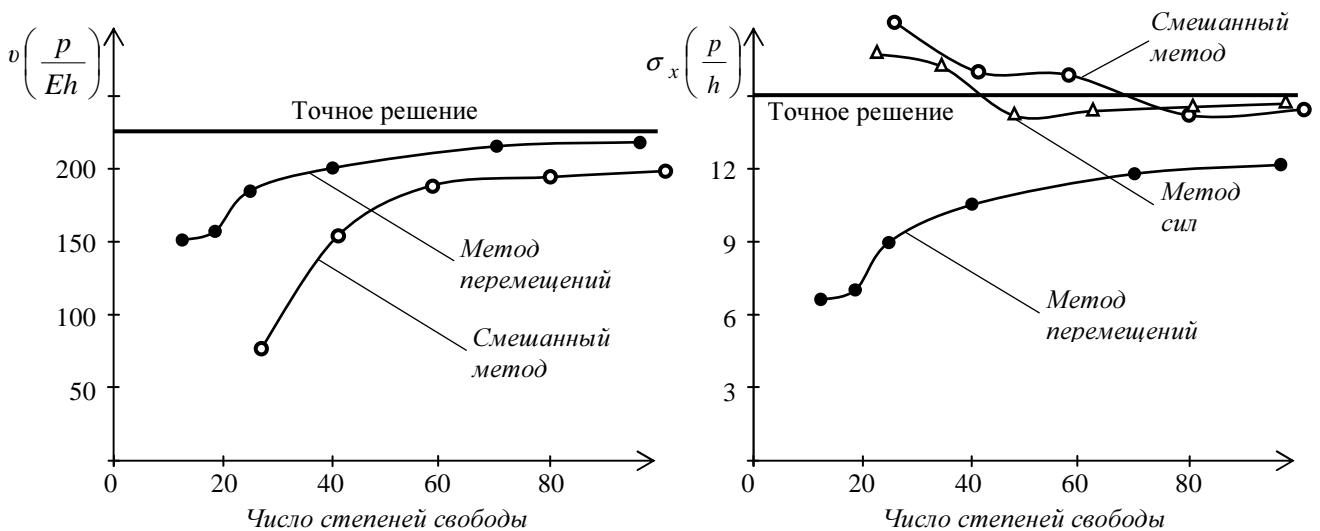


Рис. 2.27

## 2.3.5. Задачи изгиба плит и оболочек

### Изгиб тонких плит

Расчет НДС изгибаемых плит значительно сложнее, чем решение плоской задачи теории упругости. Рассмотрим здесь задачу расчета тонких жестких плит: толщина их не должна превышать  $\frac{1}{5}$  наименьшей стороны плиты, а прогиб при изгибе –  $\frac{1}{5}$  толщины  $h$  (рис. 2.28, а). На основе гипотез Кирхгофа-Лява о малости нормальных напряжений, перпендикулярных к срединной поверхности плиты, и прямых нормалей к той же поверхности построена *техническая теория изгиба тонких плит* [1]. Вытекающие из принятых гипотез допущения можно сформулировать следующим образом:

1. Нормальные напряжения  $\sigma_z$ , а также касательные напряжения  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$  пренебрежительно малы по сравнению с напряжениями, считающимися основными:  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  (рис. 2.28, б). Поэтому принимаем  $\sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ .

2. Перемещения в направлении оси  $z$  постоянны по толщине плиты и равны прогибам срединной поверхности, которая не испытывает деформаций в своей плоскости. Внешняя нагрузка при этом должна быть перпендикулярна к поверхности плиты, т. е. к координатной плоскости  $xy$ .

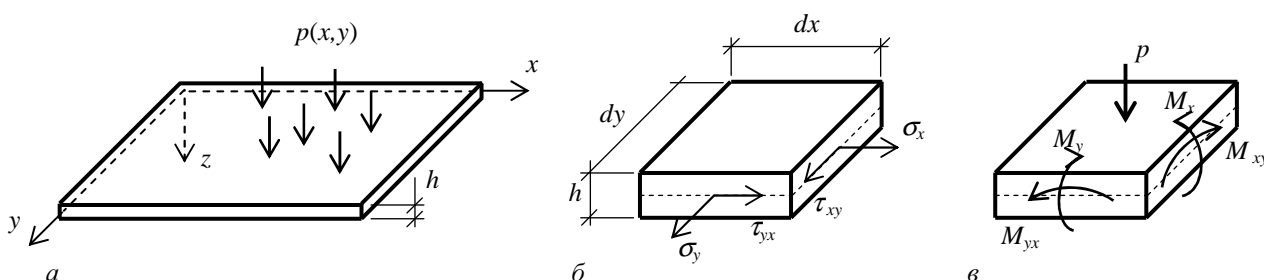


Рис. 2.28

Указанные допущения упрощают математическую модель изгиба плит, сводя ее к двумерной задаче. Все деформационные и статические величины являются функциями только одного неизвестного, а именно перемещения  $w$  в направлении нормали к срединной поверхности плиты.

Однако в отличие от плоской задачи, как классической двумерной, прогибы плиты описываются дифференциальным уравнением четвертого (1.1), а не второго порядка, деформации являются производными от перемещений второго, а не первого порядка. Таким образом, в выражении функционала потенциальной энергии появляются также производные второго порядка. При использовании МКЭ это приводит к некоторым трудностям, связанным с аппроксимацией функции прогиба  $w(x,y)$ .

Во-первых, аппроксимирующие полиномы, применяемые при изгибе плит, намного сложнее, чем для плоской задачи теории упругости, к тому же их вид не является единственным для конкретного конечного элемента.

Так, например, полином 4-й степени с 12 неопределенными коэффициентами может содержать различные члены (см. рис. 2.5, а), что в свою очередь приводит к получению разных матриц жесткости для элементов.

Во-вторых, требуется выполнение условий совместности между смежными элементами не только для функции прогиба, но и для ее первых производных. Тем не менее, на практике часто применяются именно несовместные КЭ, в которых непрерывность на границах между элементами выполняется только для прогибов. Таким элементом, например, является четырехузловой прямоугольный КЭ с 12 степенями свободы, обеспечивающий приемлемую точность решения и применяемый для расчета плит, имеющих прямоугольное очертание.

Следует отметить, что наряду с методом перемещений, как основной формой МКЭ, при решении задач изгиба плит методы сил и смешанный используются в значительно большей мере, чем при решении задач теории упругости.

Принимая во внимание, что основные уравнения технической теории изгиба плит даны в курсе теории упругости [1], приведем здесь только вариационную постановку этой задачи. Так, вывод конечно-элементных соотношений метода перемещений основывается на использовании функционала Лагранжа, являющегося выражением полной потенциальной энергии изгибаемой плиты:

$$P_n(w) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (Aw)^T E Aw d\Omega - \int_{\Omega} p w d\Omega. \quad (2.50)$$

Здесь  $A$  – оператор дифференцирования;  $E$  – матрица упругости.

$$A = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}; \quad E = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix},$$

где  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  – цилиндрическая жесткость изгибаемой изотропной плиты.

Погонные изгибающие и крутящий моменты в плите (рис. 2.28, в), представляющие собой интегральную характеристику основных напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ , определяются по формуле

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = D \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = E Aw. \quad (2.51)$$

Компоненты основных напряжений в элементе плиты (рис. 2.28, б) соответственно равны

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{12z}{h^3} \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{12z}{h^3} \mathbf{E} \mathbf{A} w. \quad (2.52)$$

Изложим процедуру формирования матрицы жесткости на примере прямоугольного *несовместного* элемента (рис. 2.29). В каждом узле за основные неизвестные принимаются следующие три обобщенных перемещения: прогиб  $w$  и углы поворота  $\varphi_x = \frac{\partial w}{\partial y}$ ,  $\varphi_y = -\frac{\partial w}{\partial x}$  относительно координатных осей  $x$  и  $y$ .

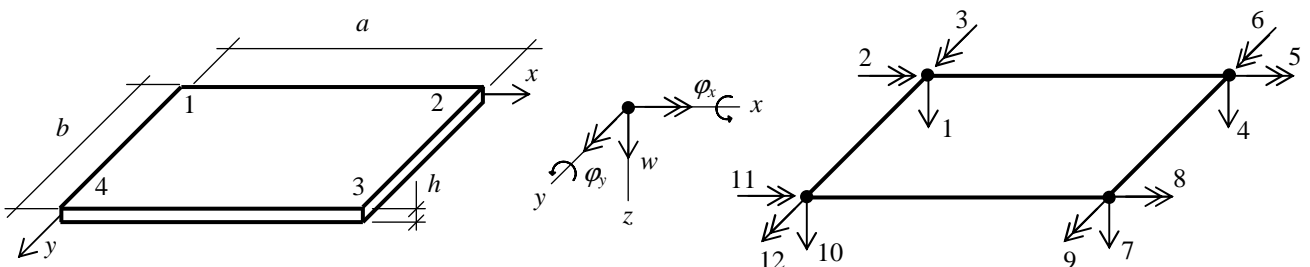


Рис. 2.29

Как и в случае плоской задачи (см. 2.3.2), для получения матрицы жесткости необходимо построить функции формы КЭ. Так как элемент имеет 12 степеней свободы, следует использовать полином с 12 независимыми коэффициентами. Полный полином третьего порядка содержит 10 членов. Из треугольника Паскаля (см. рис. 2.5, а) видно, что существует несколько вариантов выбора оставшихся двух членов. Обычно добавляются  $x^3y$  и  $xy^3$ , поскольку они обеспечивают симметрию аппроксимирующих выражений для  $w$ ,  $\varphi_x$  и  $\varphi_y$ :

$$w(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3;$$

$$\varphi_x = \frac{\partial w}{\partial y} = \alpha_3 + \alpha_5 y + 2\alpha_6 y + \alpha_8 x^2 + 2\alpha_9 xy + 3\alpha_{10} y^2 + \alpha_{11} x^3 + 3\alpha_{12} xy^2;$$

$$\varphi_y = -\frac{\partial w}{\partial x} = -(\alpha_2 + 2\alpha_4 x + \alpha_5 y + 3\alpha_7 x^2 + 2\alpha_8 xy + \alpha_9 y^2 + 3\alpha_{11} x^2 y + \alpha_{12} y^3),$$

или в матричной форме:

$$\begin{Bmatrix} w \\ \varphi_x \\ \varphi_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2 y & xy^2 & y^3 & x^3 y & xy^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y & 0 & x^2 & 2xy & 3y^2 & x^3 & 3xy^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x & -y & 0 & -3x^2 & -2xy & -y^2 & 0 & -3x^2 y & y^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_{12} \end{Bmatrix}. \quad (2.53)$$

Как показано в [27], данная аппроксимация не обеспечивает полностью условия непрерывности для углов поворота на границах смежных элементов.

Так, на границах вдоль  $Ox$  обеспечена совместность только для  $w$  и  $\varphi_y$ , но без совместности для  $\varphi_x$ , а вдоль  $Oy$ , наоборот, нет непрерывности по  $\varphi_y$ .

Используя приведенный ранее способ (см. 2.1.2, 2.3.2), сформируем систему алгебраических уравнений относительно постоянных коэффициентов  $\alpha_i$ . Координаты узлов прямоугольного элемента:

$$x_1 = 0, y_1 = 0, x_2 = a, y_2 = 0, x_3 = a, y_3 = b, x_4 = 0, y_4 = b.$$

Поочередно подставив эти координаты в выражение (2.53), получим систему алгебраических уравнений 12-го порядка (в матричном виде аналогично системе (2.5))

$$\mathbf{q}^e = \mathbf{C} \boldsymbol{\alpha}. \quad (2.54)$$

Вектор обобщенных узловых перемещений для прямоугольного элемента плиты имеет вид

$$\mathbf{q}^e = \left\{ w_1 \ \varphi_{x1} \ \varphi_{y1} \ w_2 \ \varphi_{x2} \ \varphi_{y2} \ w_3 \ \varphi_{x3} \ \varphi_{y3} \ w_4 \ \varphi_{x4} \ \varphi_{y4} \right\}^T.$$

Решив систему (2.54) относительно неизвестных  $\alpha_i$  и подставив решение в первое уравнение (2.53), получим

$$w(x, y) = \left[ 1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2 \ x^3 \ x^2y \ xy^2 \ y^3 \ x^3y \ xy^3 \right] \mathbf{C}^{-1} \mathbf{q}^e = \boldsymbol{\psi} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{q}^e, \quad (2.55)$$

где

$$\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{a^2} & 0 & \frac{2}{a} & \frac{3}{a^2} & 0 & \frac{1}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{ab} & -\frac{1}{a} & \frac{1}{b} & \frac{1}{ab} & \frac{1}{a} & 0 & -\frac{1}{ab} & 0 & 0 & \frac{1}{ab} & 0 & -\frac{1}{b} \\ -\frac{1}{b^2} & -\frac{2}{b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{b^2} & -\frac{1}{b} & 0 \\ \frac{2}{a^3} & 0 & -\frac{1}{a^2} & -\frac{2}{a^3} & 0 & -\frac{1}{a^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{3}{a^2b} & 0 & -\frac{2}{ab} & -\frac{3}{a^2b} & 0 & -\frac{1}{ab} & \frac{3}{a^2b} & 0 & \frac{1}{ab} & -\frac{3}{a^2b} & 0 & \frac{2}{ab} \\ \frac{3}{ab^2} & \frac{2}{ab} & 0 & -\frac{3}{ab^2} & -\frac{2}{ab} & 0 & \frac{3}{ab^2} & -\frac{1}{ab} & 0 & -\frac{3}{ab^2} & \frac{1}{ab} & 0 \\ \frac{2}{b^3} & \frac{1}{b^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{b^3} & \frac{1}{b^2} & 0 \\ -\frac{2}{a^3b} & 0 & \frac{1}{a^2b} & \frac{2}{a^3b} & 0 & \frac{1}{a^2b} & -\frac{2}{a^3b} & 0 & -\frac{1}{a^2b} & \frac{2}{a^3b} & 0 & -\frac{1}{a^2b} \\ -\frac{2}{ab^3} & -\frac{1}{ab^2} & 0 & \frac{2}{ab^3} & \frac{1}{ab^2} & 0 & -\frac{2}{ab^3} & \frac{1}{ab^2} & 0 & \frac{2}{ab^3} & -\frac{1}{ab^2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Перемножив матрицы  $\psi$  и  $C^{-1}$ , запишем аппроксимирующее выражение (2.55) через функции формы конечного элемента:

$$w(x, y) = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4 \ N_5 \ N_6 \ N_7 \ N_8 \ N_9 \ N_{10} \ N_{11} \ N_{12}] \begin{Bmatrix} w_1 \\ \varphi_{x1} \\ \varphi_{y1} \\ \dots \\ \varphi_{y4} \end{Bmatrix} = Nq^e. \quad (2.56)$$

Каждая из 12 функций формы является функцией координат  $x$  и  $y$  в пределах прямоугольного элемента, например:

$$N_1 = 1 - \frac{3x^2}{a^2} - \frac{xy}{ab} - \frac{3y^2}{b^2} + \frac{2x^3}{a^3} + \frac{3x^2y}{a^2b} + \frac{3xy^2}{ab^2} + \frac{2y^3}{b^3} - \frac{2x^3y}{a^3b} - \frac{2xy^3}{ab^3}.$$

Остальные функции формы нетрудно получить, перемножая матрицу-строку  $\psi$  на соответствующие столбцы матрицы  $C^{-1}$ .

Подставив аппроксимацию (2.56) в условие стационарности функционала (2.50), получим следующие выражения для вычисления МЖ и ВН конечного элемента плиты:

$$K^e = \int_{\Omega^e} (AN)^T E (AN) d\Omega; \quad P^e = \int_{\Omega^e} p(x, y) N^T d\Omega.$$

В конечном счете матрица жесткости КЭ будет иметь вид

$$K^e = \kappa \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} & k_{17} & k_{18} & k_{19} & k_{110} & k_{111} & k_{112} \\ & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} & k_{27} & k_{28} & k_{29} & k_{210} & k_{211} & k_{212} \\ & & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} & k_{37} & k_{38} & k_{39} & k_{310} & k_{311} & k_{312} \\ & & & k_{44} & k_{45} & k_{46} & k_{47} & k_{48} & k_{49} & k_{410} & k_{411} & k_{412} \\ & & & & k_{55} & k_{56} & k_{57} & k_{58} & k_{59} & k_{510} & k_{511} & k_{512} \\ & & & & & k_{66} & k_{67} & k_{68} & k_{69} & k_{610} & k_{611} & k_{612} \\ & & & & & & k_{77} & k_{78} & k_{79} & k_{710} & k_{711} & k_{712} \\ & & & & & & & k_{88} & k_{89} & k_{810} & k_{811} & k_{812} \\ & & & & & & & & k_{99} & k_{910} & k_{911} & k_{912} \\ & & & & & & & & & k_{1010} & k_{1011} & k_{1012} \\ & & & & & & & & & & k_{1111} & k_{1112} \\ & & & & & & & & & & & k_{1212} \end{bmatrix}, \quad (2.57)$$

*симметрично*

$$\text{где } \kappa = \frac{D}{15ab}; \quad c = \frac{a}{b}; \quad d = \frac{b}{a}; \quad \mu = \frac{(1-\nu)}{2};$$

$$\begin{aligned} k_{11} = k_{44} = k_{77} = k_{1010} &= 60(c^2 + d^2) + 30\nu + 84\mu; & k_{22} = k_{55} = k_{88} = k_{1111} &= 20a^2 + 8b^2\mu; \\ k_{12} = k_{45} = -k_{78} = -k_{1011} &= 30ac + 15b\nu + 6b\mu; & -k_{23} = k_{56} = -k_{89} = k_{1112} &= 15ab\nu; \\ -k_{13} = k_{46} = k_{79} = -k_{1012} &= 30bd + 15a\nu + 6a\mu; & k_{25} = k_{811} &= 10a^2 - 8b^2\mu; \\ k_{14} = k_{710} &= 30(c - 2d) - 30\nu - 84\mu; & k_{33} = k_{66} = k_{99} = k_{1212} &= 20b^2 + 8a^2\mu; \\ -k_{15} = -k_{24} = k_{711} = k_{810} &= -15ac + 15b\nu + 6b\mu; & k_{36} = k_{912} &= 10b^2 - 2a^2\mu; \\ -k_{16} = k_{34} = k_{712} = -k_{910} &= 30bd + 6a\mu; & k_{28} = k_{511} &= 5a^2 + 2b^2\mu; \\ k_{17} = k_{410} &= -30(c^2 + d^2) + 30\nu + 84\mu; & k_{39} = k_{612} &= 5b^2 + 2a^2\mu; \\ k_{18} = -k_{27} = k_{411} = -k_{510} &= 15ac - 6b\mu; & k_{211} = k_{58} &= 10a^2 - 2b^2\mu; \\ -k_{19} = k_{37} = -k_{610} = k_{412} &= 15bd - 6a\mu; & k_{312} = k_{69} &= 10b^2 - 8a^2\mu; \\ k_{110} = k_{47} &= 30(-2c^2 + d^2) - 30\nu - 84\mu; & k_{26} = k_{29} = k_{212} = k_{35} &= 0; \\ -k_{111} = -k_{48} = k_{57} = k_{210} &= -30ac - 6b\mu; & k_{38} = k_{311} = k_{59} = k_{512} &= 0; \\ -k_{112} = -k_{310} = k_{49} = k_{67} &= 15bd - 15a\nu - 6a\mu; & k_{68} = k_{611} = k_{812} = k_{911} &= 0. \end{aligned}$$

При нагружении КЭ плиты равномерно распределенной поверхностной нагрузкой  $p(x,y) = p$  будем иметь

$$\mathbf{P}^e = \frac{pab}{24} [6 \quad b \quad -a \quad 6 \quad b \quad a \quad 6 \quad -b \quad a \quad 6 \quad -b \quad -a]. \quad (2.58)$$

Подставив (2.56) в (2.51) и (2.52), запишем внутренние усилия и напряжения в плите через узловые перемещения:

$$\mathbf{M}^e = \mathbf{E} \mathbf{A} \mathbf{N} \mathbf{q}^e; \quad \boldsymbol{\sigma}^e = \frac{12z}{h^3} \mathbf{E} \mathbf{A} \mathbf{N} \mathbf{q}^e. \quad (2.59)$$

После подстановки в (2.59) координат узлов элемента получим следующие матричные уравнения:

$$\mathbf{M}^e = \mathbf{G} \mathbf{q}^e; \quad \boldsymbol{\sigma}^e = \frac{12z}{h^3} \mathbf{G} \mathbf{q}^e. \quad (2.60)$$

Здесь  $\mathbf{M}^e$  – вектор узловых значений внутренних усилий;  $\boldsymbol{\sigma}^e$  – вектор узловых значений напряжений;  $\mathbf{G}$  – матрица усилий:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}^e &= \{M_{x1} \quad M_{y1} \quad M_{xy1} \quad M_{x2} \quad M_{y2} \quad M_{xy2} \quad M_{x3} \quad M_{y3} \quad M_{xy3} \quad M_{x4} \quad M_{y4} \quad M_{xy4}\}^T; \\ \boldsymbol{\sigma}^e &= \{\sigma_{x1} \quad \sigma_{y1} \quad \tau_{xy1} \quad \sigma_{x2} \quad \sigma_{y2} \quad \tau_{xy2} \quad \sigma_{x3} \quad \sigma_{y3} \quad \tau_{xy3} \quad \sigma_{x4} \quad \sigma_{y4} \quad \tau_{xy4}\}^T; \end{aligned}$$

$$G = \frac{D}{ab} \begin{bmatrix} s & 4av & -4b & -6d & 0 & 2b & 0 & 0 & 0 & -6cv & 2av & 0 \\ t & 4a & -4bv & -6dv & 0 & 2bv & 0 & 0 & 0 & 6c & 2a & 0 \\ 2\mu & 2b\mu & -2a\mu & -2\mu & -2b\mu & 0 & 2\mu & 0 & 0 & -2\mu & 0 & 2a\mu \\ \hline -6d & 0 & 2b & s & 4av & 4b & -6cv & 2av & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6dv & 0 & 2bv & t & 4a & 4b & -6cv & 2av & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2\mu & 2b\mu & 0 & -2\mu & -2b\mu & -2a\mu & 2\mu & 0 & 2a\mu & -2\mu & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -6cv & -2av & 0 & s & -4av & 4b & -6d & 0 & 2b \\ 0 & 0 & 0 & -6c & -2a & 0 & t & -4a & 4bv & -6dv & 0 & 2bv \\ 0 & 0 & 0 & -2\mu & 0 & -2a\mu & 2\mu & -2b\mu & 2a\mu & -2\mu & 2b\mu & 0 \\ \hline -6cv & -2av & 0 & 0 & 0 & 0 & -6c & 0 & -2b & s & -4av & -4b \\ -6c & -2a & 0 & 0 & 0 & 0 & -6cv & 0 & -2bv & t & -4a & -4bv \\ 2\mu & 0 & -2a\mu & -2\mu & 0 & 0 & 2\mu & -2b\mu & 0 & -2\mu & 2b\mu & 2a\mu \end{bmatrix},$$

где  $s = 6(cv + d)$ ,  $t = 6(c + dv)$ .

### Пример расчета плиты

В качестве примера рассмотрим задачу расчета квадратной изотропной плиты, защемленной по всем четырем сторонам и нагруженной по всей поверхности равномерно распределенной нагрузкой  $p$ . С учетом двусонной симметрии достаточно рассчитать только одну четвертую часть плиты.

Если плита разбита на четыре элемента, то рассчитываемая область будет содержать всего один конечный элемент (рис. 2.30, *a*). Из условий симметрии и граничных условий на защемленном контуре имеем

$$\varphi_{x1} = \varphi_{y1} = w_2 = \varphi_{x2} = \varphi_{y2} = w_3 = \varphi_{x3} = \varphi_{y3} = w_4 = \varphi_{x4} = \varphi_{y4} = 0.$$

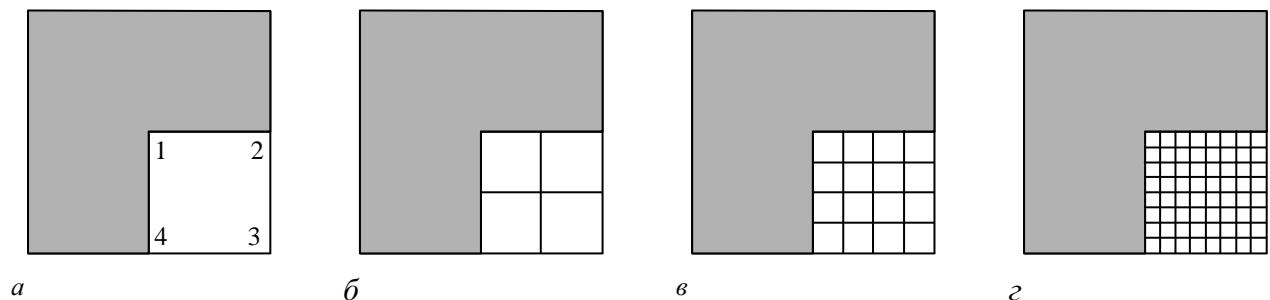


Рис. 2.30

Таким образом, решение задачи сводится к решению только одного уравнения

$$k_{11} w_1 = P_1.$$



Согласно выражениям (2.57) и (2.58) при  $\nu = 0.3$  определим

$$k_{11} = \frac{D}{15ab} [60(c^2 + d^2) + 30\nu + 84\mu] = \frac{4D}{15l^2} \left[ 60(1+1) + 30 \cdot 0.3 + 84 \frac{(1-0.3)}{2} \right] = 42.24 \frac{D}{l^2};$$

$$P_1 = \frac{pab}{24} 6 = \frac{pl^2}{16}.$$

В результате получим

$$w_1 = \frac{P_1}{k_{11}} = \frac{pl^2}{16} \frac{l^2}{42.24 D l^2} = 0.00148 \frac{pl^4}{D} \quad (\text{точное решение } w_1 = 0.00126 \frac{pl^4}{D}).$$

Используя (2.60), вычислим значения изгибающих моментов в точке 1:

$$M_{x1} = \frac{D}{ab} [s] w_1 = \frac{4D}{l^2} [6(1 \cdot 0.3 + 1)] 0.00148 \frac{pl^4}{D} = 0.0462 pl^2;$$

$$M_{y1} = \frac{D}{ab} [t] w_1 = \frac{4D}{l^2} [6(1 + 1 \cdot 0.3)] 0.00148 \frac{pl^4}{D} = 0.0462 pl^2,$$

(точное решение  $M_{x1} = M_{y1} = 0.0231 pl^2$ ).

Значения изгибающих моментов в точках 2 и 4:

$$M_{x2} = \frac{D}{ab} [-6d] w_1 = \frac{4D}{l^2} [-6 \cdot 1] 0.00148 \frac{pl^4}{D} = -0.0355 pl^2;$$

$$M_{y4} = \frac{D}{ab} [-6c] w_1 = \frac{4D}{l^2} [-6 \cdot 1] 0.00148 \frac{pl^4}{D} = -0.0355 pl^2,$$

(точное решение  $M_{x2} = M_{y4} = -0.0513 pl^2$ ).

Рассматриваемая плита была рассчитана для четырех разных сеток конечных элементов (рис. 2.30, а, б, в, г) как на распределенную нагрузку, так и на сосредоточенную силу, приложенную в центре. Результаты расчета для прогиба  $w$  в центре плиты приведены в табл. 2.3, а распределение изгибающих моментов  $M_x$  вдоль оси симметрии плиты (для случая равномерно распределенной нагрузки) показано на рис. 2.31.

Таблица 2.3

Сетка	Число элементов	Число узлов	Распр. нагрузка $p$	Сосред. сила $P$
			$w (pl^4/D)$	$w (Pl^2/D)$
2 × 2	4	9	0.001 48	0.005 92
4 × 4	16	25	0.001 40	0.006 13
8 × 8	64	81	0.001 30	0.005 80
16 × 16	256	289	0.001 27	0.005 67
Аналитическое решение			0.001 26	0.005 60

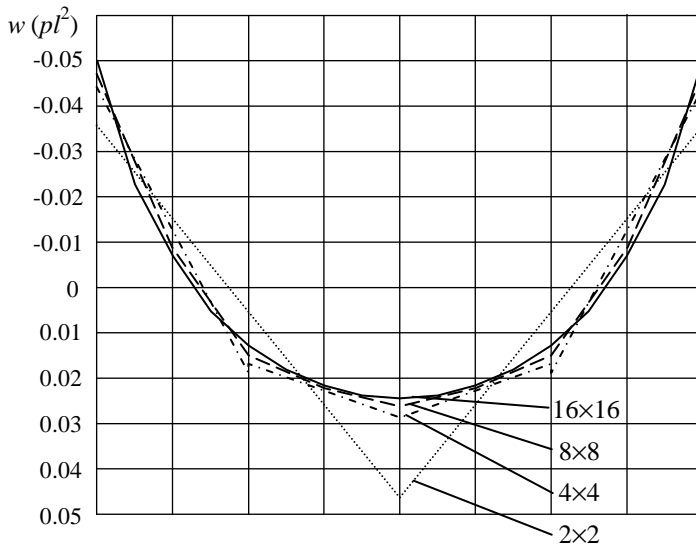


Рис. 2.31

По приведенным результатам видно, что точность и сходимость получаемого по МКЭ решения немного лучше при равномерно распределенной, чем при сосредоточенной нагрузке. В то же время точность определения изгибающих моментов значительно ниже, чем основных неизвестных – перемещений.

Тем не менее, следует отметить, что рассмотренный несовместный элемент дает неплохую сходимость к точному решению и ввиду своей относительной простоты имеет большое практическое применение.

Для построения *совместного* прямоугольного элемента необходимо ввести еще одну основную неизвестную в каждом узле:  $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ , а для аппроксимации перемещения  $w(x, y)$  в конечном элементе использовать полином с 16 независимыми коэффициентами, т. е.

$$w(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3 + \alpha_{13} x^3 y^2 + \alpha_{14} x^2 y^3 + \alpha_{15} x^2 y^2 + \alpha_{16} x^3 y^3.$$

Исходя из этого, МЖ и ВН совместного элемента могут быть получены тем же способом, что и для элемента с 12 степенями свободы [14, 27].

При расчете плит произвольной конфигурации, в том числе с отверстиями, выемками, скошенными краями и т. п., недостаточно применения только прямоугольных КЭ. В этих случаях возникает необходимость в треугольных элементах, которые, как и прямоугольные, могут быть несовместными и совместными. Так, простейшим несовместным элементом является треугольник с тремя степенями свободы в каждом из трех узлов, находящихся в вершинах:  $w$ ,  $\varphi_x$ ,  $\varphi_y$ . Совместный трехузловой элемент должен иметь уже по 6 степеней в каждом узле:  $w$ ,  $\varphi_x$ ,  $\varphi_y$ ,  $\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ ,  $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ ,  $\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$ . Существуют и другие элементы треугольной формы, отличающиеся числом узлов, числом степеней свободы в каждом узле, видом аппроксимирующего полинома, причем не только в формулировке метода перемещений, но и метода сил (где основными неизвестными будут моменты  $M_x$ ,  $M_y$ ,  $M_{xy}$ ), а также смешанного метода [9, 10, 13, 14, 19, 27].

Однако следует иметь в виду, что использовать одни только треугольные элементы для расчета изгибаемых плит нецелесообразно. В общем случае вывод МЖ для треугольного элемента является очень громоздким, поэтому в явном виде данная матрица практически не приводится. А главное – разбивка области только на треугольные элементы дает менее точные результаты, чем расчет с использованием прямоугольных элементов при одинаковом числе степеней свободы.

В связи с этим для изгибаемых плит, имеющих произвольный контур, рекомендуется по возможности применять ортогональную сетку конечных элементов. При такой сетке все элементы во внутренней области будут прямоугольными, а элементы, примыкающие к контуру – треугольными. Также могут быть использованы и четырехугольные элементы, получаемые, как правило, комбинацией треугольных элементов.

Рассмотренная здесь задача расчета тонких плит на основе технической теории Кирхгофа наиболее часто применяется в практике инженерных расчетов. Однако имеют место и другие задачи, и соответствующие им модели изгиба плит. Например, если плита является многослойной или имеет значительную толщину, то деформациями сдвига пренебрегать нельзя. В этом случае используются более строгие математические модели, как, например, *теория плит Рейсснера*. В основе этой теории лежит предположение о том, что прямолинейный элемент, перпендикулярный к срединной поверхности плиты до деформации, остается и после деформации прямолинейным и неизменной длины ( $\varepsilon_z = 0$ ), но не обязательно перпендикулярным к деформированной срединной поверхности. В качестве основных неизвестных при использовании модели Рейсснера выступают как перемещения, так и внутренние усилия.

Широкое распространение в МКЭ получила *модель Миндлина*, основанная почти на тех же предположениях, что и модель Рейсснера (различие между ними в том, что у Рейсснера  $\varepsilon_z = 0$ , у Миндлина  $\sigma_z = 0$ ). Кроме того, вариационная формулировка модели Миндлина базируется на функционале потенциальной энергии плиты, а Рейсснера – на смешанном его виде [21, 27].

Помимо вышеперечисленных элементами строительных конструкций могут быть плиты на упругом основании, с заполнителем, с ребрами жесткости и т. д. Особенности их расчета приводятся соответственно в [13, 30 и 31].

### **Общие сведения о расчете оболочек**

В отличие от плит оболочки представляют собой более сложные объекты строительной механики, хотя общая теория изгибаемых плит, как и теория оболочек, основаны на одних и тех же гипотезах. Однако, во-первых, при расчете оболочек необходимо учитывать кривизну срединной поверхности, во-вторых, деформации изгиба и деформации в срединной поверхности оболочки в общем случае являются взаимосвязанными (в линейной теории плит эти деформации независимы). С учетом этого полное обеспечение условий равновесия и совместности становится очень сложным, поэтому в основном эти условия выполняются приближенно с помощью различных способов.

Применение МКЭ к расчету оболочек в большинстве случаев основывается на *технической теории тонких пологих оболочек*, основные положения которой приведены в [1, 9, 27]. Построение же наиболее распространенных конечных элементов для расчета оболочек рассматривается в [9, 10, 14, 19, 22, 27].

В задачу данного учебного пособия не входит вывод конечно-элементных соотношений для задач теории оболочек, тем более что получение матриц жесткости для оболочечных элементов является довольно трудоемким процессом и в явном виде, как правило, эти матрицы не приводятся. Приведем здесь лишь краткий обзор используемых при расчете оболочек конечных элементов.

По способу представления геометрии срединной поверхности оболочки все конечные элементы можно разделить на три основные группы: плоские, криволинейные и вырожденные трехмерные.

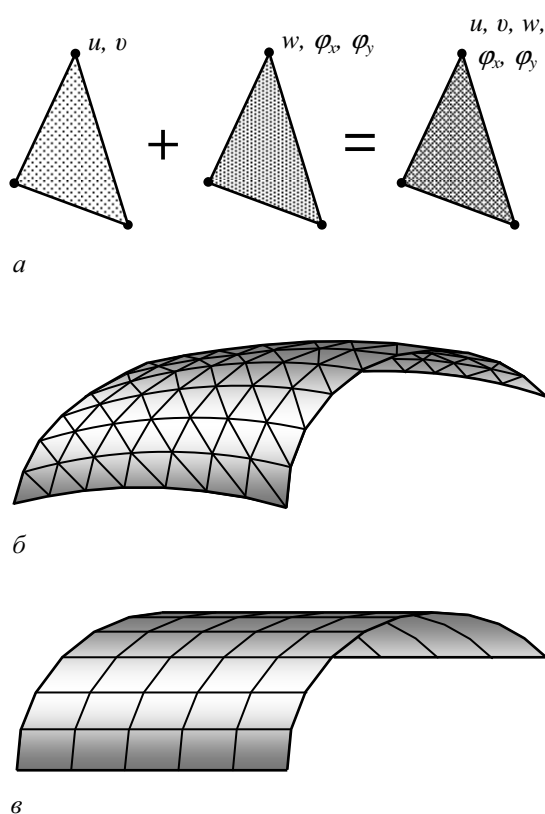


Рис. 2.32

*Плоские элементы* представляют собой простейший, но вместе с тем и самый грубый вид аппроксимации оболочки по МКЭ [9, 10, 19]. Построение этих элементов основано на простой суперпозиции плоского напряженного состояния и задачи изгиба плиты (рис. 2.32, а). Обычно используются плоские конечные элементы треугольного или прямоугольного вида. Для оболочек произвольной формы больше подходят треугольные элементы, поскольку они лучше аппроксимируют кривую поверхность (рис. 2.32, б), для цилиндрических оболочек могут применяться прямоугольные элементы (рис. 2.32, в). Положительное качество плоских элементов заключается в их простоте, а отрицательное – в недостаточной аппроксимации криволинейной поверхности оболочки системой плоских элементов. Поэтому для достижения удовлетворительных результатов следует применять достаточно густую сетку.

*Криволинейные элементы* строятся на основе технической теории тонких оболочек. Основные трудности здесь связаны с выбором аппроксимирующих функций, которые должны обеспечивать выполнение условий *полноты* (описание смещения элемента как жесткого целого и обеспечения состояния постоянных деформаций в элементе) и *совместности* (непрерывности основных неизвестных на смежных границах соседних элементов, см. 2.1.2).

Так как при построении *общего криволинейного элемента* для произвольной срединной поверхности оболочки эти условия крайне трудно обеспечить, вводятся отдельные группы элементов для определенных форм оболочек. Например, на основе *теории цилиндрических оболочек* могут быть построены КЭ цилиндрической формы (рис. 2.33, а), на основе *теории пологих оболочек* – пологой формы (рис. 2.33, б) и т. д.

*Вырожденные трехмерные элементы* получают как особый вид пространственных изопараметрических элементов (рис. 2.34). При этом учитывается как малость толщины оболочки по отношению к остальным двум размерам, так и введенные предположения о характере изменения деформаций и напряжений по толщине оболочки. В основе построения таких элементов лежат обычные гипотезы классической теории оболочек, однако предположение о перпендикулярности нормали к деформированной срединной поверхности не используется, что дает возможность учитывать деформации сдвига [29].

Для описания геометрии элемента принимают систему криволинейных координат  $\xi, \eta$ , лежащих в срединной поверхности, и координату  $\zeta$  в направлении нормали к срединной поверхности оболочки (рис. 2.34). В пределах КЭ данные координаты изменяются линейно в границах от  $-1$  до  $+1$ . Выбор интерполирующих функций и узловых точек в элементе зависит от решаемой задачи (обычно это изопараметрические полиномы второго или третьего порядка). Область применения вырожденных трехмерных элементов – расчет толстых и многослойных оболочек.

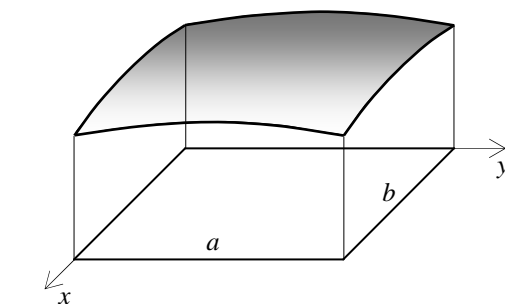
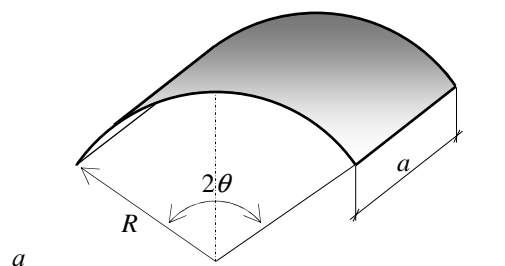


Рис. 2.33

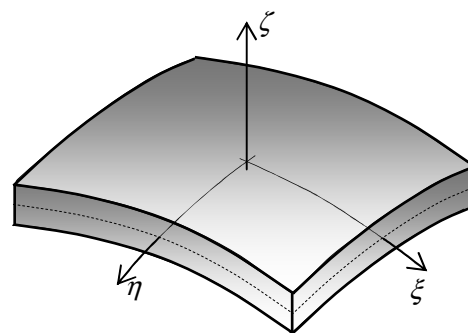


Рис. 2.34

### 3. РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ И НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ

#### 3.1. Физически и геометрически нелинейные задачи

##### 3.1.1. Общие представления о нелинейных задачах

В предыдущем разделе рассматривалось решение линейных задач – то есть таких, в которых связь между силами, действующими на конструкцию, и перемещениями ее точек принимается линейной, а в основе физических уравнений, как правило, лежит обобщенный закон Гука. В действительности это часто не соответствует действительности. Например, бетон, дерево, пластик и некоторые другие строительные материалы характеризуются нелинейной зависимостью напряжений от деформаций даже при небольших нагрузках. Такая нелинейность называется *физической*. Проявляется она при возникновении *пластических деформаций* в различных формах (*текучности* – деформировании при постоянных напряжениях, *ползучести* – росте деформаций во времени без увеличения нагрузки), при криволинейной диаграмме "напряжения-деформации", при изменении свойств материалов от внешних воздействий и т. д.

При значительных перемещениях, соизмеримых с размерами конструкции, необходимо учитывать *геометрическую* нелинейность, например, в случае продольного и продольно-поперечного изгиба стержней, изменении координат точек конструкции из-за сравнительно больших перемещений.

Особое место занимает *конструктивная* нелинейность, связанная с изменением расчетной схемы конструкции в процессе нагружения (учет односторонних связей): при контактном взаимодействии деформируемых тел (одностороннее основание, трещины), при расчете конструкций типа вант, с затяжками и т. п.

Расчет нелинейных систем является более сложной задачей по сравнению с решением линейных задач, т. к. здесь приходится учитывать деформированное состояние рассматриваемой области, отказаться от принципа независимости действия сил, применять специальные методы поиска и анализа решения. При этих условиях получить аналитическое решение задачи, как правило, не удастся, поэтому расчет выполняется с помощью численных методов, чаще всего МКЭ, используя при этом процедуры последовательных приближений.

**Учет физической нелинейности.** В этом случае связь между напряжениями и деформациями в общем виде запишется так:

$$\sigma = E(\varepsilon) \varepsilon, \quad (3.1)$$

где  $E(\varepsilon)$  – матрица, характеризующая физические свойства материала – элементы ее являются функциями компонент вектора деформаций  $\varepsilon$ . Как известно, деформации в КЭ можно выразить через узловые перемещения  $q^e$  согласно

$$\varepsilon^e = ANq^e = Bq^e. \quad (3.2)$$

Подставив (3.2) в выражение (3.1), имеем

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}(\boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{B} \mathbf{q}^e = \mathbf{E}_\sigma(\mathbf{q}^e) \mathbf{B} \mathbf{q}^e.$$

Для вычисления МЖ конечного элемента плоской задачи вместо (2.32) получим выражение вида

$$\tilde{\mathbf{K}}^e(\mathbf{q}^e) = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{E}_\sigma(\mathbf{q}^e) \mathbf{B} h d\Omega.$$

Имея МЖ для каждого элемента, можно сформировать МЖ для всей конструкции. В этом случае система разрешающих уравнений для определения неизвестных узловых перемещений примет вид

$$\tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{q}) \mathbf{q} = \mathbf{P}. \quad (3.3)$$

При этом глобальная матрица жесткости  $\tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{q})$  будет зависеть не только от геометрических и жесткостных характеристик конструкции, но и от ее напряженно-деформированного состояния, выраженного через узловые перемещения.

**Учет геометрической нелинейности.** Здесь учет нелинейности связан с введением нелинейной зависимости между деформациями и перемещениями в пределах конечного элемента

$$\boldsymbol{\varepsilon}^e = \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{q}^e) \mathbf{q}^e. \quad (3.4)$$

В общем виде элементы матрицы  $\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{q}^e)$  представляют собой степенные функции от узловых перемещений и определяются по формуле

$$\tilde{b}_{ij} = b_{ij} + \sum_{k=1}^r \frac{\partial b_{ik}}{\partial q_j} q_k,$$

где  $b_{ij}$  – элемент матрицы  $\mathbf{B}$ , используемой при упругом линейном расчете. Выражение для МЖ произвольного КЭ с учетом (3.4) можно записать в виде

$$\tilde{\mathbf{K}}^e(\mathbf{q}^e) = \int_{\Omega^e} \tilde{\mathbf{B}}^T(\mathbf{q}^e) \mathbf{E} \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{q}^e) h d\Omega.$$

Матрицу жесткости для всей конструкции обозначим так же, как при учете физической нелинейности –  $\tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{q})$ , при этом ее физический смысл полностью сохраняется, т. е. она характеризует нелинейную зависимость между узловыми усилиями и узловыми перемещениями, хотя содержание матрицы может существенным образом отличаться.

Таким образом, при учете физической или геометрической нелинейности получаем систему нелинейных алгебраических уравнений вида (3.3), решение которой осуществляется при помощи шаговых или итерационных методов. Причем среди известных алгоритмов расчета нелинейных систем нет какого-либо одного универсального – эффективность того или иного метода зависит, главным образом, от типа и параметров проявляющейся нелинейности.

В связи с этим рассмотрим некоторые из часто применяемых методов, которые подразделяются на две группы: итерационные и шаговые.

### 3.1.2. Итерационные методы решения нелинейных задач

Итерационные методы применяются как для уточнения решения на каждом шаге нагружения, так и при приложении всей нагрузки сразу – за один шаг (в том случае, если нет необходимости анализа напряженно-деформированного состояния в течение всего времени нагружения).

**Метод последовательных приближений** (метод переменных жесткостей). Метод был предложен в 1951 г. И. А. Биргером. Рассмотрим его в формулировке метода перемещений, при этом система нелинейных уравнений имеет вид (3.3).

Сущность метода последовательных приближений заключается в том, что общая матрица  $\tilde{K}(q)$  на каждой последующей итерации определяется через узловые перемещения, полученные на предыдущей итерации:

$$\tilde{K}(q_{i-1}) q_i = P, \quad (3.5)$$

где  $i$  – номер последовательного приближения (итерации).

Первоначально, т. е. на 1-й итерации, в матрице  $\tilde{K}(q_0)$  все нелинейные члены необходимо положить равными нулю, т. е.  $q_0 = 0$ . Процесс последовательных приближений по (3.5), с уточнением матрицы жесткости  $\tilde{K}(q)$  на каждой итерации, продолжается до тех пор, пока разность между двумя последовательными решениями  $q_n - q_{n-1}$  не окажется достаточно малой (рис. 3.1, а).

Следует отметить, что метод последовательных приближений при сильной нелинейности отличается плохой сходимостью, а в некоторых случаях итерационный процесс даже расходится.

**Метод упругих решений.** Метод предложен в 1947 г. А. А. Ильюшиным. По сравнению с методом переменных жесткостей этот метод приводит к некоторому сокращению объема вычислительных операций.

В основе метода упругих решений лежит разложение матрицы  $\bar{K}(q)$  на линейную и нелинейную составляющие:

$$\tilde{K}(q) = K + K_{нел}(q). \quad (3.6)$$

Подставив выражение (3.6) в (3.3), получим

$$K q = P - K_{нел}(q) q. \quad (3.7)$$

Решение системы уравнений (3.7) выполним с помощью итерационной процедуры. Первоначально в правой части равенства (3.7) положим  $q_0 = 0$  и найдем значения узловых перемещений  $q_1$  из решения линейной системы уравнений  $K q_1 = P$ . Подставив перемещения  $q_1$  в нелинейную составляющую матрицы жесткости, вычислим правую часть (3.7):  $P_1 = P - K_{нел}(q_1) q_1$ . На второй итерации из решения системы  $K q_2 = P_1$  найдем перемещения  $q_2$  и т. д.



Алгоритм метода упругих решений можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{K} \mathbf{q}_i = \mathbf{P}_{i-1}, \quad (3.8)$$

где

$$\mathbf{P}_{i-1} = \mathbf{P} - \mathbf{K}_{нел}(\mathbf{q}_{i-1}) \mathbf{q}_{i-1}. \quad (3.9)$$

Итерационный процесс по (3.8) с уточнением нагрузки на каждой итерации по (3.9) продолжается до тех пор, пока разность между двумя последовательными решениями не окажется достаточно малой.

Метод упругих решений относительно прост, так, в процессе решения задачи обращение линейной матрицы  $\mathbf{K}$  производится лишь один раз. Однако сходимость метода существенно зависит от разницы между линейным и нелинейным решениями. При большой разнице между ними итерационный процесс сходится очень плохо (рис. 3.1, б).

**Метод Ньютона-Рафсона.** Как уже было отмечено, при сильной нелинейности рассмотренные выше итерационные методы характеризуются относительно медленной сходимостью. Для того чтобы ускорить процесс сходимости, используется уточняющий метод Ньютона-Рафсона. Пусть при расчете методом последовательных приближений или методом упругих решений после  $i$ -й итерации получена следующая невязка:

$$\delta_i = \mathbf{P} - \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{q}_i \quad \text{или} \quad \delta_i = \mathbf{P} - \mathbf{K} \mathbf{q}_i - \mathbf{K}_{нел}(\mathbf{q}_i) \mathbf{q}_i. \quad (3.10)$$

Для минимизации вектора невязки узловых сил  $\delta_i$  вводится поправка к вектору перемещений  $\Delta \mathbf{q}_i = \mathbf{q}_{i+1} - \mathbf{q}_i$ , которая определяется из условия

$$\tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{q}_i) \mathbf{q}_{i+1} = \mathbf{P},$$

или

$$\mathbf{q}_{i+1} = [\tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{q}_i)]^{-1} \mathbf{P}. \quad (3.11)$$

Выразив вектор  $\mathbf{P}$  из равенства (3.10) и подставив в (3.11), получим формулу Ньютона-Рафсона в виде

$$\mathbf{q}_{i+1} = [\tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{q}_i)]^{-1} \delta_i + \mathbf{q}_i. \quad (3.12)$$

Процесс итераций по (3.12) продолжается до тех пор, пока норма вектора невязки  $\|\Delta \mathbf{q}_n\|$  не станет меньше заданной точности расчета.

Как видно из рис. 3.1, в, применение метода Ньютона-Рафсона приводит к уменьшению числа итераций. Однако при выполнении каждой итерации, согласно алгоритму (3.12), требуется уточнять и обращать матрицу  $\tilde{\mathbf{K}}(\mathbf{q}_i)$ , что требует существенных вычислительных затрат. Если же матрицу жесткости не пересчитывать (и, следовательно, не обращать) на каждой итерации, а принять равной линейной  $\mathbf{K}$ , то имеем алгоритм *модифицированного метода Ньютона-Рафсона*

$$\mathbf{q}_{i+1} = [\mathbf{K}]^{-1} \delta_i + \mathbf{q}_i. \quad (3.13)$$

Точность расчета здесь достигается увеличением числа проводимых итераций (рис. 3.1, *з*). Для повышения эффективности может применяться комбинация обоих методов Ньютона-Рафсона: (3.12) и (3.13). Помимо этого разработаны специальные процедуры, ведущие к ускорению сходимости модифицированного метода Ньютона-Рафсона, к их числу относятся алгоритмы Айткена, Броудена-Флетчера (БФГЖ-метод), Рикса и Вемпера [21].

В заключение этого параграфа отметим следующее.

При использовании итерационных методов в алгоритмах пошагового приращения нагрузки (с целью уточнения решения на каждом шаге нагружения) число итераций в одном шаге либо задается заранее, либо итерации выполняются до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность расчетов.

Сходимость итерационных методов, как правило, сильно зависит от "попадания" начального приближения. Если влияние нелинейности мало, обычно удается попасть близко к точному решению задачи – что обеспечивает хорошую сходимость метода, при сильной же нелинейности отклонение начального приближения может быть значительным – в результате скорость сходимости резко снижается, а в отдельных случаях итерационный процесс даже расходится.

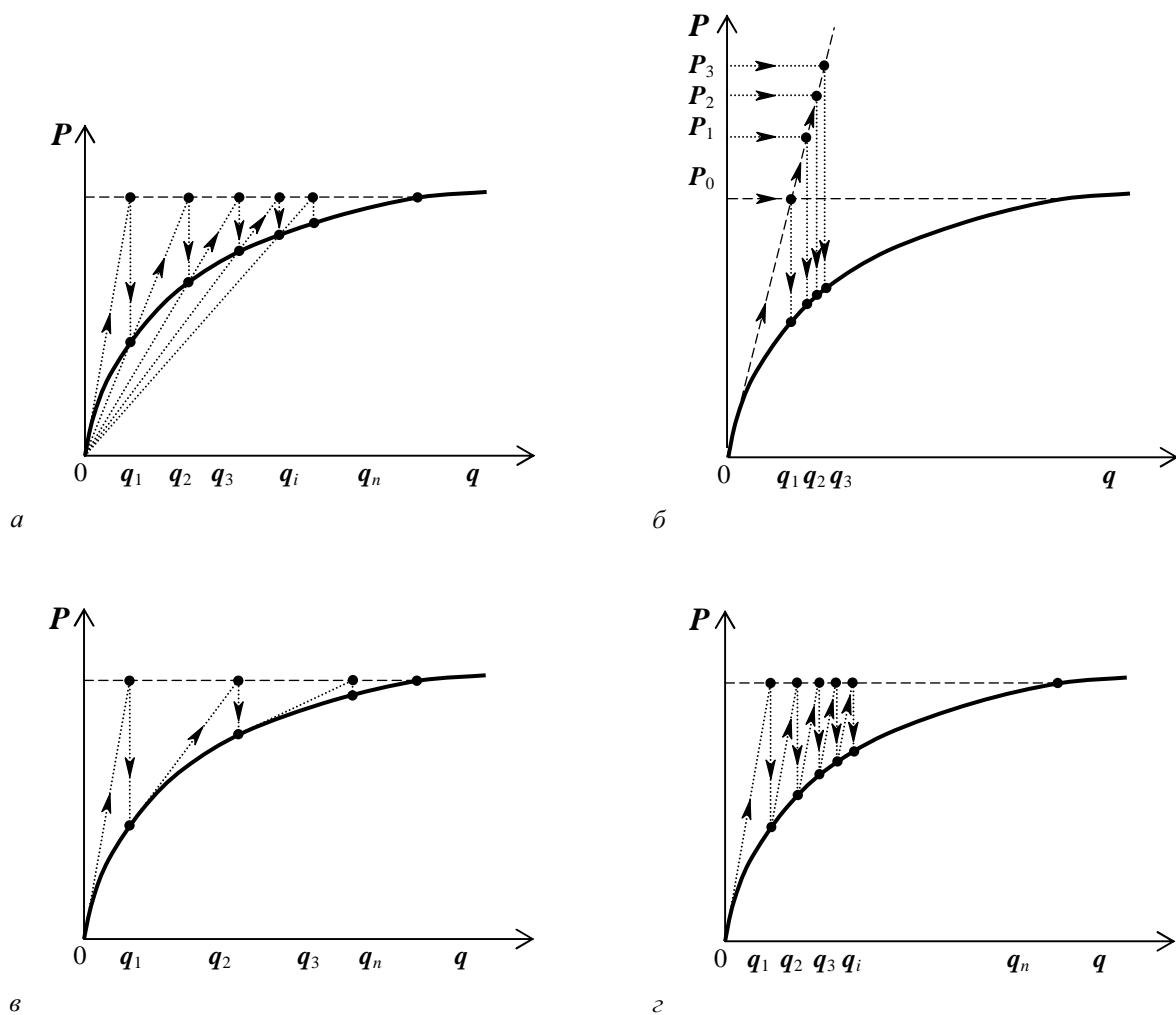


Рис. 3.1

### 3.1.3. Шаговые методы решения нелинейных задач

Шаговые методы позволяют получать решение нелинейной задачи после каждого шага приращения нагрузки. В этом случае имеется возможность учета реального процесса нагружения во времени, например, ползучести материала, изменения внешней нагрузки и т. д.

Каждый шаг нагружения допускает ясную физическую интерпретацию. Поскольку приращение нагрузки считается достаточно малым, поведение конструкции на каждом шаге можно принять линейным. После выполнения шага нагружения формируется новая нелинейная составляющая матрицы жесткости и осуществляется следующее приращение нагрузки. Таким образом, нелинейное поведение конструкции полностью представляется в виде последовательности кусочно-линейных шагов.

К недостатку шаговых методов следует отнести накопление ошибок (*невязки решения*) при переходе от одного шага нагружения к другому. При сильной нелинейности следует уменьшать величину приращения нагрузки (т. е. необходимо большое число шагов), тем самым нелинейный расчет усложняется.

Улучшение точности решения также возможно с помощью регулирования невязки узловых сил (3.10), например, через каждые несколько шагов нагружения. Уменьшение накопленной невязки  $\delta$  и тем самым уточнение решения рекомендуется производить с помощью одного из рассмотренных выше итерационных методов (или их комбинации).

Предположим, что в процессе нагружения значения внешней нагрузки изменяются пропорционально некоторому параметру  $\lambda$ , принимающему значение в пределах от 0 до 1:

$$\mathbf{P}_\lambda = \lambda \mathbf{P}_0. \quad (3.14)$$

Подставив (3.14) в уравнение невязки (3.10) и продифференцировав  $\delta$  по параметру  $\lambda$ , получим

$$\dot{\delta} = \mathbf{P}_0 - [\mathbf{K} + \mathbf{K}_{нел}(\mathbf{q}) + \Delta\mathbf{K}(\mathbf{q})] \dot{\mathbf{q}}, \quad (3.15)$$

где точкой обозначена производная по  $\lambda$ , элементы матрицы  $\Delta\mathbf{K}$  определяются по формуле

$$\Delta k_{ij} = \sum_{k=1}^N \frac{\partial k_{ik}}{\partial q_j} q_k.$$

Решение нелинейной задачи находится из условия минимума невязки, т. е.

$$\dot{\delta} = 0.$$

**Метод шагового нагружения.** Из условия минимума невязки с учетом (3.15) получим

$$[\mathbf{K} + \mathbf{K}_{нел}(q) + \Delta\mathbf{K}(q)]\dot{q} = \mathbf{P}_0. \quad (3.16)$$

Для решения уравнения (3.16) разобьем интервал изменения параметра  $\lambda$  на ряд отдельных участков точками  $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$ , причем  $\lambda_0 = 0$ ,  $\lambda_n = 1$ . В этом случае матричное уравнение (3.16) для  $s$ -го шага нагружения можно записать в следующем виде:

$$[\mathbf{K} + \mathbf{K}_{нел}(q_{s-1}) + \Delta\mathbf{K}(q_{s-1})]\Delta q_s = (\lambda_s - \lambda_{s-1})\mathbf{P}_0, \quad (3.17)$$

где  $\Delta q_s = (q_s - q_{s-1})$ .

Положим  $s = 0$ ,  $\lambda_0 = 0$  и  $q_0 = 0$  (нулевая ступень нагружения). В результате решения системы уравнений (3.17) получим узловые перемещения, отвечающие первому шагу нагружения:  $q_1 = \Delta q_1$ . Далее процесс вычислений по (3.17) повторяется при  $s = 1$ , соответствующем ему параметре  $\lambda_1$  и скорректированной нелинейной составляющей матрицы жесткости  $\mathbf{K}_{нел}(q_1)$ .

Таким образом, каждый раз последовательно переходя к следующему шагу нагружения  $s$ , из решения системы (3.17) определяются приращения  $\Delta q_s$ , затем узловые перемещения  $q_s = q_{s-1} + \Delta q_s$ , с помощью которых корректируется матрица жесткости  $\mathbf{K}_{нел}(q_s)$ . В конечном счете приходим к искомому вектору узловых перемещений  $q_n$ , соответствующему  $\lambda_n = 1$ .

Метод шагового нагружения имеет недостаток, который заключается в возможности смещения (*дрейфа*) приближенного решения от точного (рис. 3.2, а). Для ликвидации невязки  $\delta$ , накопленной за несколько шагов нагружения, можно использовать метод Ньютона-Рафсона или его модифицированный вариант. При этом в качестве начального приближения используется результат решения задачи на предыдущем шаге (рис. 3.2, б).

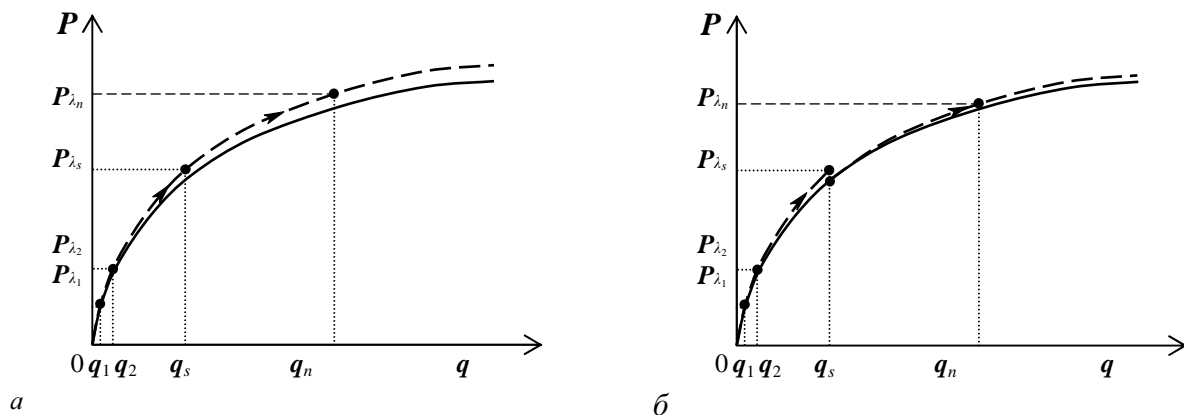


Рис. 3.2

**Метод самокорректирующихся начальных значений.** Данный метод позволяет устранить недостатки, присущие методу шаговых нагружений. В основе самокорректирующегося метода лежит следующее уравнение:

$$\dot{\delta} + Z \delta = 0. \quad (3.18)$$

Здесь  $Z$  – некоторый постоянный множитель, выбираемый из условия получения устойчивого алгоритма. Самокорректирующее свойство уравнения (3.18) непосредственно следует из записи точного выражения для невязки, например,  $k$ -й компоненты вектора  $\delta$  [18]:

$$\delta_k = C_k e^{-Z\lambda}.$$

Как видно, с увеличением  $\lambda$  величина невязки  $\delta$  экспоненциально уменьшается.

Подставив в уравнение (3.18) выражение для невязки  $\delta$  (3.10) и ее производной  $\dot{\delta}$  (3.15), получим

$$\mathbf{K}(\dot{\mathbf{q}} + Z \mathbf{q}) = (1 + Z \lambda) \mathbf{P}_0 - [\mathbf{K}_{нел}(\mathbf{q}) + \Delta \mathbf{K}] \dot{\mathbf{q}} - Z \mathbf{K}_{нел}(\mathbf{q}) \mathbf{q}. \quad (3.19)$$

Приняв во внимание, что

$$[\mathbf{K}_{нел}(\mathbf{q}) + \Delta \mathbf{K}] \dot{\mathbf{q}} = \frac{\partial}{\partial \lambda} [\mathbf{K}_{нел}(\mathbf{q}) \mathbf{q}],$$

и заменив производные в (3.19) на конечные разности для  $s+1$  шага нагружения

$$\dot{\mathbf{q}} = \Delta \mathbf{q}_{s+1} = \mathbf{q}_{s+1} - \mathbf{q}_s; \quad \dot{\lambda} = \Delta \lambda_{s+1} = \lambda_{s+1} - \lambda_s,$$

придем к матричному уравнению, решив которое, получим следующий алгоритм самокорректирующегося метода:

$$\mathbf{q}_{s+1} = (1 - Z \Delta \lambda_{s+1}) \mathbf{q}_s + \mathbf{K}^{-1} \left[ \Delta \lambda_{s+1} (1 + Z \lambda_s) \mathbf{P}_0 + \frac{\Delta \lambda_{s+1}}{\Delta \lambda_s} \mathbf{K}_{нел}(\mathbf{q}_{s-1}) \mathbf{q}_{s-1} - \Delta \lambda_{s+1} \left( Z + \frac{1}{\Delta \lambda_s} \right) \mathbf{K}_{нел}(\mathbf{q}_s) \mathbf{q}_s \right].$$

Для выполнения нелинейного расчета с помощью данной формулы первоначально (на первом шаге) следует принять  $\mathbf{q}_0 = 0$ , а  $\mathbf{q}_1$  определить с помощью метода шагового нагружения. Что касается множителя  $Z$ , его значение рекомендуется выбирать (эмпирически) в следующем диапазоне:

$$\frac{1}{\Delta \lambda} \leq Z \leq \frac{1.3}{\Delta \lambda}.$$

### 3.1.4. Алгоритмы решения упругопластической плоской задачи

Различные теории пластичности, которые используются при учете физической нелинейности, условно могут быть отнесены к одному из двух типов: к *деформационным теориям пластичности* и *теориям пластического течения* [1]. В теориях первого типа устанавливается связь между напряжениями и деформациями, поэтому физические уравнения здесь записываются в конечных величинах. Между тем в теориях пластического течения связываются бесконечно малые приращения пластических деформаций и напряжений, в этом случае физические уравнения являются дифференциальными.

Рассмотрим порядок решения упругопластической задачи с использованием деформационной теории А. А. Ильюшина (*теории малых упругопластических деформаций*).

Согласно этой теории физические уравнения для упругопластической области в случае изотропного материала имеют вид

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau \end{Bmatrix} = E \begin{bmatrix} 1+t & -\nu-0.5t & 0 \\ -\nu-0.5t & 1+t & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\nu)+3t \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{или} \quad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}_{nl} \boldsymbol{\varepsilon}.$$

Здесь индекс "nl" указывает на работу материала в пластической стадии;

параметр  $t = \frac{E}{E_c} - \frac{2(1+\nu)}{3}$ ;  $E_c = \frac{\sigma_u}{\varepsilon_u}$  – *секущий модуль упругости*;  $E$  – модуль упругости при растяжении-сжатии.

*Интенсивность напряжений*

$$\sigma_u = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_x \sigma_y + 3\tau^2}; \quad (3.20)$$

*интенсивность деформаций*

$$\varepsilon_u = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + 3\gamma_{xy}^2}. \quad (3.21)$$

Напомним, что для плоского напряженного состояния  $\varepsilon_z = \frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$ .

Матрица жесткости КЭ, связывающая между собой узловые усилия и узловые перемещения при упругопластических деформациях, имеет вид

$$\mathbf{K}_{nl}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{E}_{nl} \mathbf{B} h d\Omega. \quad (3.22)$$

Для непосредственного использования метода шагового нагружения необходимо записать связь между приращениями компонент напряжений  $d\boldsymbol{\sigma}$  и деформаций  $d\boldsymbol{\varepsilon}$ . Согласно теории малых упругопластических деформаций

$$\begin{Bmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\tau \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{33} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_y \\ d\gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad \text{или} \quad d\boldsymbol{\sigma} = \bar{\mathbf{E}}_{nl} d\boldsymbol{\varepsilon},$$

где  $A_{11} = a + S_x^2 b + \frac{1}{E_c}$ ;  $A_{22} = a + S_y^2 b + \frac{1}{E_c}$ ;  $A_{33} = \frac{3}{E_c}$ ;  $A_{12} = A_{21} = a + S_x S_y b - \frac{1}{2E_c}$ ;

$$a = \frac{1-2\nu}{3E}; \quad b = \frac{1}{\sigma_u^2} \left( \frac{1}{E_\kappa} - \frac{1}{E_c} \right); \quad S_x = \sigma_x - \frac{\sigma_y}{2}; \quad S_y = \sigma_y - \frac{\sigma_x}{2};$$

$E_\kappa = \frac{d\sigma_u}{d\varepsilon_u}$  – касательный модуль упругости.

Матрица  $\bar{\mathbf{E}}_{nl}$  называется *матрицей пластических параметров*, которые зависят от достигнутого уровня пластического деформирования. Принимая во внимание, что приращения пластических деформаций на каждом шаге приращения нагрузки сравнительно малы, можно считать матрицу  $\bar{\mathbf{E}}_{nl}$  для каждого шага нагружения постоянной.

Аналогично уравнению (3.22) имеем

$$\bar{\mathbf{K}}_{nl}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{E}}_{nl} \mathbf{B} h d\Omega, \quad (3.23)$$

где  $\bar{\mathbf{K}}_{nl}^e$  – пластическая матрица жесткости, выражающая связь между приращением узловых усилий и приращением узловых перемещений.

Обе матрицы жесткости  $\mathbf{K}_{nl}^e$  и  $\bar{\mathbf{K}}_{nl}^e$  постоянны в пределах отдельного шага нагружения, а при переходе к следующему шагу они изменяются в зависимости от степени развития пластических деформаций.

В общем случае вычисление матриц жесткости по формулам (3.22) и (3.23) осложняется тем, что входящие в подынтегральное выражение матрицы  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{E}_{nl}$  и  $\bar{\mathbf{E}}_{nl}$  зависят от координат  $x$ ,  $y$ . Лишь для треугольного элемента, в котором производные от функций формы, компоненты деформаций и напряжений являются постоянными, матрицы  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{E}_{nl}$  и  $\bar{\mathbf{E}}_{nl}$  не зависят от координат точек. Поэтому для треугольного КЭ выражения (3.22) и (3.23) можно переписать в следующем виде:

$$\mathbf{K}_{nl}^e = (\mathbf{B})^T \mathbf{E}_{nl} \mathbf{B} h \Omega,$$

$$\bar{\mathbf{K}}_{nl}^e = (\mathbf{B})^T \bar{\mathbf{E}}_{nl} \mathbf{B} h \Omega.$$

Перед проведением упругопластического расчета рекомендуется дискретную модель конструкции разделить на две части: упругую и упругопластическую. Такое разделение можно выполнить на основе результатов, полученных с помощью предварительного линейного расчета. Следует учитывать, что зоны пластических деформаций чаще всего появляются в областях сильной концентрации напряжений (в местах приложения сосредоточенных нагрузок, связей, резко выраженных отверстий, вырезов и т. п.)

### Алгоритм расчета по методу последовательных приближений

Этот метод может быть использован только в случае простого нагружения, т. е. без разгрузки, когда деформационная теория пластичности полностью справедлива. При этом расчет производится сразу для заданных значений внешних нагрузок и базируется на использовании матрицы жесткости  $K_{nl}^e$ .

Основные этапы расчета:

1. На основе "упругих" матриц жесткости элементов  $K_{упр}^e$ , вычисляемых по (2.32), формируется линейная матрица жесткости для всей области  $K(q_0)$ .
2. Из решения системы разрешающих уравнений (3.5) определяются узловые перемещения для текущей итерации.
3. Для каждого элемента определяются деформации, напряжения, вычисляются матрицы жесткости  $K_{упр}^e$  или  $K_{nl}^e$  (при наличии пластических деформаций).
4. Формируется нелинейная матрица жесткости для всей области  $\tilde{K}(q_i)$ .
5. Повторяются пп. 2–4 до получения требуемой точности расчета.

Для большинства практических задач описанный выше процесс последовательных приближений оказывается сходящимся. Графическое изображение процесса приведено на рис. 3.1, а.

### Алгоритм расчета по методу шагового нагружения

Шаговые методы довольно часто используются при расчете реальных конструкций, поскольку позволяют проследить появление и развитие в них пластических деформаций (при учете ползучести материала, изменении внешней нагрузки во времени и т. д.).

Весь интервал нагружения ( $0 - P_0$ ) разбивается на ряд ступеней:

$$\Delta P_1, \Delta P_2, \dots, \Delta P_s, \dots, \Delta P_n,$$

и процесс решения задачи представляется в виде следующей последовательности приращений нагрузки:

$$0, \lambda_1 P_0 = \Delta P_1, \lambda_2 P_0 = \lambda_1 P_0 + \Delta P_2, \dots, \lambda_s P_0 = \lambda_{s-1} P_0 + \Delta P_s, \dots, P_0. \quad (3.24)$$

С учетом (3.24) систему уравнений (3.17) можно переписать в виде

$$\tilde{K}(q_{s-1}) \Delta q_s = \Delta P_s, \quad (3.25)$$

где нелинейная матрица жесткости  $\tilde{K}$  для всей области формируется с использованием пластических матриц жесткости  $\bar{K}_{nl}^e$  отдельных элементов.

На каждом шаге нагружения выполняются следующие действия:

1. Для каждого элемента вычисляются матрицы жесткости  $K_{упр}^e$  по (2.32) или  $\bar{K}_{nl}^e$  по (3.23), в зависимости от наличия пластических деформаций, причем на первом шаге используется упругая матрица жесткости  $K_{упр}^e$ .
2. Формируется система разрешающих уравнений (3.25), причем на первом шаге ( $s = 1, q_0 = 0$ ) вместо  $\bar{K}_{nl}^e$  следует использовать  $K_{упр}^e$ .



Приращение нагрузки  $\Delta P_s = (\lambda_s - \lambda_{s-1})P_0$ .

3. Из решения (3.25) находится приращение вектора узловых перемещений  $\Delta q_s$ , вычисляются узловые перемещения в конце  $s$ -го шага нагружения:

$$q_s = q_{s-1} + \Delta q_s.$$

4. Для каждого элемента определяются приращения деформаций и напряжений:

$$d\varepsilon_s = B \Delta q_s; \quad d\sigma_s = (\bar{E}_{nl})_{s-1} d\varepsilon_s,$$

причем на первом шаге вместо матрицы пластических параметров  $\bar{E}_{nl}$  следует использовать матрицу упругости  $E$ .

5. По каждому элементу определяются приращения интенсивности деформаций  $d\varepsilon_u$  и напряжений  $d\sigma_u$  (используя формулы, аналогичные (3.20) и (3.21)).  
6. Для каждого элемента определяются компоненты деформаций и напряжений в конце  $s$ -го шага нагружения:

$$\varepsilon_s = \varepsilon_{s-1} + d\varepsilon_s; \quad \sigma_s = \sigma_{s-1} + d\sigma_s.$$

7. По каждому элементу согласно (3.20) и (3.21) определяется интенсивность деформаций  $\varepsilon_u$  и интенсивность напряжений  $\sigma_u$ . Определяются касательный  $E_k$  и секущий  $E_c$  модули упругости на конец  $s$ -го шага нагружения.  
8. Строятся матрицы пластических параметров  $\bar{E}_{nl}$ , которые используются на следующем  $s+1$  шаге нагружения (только для элементов, в которых выполняется условие текучести, т. е.  $\sigma_u \geq \sigma_T$ ).  
9. Последовательно повторяются пп. 1–8 вплоть до достижения величины заданной нагрузки  $P_0$ .

Графическое представление алгоритма приведено на рис. 3.2, а.

Применяя шаговые методы при циклическом нагружении, следует иметь в виду, что "пластические" матрицы  $\bar{E}_{nl}$  и  $\bar{K}_{nl}^e$  используются лишь в условиях активного нагружения, т. е. когда приращение интенсивности напряжений на  $s$ -м шаге будет положительным:

$$d\sigma_s = \sigma_s - \sigma_{s-1} > 0.$$

Если же  $d\sigma_s < 0$ , то происходит разгрузка, в процессе которой материал, как известно, работает упруго. Поэтому на соответствующем шаге вместо матриц  $\bar{E}_{nl}$  и  $\bar{K}_{nl}^e$  для конечного элемента следует применять "упругие" матрицы  $E$  и  $K_{упр}^e$ .

В заключение еще раз отметим, что использование шаговых методов позволяет проследить всю историю изменения напряженно-деформированного состояния конструкции в процессе изменения внешней нагрузки, а также учесть любой закон поведения материала (влияние времени, температуры и т. п. на его механические свойства).

### 3.1.5. Примеры нелинейных расчетов

#### Пример 1

В качестве примера рассмотрим задачу о растяжении прямоугольной пластины с отверстием, находящуюся в условиях плоского напряженного состояния (рис. 3.3, а). Предполагается, что материал пластины испытывает упругопластические деформации с линейным упрочнением (площадка текучести имеет постоянный уклон  $E_k = 2\,250$  МПа, рис. 3.3, б). Предел текучести материала  $\sigma_T = 100$  МПа. При работе в упругой стадии: модуль упругости  $E = 70\,000$  МПа, коэффициент Пуассона  $\nu = 0.2$ . Интенсивность равномерно распределенной нагрузки  $p = 250$  кН/м. Размеры пластины  $200 \times 100$  мм, диаметр отверстия  $50$  мм, толщина  $2.5$  мм.

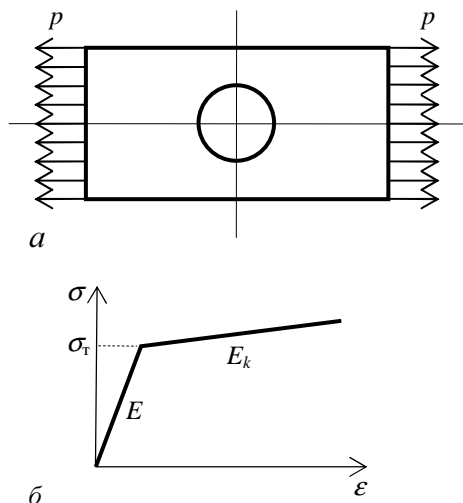


Рис. 3.3

С учетом двуслойной симметрии выполняем расчет для одной четверти пластины. Граничные условия и сетка конечных элементов приведены на рис. 3.4.

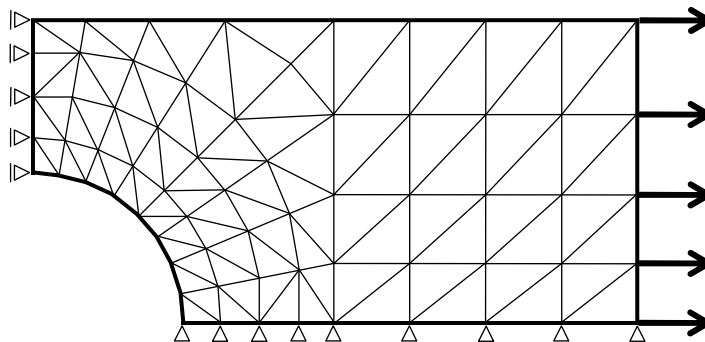


Рис. 3.4

При решении данной упругопластической задачи использовался алгоритм метода шагового нагружения. На отдельных шагах для повышения точности выполнялась корректировка решения с помощью модифицированного метода

Ньютона-Рафсона. Вычисляемые в пределах каждого треугольного КЭ напряжения и деформации постоянны и отнесены к центру тяжести элементов. Шаг приращения нагрузки  $\Delta p = 10$  кН/м.

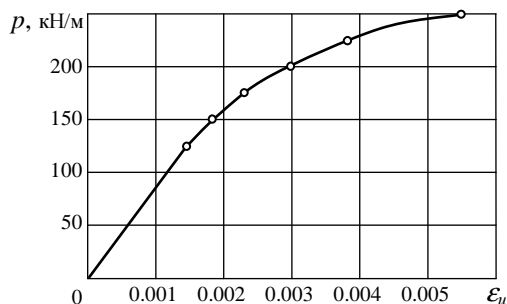


Рис. 3.5

На рис. 3.5 показан рост интенсивности деформации в точке первого появления текучести в зависимости от изменения нагрузки. Рис. 3.6 отражает развитие зон пластичности при различных уровнях нагружения.

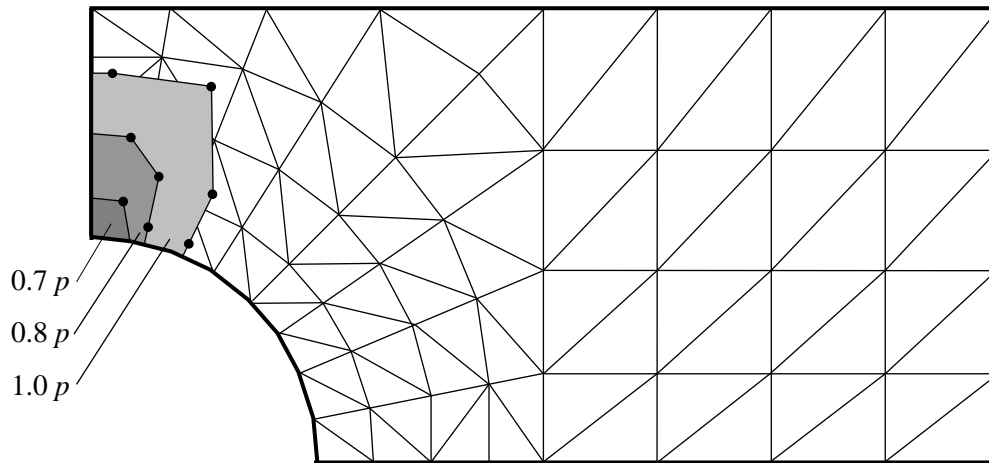


Рис. 3.6

### Пример 2

Рассмотрим консольную балку-стенку, линейный расчет которой выполнялся в 2.2.2 (см. рис. 2.22, а). Примем, что в процессе упругопластического деформирования связь между напряжениями и деформациями характеризуется кубической зависимостью (рис. 3.7), а интенсивность нагрузки по свободному краю составляет  $p = 0.02h\sigma_r$ , где  $h$  – толщина пластины. Граничные условия и сетка конечных элементов показаны на рис. 3.8, а.

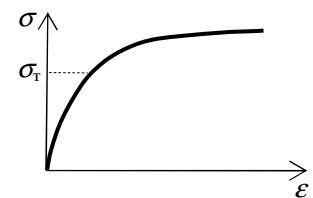


Рис. 3.7

Решение данной задачи производилось при помощи алгоритма метода последовательных приближений. Заданная нагрузка прикладывалась сразу, т. е. за один шаг, без последующей разгрузки. Итерационный процесс выполнялся до достижения заданной точности определяемых на  $n$ -й итерации узловых перемещений:

$$\left( \frac{q_{\max}^{(n)} - q_{\max}^{(n-1)}}{q_{\max}^{(n-1)}} \leq \varepsilon_q = 0.005 \right).$$

Области пластических деформаций (текучности), полученные в результате проведенного расчета, показаны на рис. 3.8, б.

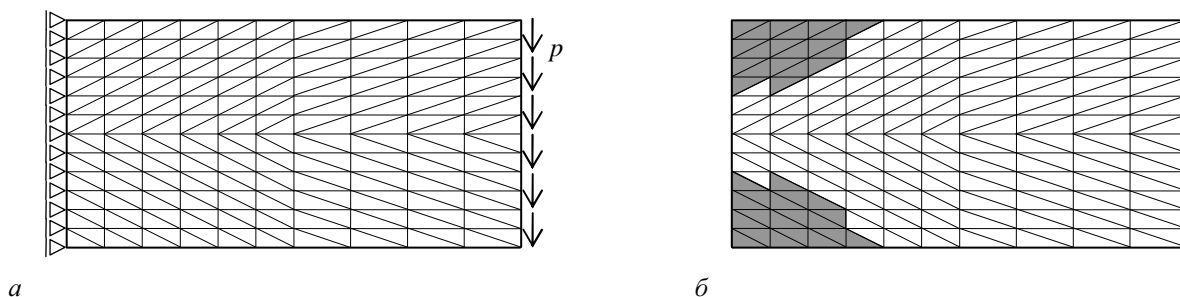


Рис. 3.8

## 3.2. Расчет конструкций на динамические воздействия

В отличие от статического расчета, когда внешние воздействия и, следовательно, все остальные компоненты НДС не зависят от времени, при динамическом расчете внешние воздействия являются функциями времени. Наряду с параметрами, описывающими статическое поведение конструкции, в динамической задаче время выступает как новый дополнительный параметр, существенно усложняющий ее решение. Только лишь некоторые задачи динамики конструкций имеют аналитическое решение. Поэтому численные методы, с помощью которых можно получать приближенные решения нестационарных задач, имеют особое значение. Ведущее положение среди них занимает метод конечных элементов.

В данной главе изложены лишь основы применения МКЭ для расчета конструкций на динамические воздействия. Сформулированы *уравнения движения* для конечного элемента и для системы элементов, приведены выражения для матриц масс и демпфирования некоторых простых конечных элементов, рассмотрены методы решения задач на вынужденные колебания (поведение конструкции во времени при различных динамических воздействиях).

### 3.2.1. Конечно-элементная формулировка динамических задач

В основе конечно-элементных формулировок большинства динамических задач лежат уравнения движения дискретной модели конструкции. Эти уравнения можно получить различными способами, например, на основе принципа Даламбера, принципа возможных перемещений или принципа Гамильтона.

**Вариационный принцип Гамильтона** (представляющий среди перечисленных наиболее общий подход) может быть выражен в следующем виде [24, 27]:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T + W - \Pi) dt = 0, \quad (3.26)$$

где  $T$  – кинетическая энергия системы;  $W$  – работа неконсервативных сил (включая и силы демпфирования);  $\Pi$  – потенциальная энергия внутренних и внешних сил;  $t_1, t_2$  – какой-либо интервал времени;  $\delta$  – символ вариации (дифференциала). Предположим, что существуют следующие функциональные зависимости для дискретной системы:

$$T = T(q_i, \dot{q}_i); \quad W = W(q_i, \dot{q}_i); \quad \Pi = \Pi(q_i), \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (3.27)$$

где  $q_i$  – обобщенные перемещения;  $\dot{q}_i$  – обобщенные скорости;  $n$  – число степеней свободы. Применим интегрирование по частям выражения для  $T$ :

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta T(q_i, \dot{q}_i) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \delta \dot{q}_i + \frac{\partial T}{\partial q_i} \delta q_i \right] \right\} dt = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_i} \right] \delta q_i \right\} dt. \quad (3.28)$$

Аналогично будет и для  $W$ . Принимая во внимание (3.27), (3.28), а также что  $\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0$ , на основании (3.26) получим

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{i=1}^n \left[ -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} - \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial W}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial W}{\partial q_i} \right] \delta q_i \right\} dt = 0. \quad (3.29)$$

Поскольку  $\delta q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) – произвольные величины, в общем случае отличные от нуля, то из выражения (3.29) вытекает, что

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial W}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial W}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.30)$$

Уравнения (3.29) представляют собой уравнения движения Лагранжа, которые являются основой для конечно-элементной формулировки динамической задачи.

Аппроксимирующие выражения для перемещений и скоростей в элементе:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{q}^e, \quad \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{N}\dot{\mathbf{q}}^e,$$

где  $\dot{\mathbf{u}} = \frac{d\mathbf{u}}{dt}$  – вектор скорости;  $\dot{\mathbf{q}}^e$  – вектор обобщенных узловых скоростей.

Кинетическая энергия элемента плоской задачи теории упругости

$$T^e(\dot{\mathbf{q}}^e) = \frac{1}{2} \int_{\Omega^e} (\dot{\mathbf{u}})^T \rho \dot{\mathbf{u}} h d\Omega = \frac{1}{2} \rho \int_{\Omega^e} (\mathbf{N}\dot{\mathbf{q}}^e)^T \mathbf{N}\dot{\mathbf{q}}^e h d\Omega, \quad (3.31)$$

где  $\rho$  – плотность материала (объемная масса).

Потенциальная энергия конечного элемента согласно (2.30)

$$\Pi^e(\mathbf{q}^e) = \frac{1}{2} \int_{\Omega^e} (\mathbf{A}\mathbf{N}\mathbf{q}^e)^T \mathbf{E} \mathbf{A}\mathbf{N}\mathbf{q}^e h d\Omega - \int_{\Omega^e} (\mathbf{N}\mathbf{q}^e)^T \rho h d\Omega - \int_{S_g^e} (\mathbf{N}\mathbf{q}^e)^T \mathbf{g}_s h dS, \quad (3.32)$$

где первое слагаемое представляет собой внутреннюю энергию деформации, второе и третье – потенциальную энергию объемных  $\rho$  и поверхностных  $\mathbf{q}_s$  сил соответственно.

В качестве неконсервативных сил в элементе выступают силы *демпфирования* (сопротивления). При динамическом деформировании конструкции имеет место *диссипация* энергии, возникающая за счет движения тела в вязкой среде, контактного трения, внутреннего трения в материале и т. п. В общем случае зависимость силы сопротивления от перемещений и скоростей перемещения точек является нелинейной и, как правило, определяется экспериментально.

Простейшая модель учета демпфирования заключается в предположении, что силы сопротивления пропорциональны скоростям, т. е.

$$\mathbf{F}_o = -\eta \dot{\mathbf{u}} = -\eta \mathbf{N}\dot{\mathbf{q}},$$

где  $\eta$  – эмпирический коэффициент демпфирования.

Если силы сопротивления принять как силы внутреннего трения, распределенные по области элемента, то выражение работы этих сил в КЭ имеет вид

$$W^e(\mathbf{q}^e, \dot{\mathbf{q}}^e) = \int_{\Omega^e} \mathbf{u}^T \mathbf{F}_\delta h d\Omega = - \int_{\Omega^e} (\mathbf{N}\mathbf{q}^e)^T \eta \mathbf{N}\dot{\mathbf{q}}^e h d\Omega. \quad (3.33)$$

Подставив выражения (3.31), (3.32) и (3.33) в уравнение (3.30) и принимая во внимание, что  $\frac{\partial T^e}{\partial \mathbf{q}_i} = 0$  и  $\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial W^e}{\partial \dot{\mathbf{q}}_i} \right) = 0$ , получим следующее матричное

уравнение для элемента:

$$\left( \rho \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} h d\Omega \right) \ddot{\mathbf{q}}^e + \left( \eta \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} h d\Omega \right) \dot{\mathbf{q}}^e + \left( \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} h d\Omega \right) \mathbf{q}^e - \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \boldsymbol{\rho} h d\Omega - \int_{S_g^e} \mathbf{N}^T \mathbf{g}_s h dS = 0,$$

или соответственно

$$\mathbf{M}^e \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}^e \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}^e \mathbf{q} = \mathbf{P}^e. \quad (3.34)$$

Выражение (3.34) представляет собой матричную формулировку уравнений движения конечного элемента, где  $\ddot{\mathbf{q}}^e$  – вектор обобщенных узловых ускорений;

$\mathbf{M}^e = \rho \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} h d\Omega$  – матрица масс элемента;

$\mathbf{C}^e = \eta \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} h d\Omega$  – матрица демпфирования элемента;

$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} h d\Omega$  – матрица жесткости элемента;

$\mathbf{P}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \boldsymbol{\rho} h d\Omega + \int_{S_g^e} \mathbf{N}^T \mathbf{g}_s h dS$  – вектор узловых сил в элементе.

На базе уравнений движения для каждого КЭ составляется уравнение движения для всей системы конечных элементов (дискретной модели конструкции):

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{P}, \quad (3.35)$$

где  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{K}$  – соответственно глобальные матрицы масс, демпфирования и жесткости конструкции;  $\mathbf{q}$ ,  $\dot{\mathbf{q}}$ ,  $\ddot{\mathbf{q}}$  – соответственно векторы узловых перемещений, скоростей и ускорений;  $\mathbf{P}$  – глобальный вектор нагрузки, приложенной в узлах дискретной модели конструкции (может быть функцией от времени). Способы формирования глобальных матриц масс и демпфирования аналогичны получению глобальной матрицы жесткости на основе матриц жесткости отдельных КЭ.

Таким образом, при решении динамической задачи в принципе рассматривается статическое равновесие системы в каждый момент времени с учетом инерционных сил, зависящих от ускорения, и сил демпфирования, зависящих от скоростей движения.

### 3.2.2. Построение матриц масс и демпфирования

Матрица масс конечного элемента определяется следующим выражением:

$$\mathbf{M}^e = \rho \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^T \mathbf{N} h d\Omega.$$

Если при ее вычислении используются те же функции формы  $\mathbf{N}$ , что и для получения матрицы жесткости, такая матрица распределенных масс называется согласованной. Она является симметричной и положительно определенной матрицей  $n$ -го порядка, где  $n$  – число степеней свободы элемента. По своей структуре матрица масс подобна матрице жесткости элемента и может быть представлена в блочном виде:

$$\mathbf{M}^e = \begin{bmatrix} m_{11} & \dots & m_{1j} & \dots & m_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{i1} & \dots & m_{ij} & \dots & m_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{n1} & \dots & m_{nj} & \dots & m_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{ll}^{(e)} & \mathbf{M}_{lm}^{(e)} \\ \mathbf{M}_{ml}^{(e)} & \mathbf{M}_{mm}^{(e)} \end{bmatrix}.$$

Здесь  $i, j$  – номера степеней свободы;  $l, m$  – номера узлов конечного элемента. Элементам матрицы масс можно придать физический смысл:  $m_{ij}$  представляет собой обобщенную силу по  $i$ -му направлению от единичного обобщенного ускорения по  $j$ -му направлению.

В связи с вышеизложенным глобальная матрица масс  $\mathbf{M}$ , как и матрица жесткости системы  $\mathbf{K}$ , имеет ленточную структуру с той же шириной ленты.

Иногда с целью упрощения динамического расчета массу элемента распределяют между узлами. В этом случае матрица масс становится диагональной и называется матрицей сосредоточенных масс. При таком подходе существенно упрощается решение системы (3.35). Однако в некоторых случаях применение матрицы сосредоточенных масс приводит к заметно неточным решениям, например, к сильному занижению частот собственных колебаний по сравнению с подходом, где используется согласованная матрица.

Ниже приведены матрицы распределенных масс некоторых простых КЭ. Стержневой элемент фермы (см. рис. 2.12)

$$\mathbf{M}^e = \frac{\rho A l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Стержневой балочный элемент (см. рис. 1.7)

$$\mathbf{M}^e = \frac{\rho A l}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix}.$$

Стержневой элемент плоской рамы (см. рис. 2.13)

$$M^e = \frac{\rho A l}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22l & 0 & 54 & -13l \\ 0 & 22l & 4l^2 & 0 & 13l & -3l^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13l & 0 & 156 & -22l \\ 0 & -13l & -3l^2 & 0 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix}. \quad (3.36)$$

Треугольный элемент плоской задачи теории упругости (см. рис. 2.19)

$$M^e = \frac{\rho h A}{12} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

Прямоугольный элемент плоской задачи теории упругости (см. рис. 2.21)

$$M^e = \frac{\rho h A}{36} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}. \quad (3.38)$$

Матрицы распределенных масс других часто используемых конечных элементов приведены в [9, 19, 27].

Матрица демпфирования конечного элемента, заданная выражением

$$C^e = \eta \int_{\Omega^e} N^T N h d\Omega,$$

имеет точно такое же содержание, что и матрица распределенных масс, только вместо плотности материала  $\rho$  принят коэффициент демпфирования  $\eta$ . Поэтому данную матрицу называют *матрицей распределенного демпфирования*. Физический смысл элементов матрицы демпфирования аналогичен значению элементов матрицы масс:  $c_{ij}$  представляет собой обобщенную силу по  $i$ -му направлению, вызванную единичной скоростью по  $j$ -му направлению.



В динамическом расчете конструкций матрица демпфирования играет важную роль. Согласно принятой в 3.2.1 модели демпфирования силы сопротивления пропорциональны скоростям, но действуют в направлении, противоположном направлению последних. Такое предположение, отвечающее *гипотезе линейного вязкого трения*, приводит к удобной математической формулировке уравнений движения (3.34), (3.35). Однако затухание колебаний в жестких конструкциях не совсем соответствует предположению о вязком трении.

Существуют более точные, но и более сложные способы учета демпфирования, например, посредством представления матрицы  $C$  в виде линейной комбинации матриц масс и жесткости:

$$C = \alpha M + \beta K.$$

Такая модель демпфирования соответствует *гипотезе Релея*. Константы  $\alpha$  и  $\beta$  определяются по двум значениям коэффициентов демпфирования, определяемым из эксперимента для двух различных частот собственных колебаний [3, 27].

### 3.2.3. Методы решения задач на вынужденные колебания

Расчет конструкции на динамическое воздействие, т. е. определение НДС в какой-либо момент времени  $t$ , сводится к решению матричного уравнения движения для системы конечных элементов – *уравнения вынужденных колебаний системы*:

$$M \ddot{q}(t) + C \dot{q}(t) + K q(t) = P(t). \quad (3.39)$$

Математически (3.39) представляет собой систему линейных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами. Предполагается, что в начальный момент времени  $t = 0$  известны векторы перемещений  $q$ , скоростей  $\dot{q}$ , ускорений  $\ddot{q}$  и необходимо найти решение (3.39) в заданном интервале времени от 0 до  $T$ .

Стандартные методы решения систем дифференциальных уравнений из-за большой размерности матриц малоэффективны, а кроме того, они не учитывают особенностей сформированных с помощью МКЭ глобальных матриц  $M$ ,  $C$ ,  $K$ , например, симметричность, ленточную структуру и т. д.

Для практических расчетов в основном используются методы *прямого интегрирования* и *разложения по собственным формам колебаний*. Основное различие между этими методами заключается в том, что при использовании метода разложения по собственным формам перед интегрированием решается проблема собственных значений. Выбор между прямым интегрированием и разложением по собственным формам определяется лишь соображениями эффективности, т. к. оба метода приводят к одинаковым результатам.

Так, если динамическая задача характеризуется небольшим числом степеней свободы и решается на большом интервале времени, то с точки зрения объема вычислений предпочтительнее метод разложения по собственным формам. В основе его – одноразовое нахождение главных частот и форм колебаний системы и последующее представление решения в виде суперпозиции главных форм. Однако этот метод можно применять только в рамках линейного расчета, т. к. принцип суперпозиции для нелинейных задач недействителен.

Методы прямого интегрирования носят более общий характер и могут применяться для решения всех задач динамического расчета конструкций. При сравнительно кратковременных динамических процессах (например, ударном или сейсмическом воздействии) или если требуется учитывать большое число форм собственных колебаний, прямое интегрирование оказывается более экономичным. В этом случае матричное уравнение (3.39) интегрируется с помощью численной пошаговой процедуры, без каких-либо предварительных преобразований, т. е. напрямую.

В основе всех алгоритмов прямого численного интегрирования лежат следующие положения. Временной интервал  $(0, T)$  разбивается на  $n$  равных интервалов  $\Delta t = \frac{T}{n}$ , и приближенное решение строится для каждого последующего момента времени  $\Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots, t, t+\Delta t, \dots, T$  с использованием решений, полученных на предыдущих шагах. Условия равновесия с учетом сил инерции и демпфирования должны удовлетворяться только в дискретных точках временного интервала  $t+\Delta t$ , а не в любой момент времени (в связи с чем в алгоритмах прямого интегрирования можно эффективно использовать все известные процедуры статического расчета). Изменение перемещений, скоростей и ускорений учитывается внутри каждого временного интервала  $\Delta t$ , причем, как это будет показано ниже, именно способ учета этих изменений определяет точность, устойчивость и экономичность процедуры интегрирования. В зависимости от принятого способа различают *метод центральных разностей, метод Ньюмарка,  $\theta$ -метод Вилсона, метод Хоболта, метод временных конечных элементов* и др. [3, 21, 27].

Вычисление перемещений  $\mathbf{q}_{t+\Delta t}$  в методе центральных разностей основано на выполнении условий равновесия в момент времени  $t$ , по этой причине подобные методы относятся к методам *явного интегрирования*. В этом случае не требуется обращения или факторизации матрицы жесткости  $\mathbf{K}$  в процессе выполнения шаговой процедуры.

С другой стороны, методы Ньюмарка, Вилсона и Хоболта используют условия равновесия в момент времени  $t+\Delta t$  и относятся к методам *неявного интегрирования*.

## Метод центральных разностей

Сущность метода состоит в аппроксимации скорости и ускорения с помощью конечно-разностных отношений в перемещениях. Так, для двух соседних интервалов (рис. 3.9) центральная и вторая разности (для вектора перемещений  $\mathbf{q}$ ) в момент времени  $t$  имеют вид:

$$\dot{\mathbf{q}}_t = \frac{1}{2\Delta t}(\mathbf{q}_{t+\Delta t} - \mathbf{q}_{t-\Delta t}), \quad (3.40)$$

$$\ddot{\mathbf{q}}_t = \frac{1}{(\Delta t)^2}(\mathbf{q}_{t-\Delta t} - 2\mathbf{q}_t + \mathbf{q}_{t+\Delta t}).$$

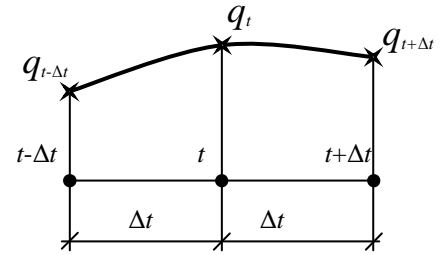


Рис. 3.9

Подставив выражения (3.40) в (3.39), получим матричное уравнение равновесия для момента времени  $t$ :

$$\left( \frac{1}{(\Delta t)^2} \mathbf{M} + \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C} \right) \mathbf{q}_{t+\Delta t} = \mathbf{P}_t - \left( \mathbf{K} - \frac{2}{(\Delta t)^2} \mathbf{M} \right) \mathbf{q}_t - \left( \frac{1}{(\Delta t)^2} \mathbf{M} - \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C} \right) \mathbf{q}_{t-\Delta t}. \quad (3.41)$$

Соотношения (3.40) и (3.41) совместно с начальными условиями дают процедуру пошагового интегрирования дифференциального уравнения (3.39), т. е. способ определения  $\mathbf{q}$ ,  $\dot{\mathbf{q}}$ ,  $\ddot{\mathbf{q}}$  в момент времени  $t+\Delta t$ , когда известны их значения в моментах времени  $t$  и  $t-\Delta t$ .

Так как в начальный момент времени  $t=0$  значение  $\mathbf{q}_{-1}$  (т. е.  $\mathbf{q}_{t-\Delta t}$ ) неизвестно, а  $\mathbf{q}_0$ ,  $\dot{\mathbf{q}}_0$ ,  $\ddot{\mathbf{q}}_0$  известны, из выражений (3.40) получим

$$\mathbf{q}_{-1} = \mathbf{q}_0 - \Delta t \dot{\mathbf{q}}_0 + \frac{(\Delta t)^2}{2} \ddot{\mathbf{q}}_0. \quad (3.42)$$

Таким образом, имеем следующее рекуррентное уравнение (с учетом (3.42)) для вычисления значений перемещений на каждом последующем шаге  $t+\Delta t$ :

$$\hat{\mathbf{M}} \mathbf{q}_{t+\Delta t} = \hat{\mathbf{P}}_t, \quad (3.43)$$

где  $\hat{\mathbf{M}} = \alpha_0 \mathbf{M} + \alpha_1 \mathbf{C}$  – эффективная матрица масс;

$\hat{\mathbf{P}}_t = \mathbf{P}_t - (\mathbf{K} - \alpha_2 \mathbf{M}) \mathbf{q}_t - (\alpha_0 \mathbf{M} - \alpha_1 \mathbf{C}) \mathbf{q}_{t-\Delta t}$  – эффективный вектор нагрузки.

Здесь для краткости записи алгоритма введены коэффициенты

$$\alpha_0 = \frac{1}{(\Delta t)^2}; \quad \alpha_1 = \frac{1}{2\Delta t}; \quad \alpha_2 = 2\alpha_0.$$

Алгоритм, реализующий формулу (3.43), состоит из двух частей.

I часть – выполняется только перед первым шагом:

- 1) формируются матрицы жесткости  $\mathbf{K}$ , масс  $\mathbf{M}$  и демпфирования  $\mathbf{C}$ ;
- 2) задается шаг интегрирования  $\Delta t$  и начальные условия  $\mathbf{q}_0$ ,  $\dot{\mathbf{q}}_0$ ,  $\ddot{\mathbf{q}}_0$ ;
- 3) вычисляются коэффициенты  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ;

- 4) по формуле (3.42) вычисляются значения перемещений  $\mathbf{q}_{-1}$ ;
- 5) формируется эффективная матрица масс  $\hat{\mathbf{M}} = \alpha_0 \mathbf{M} + \alpha_1 \mathbf{C}$ ;
- 6) выполняется факторизация матрицы  $\hat{\mathbf{M}}$  (разложение на треугольные матрицы) для последующего использования на каждом шаге интегрирования.

II часть – выполняется на каждом шаге:

- 1) формируется эффективный вектор нагрузки

$$\hat{\mathbf{P}}_t = \mathbf{P}_t - (\mathbf{K} - \alpha_2 \mathbf{M}) \mathbf{q}_t - (\alpha_0 \mathbf{M} - \alpha_1 \mathbf{C}) \mathbf{q}_{t-\Delta t};$$

- 2) из решения уравнения (3.43) определяются перемещения  $\mathbf{q}_{t+\Delta t}$ ;
- 3) при необходимости по формуле (3.40) определяются скорости и ускорения.

В том случае, если затуханием системы можно пренебречь, т. е.  $\mathbf{C} = 0$ , уравнение (3.43) упрощается и принимает вид

$$\alpha_0 \mathbf{M} \mathbf{q}_{t+\Delta t} = \hat{\mathbf{P}}_t, \quad (3.44)$$

где  $\hat{\mathbf{P}}_t = \mathbf{P}_t - (\mathbf{K} - \alpha_2 \mathbf{M}) \mathbf{q}_t - \alpha_0 \mathbf{M} \mathbf{q}_{t-\Delta t}$ .

Если к тому же использовать матрицу сосредоточенных масс ( $m_{ij} = 0, i \neq j$ ), то решение уравнения (3.44) для  $i$ -й составляющей вектора  $\mathbf{q}_{t+\Delta t}$  будет следующим:

$$q_i|_{t+\Delta t} = (\Delta t)^2 \left. \frac{\hat{p}_i}{m_{ij}} \right|_t.$$

Основное преимущество метода центральных разностей заключается именно в удобстве алгоритма при использовании матрицы сосредоточенных масс и неучете сил демпфирования. Недостаток же, связанный с "упрощением" матрицы масс, не очень значителен, поскольку хорошая точность решения может быть получена путем сгущения конечно-элементной сетки.

Однако более существенным недостатком является то, что шаг интегрирования  $\Delta t$  должен быть меньше некоторого критического значения  $\Delta t_{кр}$ , вычисляемого исходя из инерционных и жесткостных свойств дискретной модели конструкции. В [3] показано, что для получения достоверного решения удовлетворительной точности необходимо выполнение следующего условия:

$$\Delta t \leq \Delta t_{кр} = \frac{T_o}{\pi}, \quad (3.45)$$

где  $T_o$  – наименьший период собственных колебаний системы.

Решения, получаемые при выполнении условия (3.45), – *устойчивы*, при невыполнении условия – *неустойчивы*. Таким образом, метод центральных разностей является *условно устойчивым* методом.

Таким образом, при использовании явных схем шаги по времени должны приниматься очень малыми, поэтому методы явного интегрирования эффективны только при решении достаточно кратковременных динамических задач.

Для более продолжительных задач, если не приняты какие-либо специальные меры для повышения устойчивости явных схем, более эффективными оказываются неявные схемы.

В свою очередь, в методах неявного интегрирования на каждом временном шаге необходимо решать систему алгебраических уравнений. Несмотря на то, что объем вычислений на каждом шаге увеличивается, за счет увеличения продолжительности самого шага может быть получена значительная экономия вычислительных затрат в целом.

### Метод Ньюмарка

Этот метод основан на предположении линейного изменения ускорения в каждом интервале времени  $t, t+\Delta t$ , при этом устанавливаются следующие зависимости между перемещениями, скоростями и ускорениями:

$$\begin{aligned}\dot{q}_{t+\Delta t} &= \dot{q}_t + [(1 - \beta)\ddot{q}_t + \beta \ddot{q}_{t+\Delta t}] \Delta t, \\ q_{t+\Delta t} &= q_t + \dot{q}_t \Delta t + \left[ \left( \frac{1}{2} - \alpha \right) \ddot{q}_t + \alpha \ddot{q}_{t+\Delta t} \right] (\Delta t)^2,\end{aligned}\tag{3.46}$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  – параметры, определяющие точность и устойчивость процесса интегрирования. При  $\alpha = 0.25$  и  $\beta = 0.5$  получаем безусловно устойчивую схему расчета с постоянным средним ускорением в интервале  $\Delta t$  (рис. 3.10).

Помимо (3.46) для определения векторов перемещений, скоростей и ускорений в момент  $t+\Delta t$  используются уравнения равновесия для времени  $t+\Delta t$ :

$$\mathbf{M} \ddot{q}_{t+\Delta t} + \mathbf{C} \dot{q}_{t+\Delta t} + \mathbf{K} q_{t+\Delta t} = \mathbf{P}_{t+\Delta t}.\tag{3.47}$$

Из уравнений (3.46) и (3.47) получают следующее рекуррентное выражение:

$$\hat{\mathbf{K}} q_{t+\Delta t} = \hat{\mathbf{P}}_{t+\Delta t},\tag{3.48}$$

где

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K} + \alpha_0 \mathbf{M} + \alpha_1 \mathbf{C},\tag{3.49}$$

$$\hat{\mathbf{P}}_{t+\Delta t} = \mathbf{P}_{t+\Delta t} + \mathbf{M}(\alpha_0 q_t + \alpha_2 \dot{q}_t + \alpha_3 \ddot{q}_t) + \mathbf{C}(\alpha_1 q_t + \alpha_4 \dot{q}_t + \alpha_5 \ddot{q}_t).\tag{3.50}$$

Для вычисления ускорений и скоростей в момент времени  $t+\Delta t$  используются уравнения (3.46), преобразованные к виду

$$\begin{aligned}\ddot{q}_{t+\Delta t} &= \alpha_0 (q_{t+\Delta t} - q_t) - \alpha_2 \dot{q}_t - \alpha_3 \ddot{q}_t, \\ \dot{q}_{t+\Delta t} &= \dot{q}_t + \alpha_6 \ddot{q}_t + \alpha_7 \ddot{q}_{t+\Delta t}.\end{aligned}\tag{3.51}$$

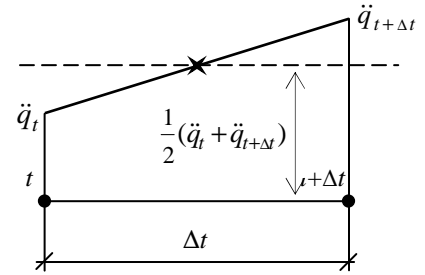


Рис. 3.10

Здесь введены коэффициенты

$$\alpha_0 = \frac{1}{\alpha (\Delta t)^2}; \quad \alpha_1 = \frac{\beta}{\alpha \Delta t}; \quad \alpha_2 = \frac{1}{\alpha \Delta t}; \quad \alpha_3 = \frac{1}{2\Delta t} - 1; \quad \alpha_4 = \frac{\beta}{\alpha} - 1; \quad \alpha_5 = \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\beta}{\alpha} - 2 \right);$$

$$\alpha_6 = \Delta t (1 - \beta); \quad \alpha_7 = \beta \Delta t.$$

Ниже приведен алгоритм интегрирования методом Ньюмарка.

I часть – выполняется перед первым шагом:

- 1) формируются матрицы жесткости  $\mathbf{K}$ , масс  $\mathbf{M}$  и демпфирования  $\mathbf{C}$ ;
- 2) задаются шаг интегрирования  $\Delta t$  и начальные условия  $\mathbf{q}_0, \dot{\mathbf{q}}_0, \ddot{\mathbf{q}}_0$ ;
- 3) назначаются параметры  $\alpha$  и  $\beta$ , вычисляются коэффициенты  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7$ ;
- 4) по (3.49) формируется эффективная матрица жесткости  $\hat{\mathbf{K}}$ ;
- 5) выполняется факторизация матрицы  $\hat{\mathbf{K}}$ .

II часть – выполняется на каждом шаге:

- 1) по (3.50) вычисляется эффективный вектор нагрузки  $\hat{\mathbf{P}}_{t+\Delta t}$ ;
- 2) из решения уравнения (3.48) определяются перемещения  $\mathbf{q}_{t+\Delta t}$ ;
- 3) по формулам (3.51) определяются ускорения  $\ddot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}$  и скорости  $\dot{\mathbf{q}}_{t+\Delta t}$ .

Отметим, что алгоритмы метода Хаболта, а особенно  $\theta$ -метода Вилсона, похожи на алгоритм метода Ньюмарка, что позволяет применять эти методы в виде одной пошаговой процедуры интегрирования с корректировкой соответствующих параметров и коэффициентов ( $\alpha, \beta, \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$  и т. д.).

Кроме того, методы неявного интегрирования являются *безусловно устойчивыми*, т. е. для них нет ограничений, подобных (3.50), единственным критерием выбора шага интегрирования  $\Delta t$  является точность получаемых результатов. С одной стороны, шаг должен быть достаточно мал для достижения необходимой точности решения, с другой – он не должен быть слишком малым, поскольку при этом неоправданно растут вычислительные затраты.

Вообще говоря, шаг  $\Delta t$  при использовании безусловно устойчивых методов интегрирования должен быть таким, чтобы с достаточной точностью учитывались именно те колебания, которые играют наиболее существенную роль в динамическом поведении конструкции. Как правило, это колебания с относительно низкими частотами, вклады колебаний с наивысшими частотами обычно не играют сколько-нибудь существенной роли.

С некоторыми другими применяемыми на практике методами решения задач на вынужденные колебания можно ознакомиться в [3, 27]. Там же подробно исследуется вопрос выбора шага интегрирования, анализируется устойчивость и точность рассматриваемых методов.

### 3.2.4. Примеры динамических расчетов

#### Пример 1

В качестве первого из примеров, иллюстрирующих методы решения динамических задач, рассмотрим плоскую раму, статический расчет которой изложен в 2.2.3. Размеры, нагрузка и конечно-элементная схема рамы приведены на рис. 2.15. Динамическое воздействие задано в виде вертикального смещения нижней опоры (рис. 3.11, а). Характер динамического смещения показан на рис. 3.11, б (амплитуда смещения  $v_a = 50$  мм, период воздействия  $T_s = 0.2$  с при наименьшем периоде собственных колебаний рамы  $T_o = 0.19$  с).

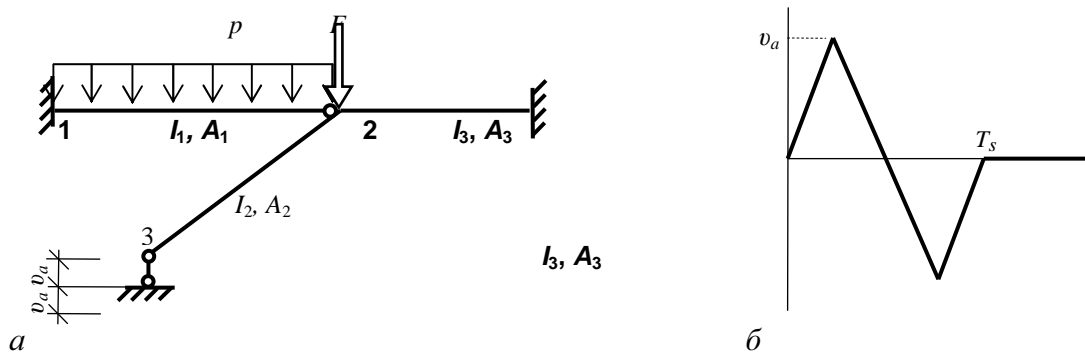


Рис. 3.11

Используя МКЭ, составим матричное уравнение вынужденных колебаний (3.39) для дискретной модели рамы (см. рис. 2.15, б). Матрица жесткости и вектор нагрузки были сформированы в 2.2.3. Матрицы масс конечных элементов плоской рамы определяются выражением (3.36).

Приняв плотность материала  $\rho = 7850$  кг/м<sup>3</sup> и подставив в (3.36)  $l = 6$  м,  $A = 26.8 \cdot 10^{-4}$  м<sup>2</sup>, получим для 1-го элемента (здесь локальная система координат совпадает с глобальной):

$$M^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.4208 & 0 & 0 & 0.2104 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4688 & 0.3967 & 0 & 0.1623 & -0.2344 \\ 0 & 0.3967 & 0.4327 & 0 & 0.2344 & -0.3245 \\ 0.2104 & 0 & 0 & 0.4208 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1623 & 0.2344 & 0 & 0.4688 & -0.3967 \\ 0 & -0.2344 & -0.3245 & 0 & -0.3967 & 0.4327 \end{bmatrix}.$$

Подставляя соответствующие геометрические характеристики, получаем матрицы масс и для остальных конечных элементов. Так как для 2-го элемента ЛСК не совпадает с ГСК, выполняется преобразование системы координат согласно следующему выражению:

$$M^e = L^T M'^e L.$$

Глобальную матрицу масс формируем на основе матриц масс отдельных КЭ по тем же правилам, что и матрицу жесткости для всей системы.

При вычислении матриц демпфирования конечных элементов может быть использовано выражение, аналогичное (3.36) с заменой  $\rho$  на коэффициент затухания  $\eta$ . Принимая  $\eta = 300$  кН·с/м одинаковым для всех элементов рамы (так же, как и значение  $\rho$ ), получим следующее соотношение между глобальной матрицей демпфирования и матрицей масс всей системы:

$$C = \frac{\eta}{\rho} M.$$

При учете кинематических граничных условий из полученного матричного уравнения движения исключаются уравнения (и соответственно компоненты узловых перемещений, скоростей и ускорений), отвечающие неподвижным опорным связям. Таким образом, векторы узловых перемещений, скоростей и ускорений будут иметь следующее содержание:

$$\mathbf{q} = \{q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad q_5 \quad q_6 \quad q_7\}^T = \{u_2 \quad v_2 \quad \varphi_2 \quad \varphi'_2 \quad u_3 \quad v_3 \quad \varphi_3\}^T,$$

$$\dot{\mathbf{q}} = \{\dot{u}_2 \quad \dot{v}_2 \quad \dot{\varphi}_2 \quad \dot{\varphi}'_2 \quad \dot{u}_3 \quad \dot{v}_3 \quad \dot{\varphi}_3\}^T, \quad \ddot{\mathbf{q}} = \{\ddot{u}_2 \quad \ddot{v}_2 \quad \ddot{\varphi}_2 \quad \ddot{\varphi}'_2 \quad \ddot{u}_3 \quad \ddot{v}_3 \quad \ddot{\varphi}_3\}^T.$$

Заданное динамическое смещение  $v_3$  учитывается путем корректировки рекуррентного матричного уравнения (3.48) на каждом временном шаге  $t+\Delta t$ . При использовании методов неявного интегрирования (Ньюмарка, Вилсона, Хоболта) данная корректировка заключается в следующем (с учетом того, что  $v_3$  соответствует обобщенному узловому перемещению  $q_6$ ):

- 1) в соответствии с заданным законом изменения вертикального смещения 3-го узла (рис. 3.11, б) находится величина  $q_6$  для момента времени  $t+\Delta t$ ;
- 2) из эффективного вектора нагрузки  $\hat{\mathbf{P}}_{t+\Delta t}$  вычитается 6-й столбец эффективной матрицы жесткости  $\hat{\mathbf{K}}$ , умноженный на величину  $q_{6t+\Delta t}$ :

$$\hat{p}_i = \hat{p}_i - \hat{k}_{i6} \cdot q_6, \quad (i = 1, \dots, 7);$$

- 3) обнуляются 6-я строка и 6-й столбец матрицы  $\hat{\mathbf{K}}$ :

$$\hat{k}_{i6} = 0, \quad \hat{k}_{6i} = 0, \quad (i = 1, \dots, 7);$$

- 4) 6-й коэффициент главной диагонали матрицы  $\hat{\mathbf{K}}$  приравнивается единице:  $\hat{k}_{66} = 1$ ;

- 5) 6-й элемент вектора  $\hat{\mathbf{P}}_{t+\Delta t}$  приравнивается заданному смещению  $q_{6t+\Delta t}$ .

На рис. 3.12 приведены результаты динамического расчета, а именно изменение прогиба 2-го узла во времени (статический прогиб узла составляет 15.3 мм). Пунктиром показано заданное смещение опоры. Использовался алгоритм  $\theta$ -метода Вилсона с шагом интегрирования  $\Delta t = 0.01$  с.

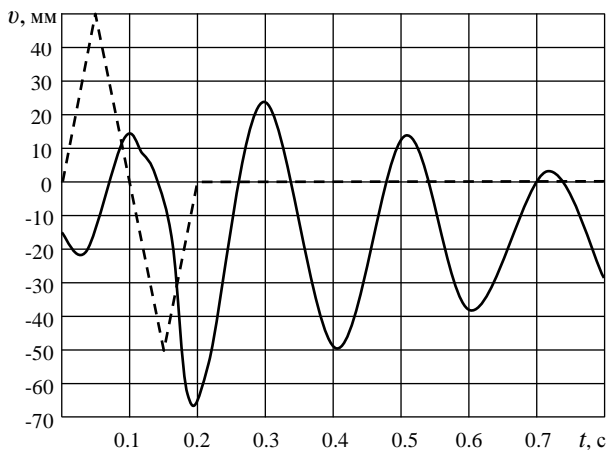


Рис. 3.12



## Пример 2

Рассмотрим динамическое действие горизонтальной нагрузки, приложенной к верхнему краю подпорной стенки. Так как имеет место плоское деформированное состояние, расчет производим для пластины трапециевидального профиля толщиной 1 м (сетка конечных элементов показана на рис. 3.13).

Динамическая нагрузка задана в виде

а) периодической силы  $P(t) = P_0 \sin \theta t$ ;

б) внезапно приложенной силы  $P = P_0$ .

Примем следующие исходные данные: модуль упругости материала  $E = 1.8 \cdot 10^7$  кН/м<sup>2</sup>, коэффициент Пуассона  $\nu = 0.17$ , амплитудное значение нагрузки  $P_0 = 50$  кН, частота вынужденных колебаний  $\theta = 35$  с<sup>-1</sup> (при основной частоте собственных колебаний 49.5 с<sup>-1</sup>), плотность материала  $\rho = 2400$  кг/м<sup>3</sup>, коэффициент демпфирования  $\eta = 100$  кН·с/м. Размеры сооружения: высота 6 м, основание 4 м, ширина по верху 1 м.

Матричное уравнение вынужденных колебаний для дискретной системы здесь также составлялось при помощи МКЭ. Для вычисления матриц масс и демпфирования плоских конечных элементов применялись выражения (3.37), (3.38).

Динамический расчет выполнялся с использованием метода Ньюмарка (шаг интегрирования по времени  $\Delta t = 0.01$  с). На рис. 3.14, а, б показаны горизонтальные перемещения точки приложения силы во времени соответственно при действии периодической и внезапно приложенной силы. Для сравнения – при статическом приложении силы перемещение составляет 0.104 мм.

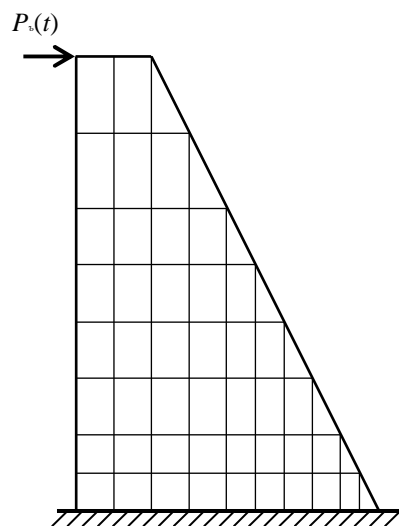
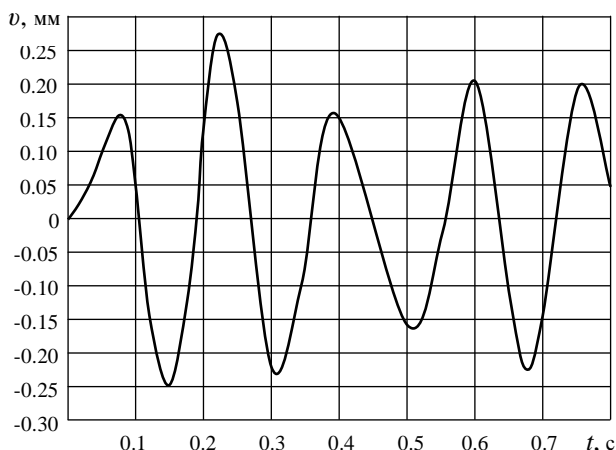
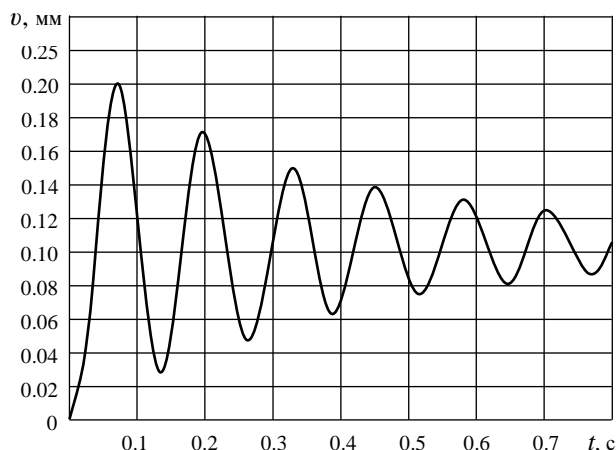


Рис. 3.13



а



б

Рис. 3.14

## Заключение

Таким образом, мы рассмотрели основные положения современных численных методов и особенности их применения при проведении инженерных расчетов. Целесообразность изучения этих вопросов обусловлена широким внедрением в расчетную и проектную практику разнообразных средств электронно-вычислительной техники и ориентированных на их использовании приближенных методов, среди которых ведущее положение занимает метод конечных элементов.

Наряду с решением задач статики стержневых систем рассмотрены также задачи определения напряженно-деформированного состояния в двумерной континуальной области, при изгибе тонких плит и оболочек, в случае нелинейного деформирования и динамического поведения конструкций.

Основные вопросы, отраженные в учебном пособии:

- приведены численные методы для решения систем линейных алгебраических уравнений;
- дан обзор наиболее характерных приближенных численных методов, применяемых для расчета напряженно-деформированного состояния конструкций и сооружений;
- представлены различные виды и формы метода конечных элементов – наиболее эффективного численного метода строительной механики;
- детально изложены основные этапы общего алгоритма МКЭ применительно к статическому расчету конструкции;
- рассмотрены соотношения и процедуры альтернативных схем МКЭ – в формулировке метода сил и смешанного метода;
- записаны в явном виде выражения для вычисления матриц жесткости различных конечных элементов, в том числе и при использовании МКЭ в форме метода сил и смешанного метода;
- показаны возможности и области применения численных методов при решении нелинейных и динамических задач расчета конструкций;
- изложены алгоритмы численных расчетов при нелинейном деформировании и при динамических воздействиях на конструкцию.

Каждый из рассматриваемых вопросов сопровождается подробно разобранными численными примерами, что позволяет проследить особенности реализации того или иного алгоритма в конкретных случаях.

## Библиографический список

1. *Александров А. В., Потапов В. Д.* Основы теории упругости и пластичности. – М.: Высш. шк., 1990. – 400 с.
2. *Александров А. В., Потапов В. Д., Державин Б. П.* Соппротивление материалов. – М.: Высш. шк., 2000. – 560 с.
3. *Бате Л., Вилсон Е.* Численные методы анализа и метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1982. – 448 с.
4. *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Мир, 1987. – 542 с.
5. *Галлагер Р.* Метод конечных элементов. Основы. – М.: Мир, 1984. – 428 с.
6. *Дарков А. В., Шапошников Н. Н.* Строительная механика: Учеб. для строит. спец. вузов. – 8-е изд., перераб. и доп. – М.: Высш. шк., 1986. – 607 с.
7. *Джордж А., Лю Дж.* Численное решение больших разреженных систем уравнений. – М.: Мир, 1984. – 333 с.
8. *Дойхен Ю. М., Ким Т. С., Ловцов А. Д., Тен Е. С.* Расчет конструкций, контактирующих с упругим основанием: Учеб. пособие. – Хабаровск: Изд-во Хабар. гос. техн. ун-та, 2001. – 203 с.
9. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
10. *Зенкевич О., Чанг И.* Метод конечных элементов в теории сооружений и в механике сплошных сред. – М.: Недра, 1974. – 239 с.
11. *Зенкевич О., Морган К.* Конечные элементы и аппроксимация. – М.: Мир, 1986. – 318 с.
12. *Калиткин Н. Н.* Численные методы. – М.: Наука, 1978. – 512 с.
13. *Масленников А. М.* Расчет строительных конструкций численными методами: Учеб. пособие. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1987. – 224 с.
14. *Метод конечных элементов: Учеб. пособие для вузов / Под ред. П. М. Варвака.* Киев: Вища шк., 1981. – 176 с.
15. *Метод конечных элементов в механике твердых тел / А. С. Сахаров, В. Н. Кислоокый, В. В. Киричевский и др.; Под общ. ред. А. С. Сахарова и И. Альтенбаха.* – Киев: Вища шк., 1982. – 480 с.
16. *Норри Д., де Фриз Ж.* Введение в метод конечных элементов. – М.: Мир, 1981. – 304 с.
17. *Оден Дж.* Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. – М.: Мир, 1976. – 464 с.

18. *Постнов В. А.* Численные методы расчета судовых конструкций. – Л.: Судостроение, 1977. – 279 с.
19. *Постнов В. А., Хархурим И. Я.* Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. – Л.: Судостроение, 1974. – 344 с.
20. *Постнов В. А., Хархурим И. Я.* Метод суперэлементов в расчетах инженерных сооружений. – Л.: Судостроение, 1979. – 328 с.
21. *Применение метода конечных элементов к расчету конструкций: Учеб. пособие для техн. вузов / Р. А. Хечумов, Х. Кепплер, В. И. Прокопьев; Под ред. Р. А. Хечумова.* – М.: Изд-во АСВ, 1994. – 353 с.
22. *Расчеты машиностроительных конструкций методом конечных элементов: Справ. / В. И. Мяченков, В. П. Мальцев, В. П. Майборода и др.; Под общ. ред. В. И. Мяченкова.* – М.: Машиностроение, 1989. – 520 с.
23. *Райс Дж.* Матричные вычисления и математическое обеспечение. – М.: Мир, 1984. – 264 с.
24. *Розин Л. А.* Задачи теории упругости и численные методы их решения. – СПб.: Изд-во СПбГТУ, 1998. – 532 с.
25. *Розин Л. А.* Метод конечных элементов в применении к упругим системам. – М.: Стройиздат, 1977. – 192 с.
26. *Сегерлинд Л.* Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979. – 392 с.
27. *Секулович М.* Метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1993. – 664 с.
28. *Стренг Г., Фикс Дж.* Теория метода конечных элементов. – М.: Мир, 1977. – 349 с.
29. *Строительная механика. Стержневые системы: Учеб. для вузов / А. Ф. Смирнов, А. В. Александров, Б. Я. Лащеников, Н. Н. Шапошников; Под ред. А. Ф. Смирнова.* – М.: Стройиздат, 1981. – 512 с.
30. *Строительная механика. Тонкостенные пространственные системы: Учеб. для вузов / А. В. Александров, Б. Я. Лащеников, Н. Н. Шапошников; Под ред. А. Ф. Смирнова.* – М.: Стройиздат, 1983. – 488 с.
31. *Численные методы решения задач строительной механики: Справ. пособие / В. П. Ильин, В. В. Карпов, А. М. Масленников; Под общ. ред. В. П. Ильина.* – Минск: Вышэйш. шк., 1990. – 349 с.

## Оглавление

Используемые обозначения .....	3
Используемые сокращения .....	4
Введение .....	5
1. ВВЕДЕНИЕ В ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ .....	6
1.1. Математический аппарат численных методов .....	6
1.1.1. Физическая и математическая модели объекта .....	6
1.1.2. Краткие сведения из теории матриц .....	9
1.1.3. Численные методы линейной алгебры .....	13
1.2. Обзор численных методов строительной механики .....	20
1.2.1. Метод конечных разностей .....	21
1.2.2. Вариационно-разностный метод .....	26
1.2.3. Метод конечных элементов .....	30
2. ПРИМЕНЕНИЕ МКЭ К РАСЧЕТУ КОНСТРУКЦИЙ .....	42
2.1. Основные положения МКЭ .....	43
2.1.1. Различные виды и формы МКЭ .....	43
2.1.2. Элементы и аппроксимирующие функции .....	46
2.1.3. Общий алгоритм статического расчета МКЭ .....	54
2.1.4. Понятие о суперэлементном подходе .....	62
2.2. Расчет плоских стержневых систем МКЭ .....	64
2.2.1. Стержневые конечные элементы .....	64
2.2.2. Преобразование МЖ и ВН при повороте координатных осей .....	66
2.2.3. Пример расчета стержневой системы .....	69
2.3. МКЭ для континуальных систем .....	73
2.3.1. Плоская задача теории упругости .....	73
2.3.2. Конечные элементы плоской задачи теории упругости .....	77
2.3.3. Пример решения плоской задачи .....	83
2.3.4. Метод сил и смешанная формулировка МКЭ .....	86
2.3.5. Задачи изгиба плит и оболочек .....	92
3. РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ И НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ .....	104
3.1. Физически и геометрически нелинейные задачи .....	104
3.1.1. Общие представления о нелинейных задачах .....	104
3.1.2. Итерационные методы решения нелинейных задач .....	106
3.1.3. Шаговые методы решения нелинейных задач.....	109
3.1.4. Алгоритмы решения упругопластической плоской задачи .....	112
3.1.5. Примеры нелинейных расчетов .....	116
3.2. Расчет конструкций на динамические воздействия .....	118
3.2.1. Конечно-элементная формулировка динамических задач .....	118
3.2.2. Построение матриц масс и демпфирования .....	121
3.2.3. Методы решения задач на вынужденные колебания .....	123
3.2.4. Примеры динамических расчетов .....	129
Заключение .....	132
Библиографический список .....	133

*Учебное издание*

**Лукашевич  
Анатолий Анатольевич**

**СОВРЕМЕННЫЕ  
ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ  
СТРОИТЕЛЬНОЙ МЕХАНИКИ**

Учебное пособие

Главный редактор  
Л. А. СУЕВАЛОВА

Редактор  
Е. Н. ЯРУЛИНА

Компьютерная верстка  
Н. К. САВИНОЙ

Дизайн обложки  
Л. В. ЗАДВЕРНЮК

Подписано в печать 19.05.03. Формат 60x84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага писчая. Гарнитура "Таймс". Печать офсетная.  
Усл. печ. л. 7,9. Тираж 200 экз. Заказ

Издательство Хабаровского государственного технического университета. 680035, Хабаровск, ул.  
Тихоокеанская, 136.

Отдел оперативной полиграфии издательства Хабаровского государственного технического  
университета. 680035, Хабаровск, ул. Тихоокеанская, 136.